ΛΥΣΕΙΣ

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Μπάρλας ΕΚΔΟΣΕΙΣ

1 Θέμα 2 - 21165

α. • $\vec{EZ}=\vec{AZ}-\vec{AE}=\frac{1}{3}\cdot\vec{A\Delta}+\frac{1}{2}\cdot\vec{AB}=\frac{1}{3}\cdot\vec{\beta}+\frac{1}{2}\cdot\vec{\alpha}=\frac{1}{2}\cdot\vec{\alpha}+\frac{1}{3}\cdot\vec{\beta}$

• $\vec{Z\Gamma}=\vec{A\Gamma}-\vec{AZ}=(\vec{AB}+\vec{A\Delta})-\vec{AZ}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\frac{1}{3}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}+\frac{2}{3}\cdot\vec{\beta}$

β. $\vec{Z\Gamma}=\vec{\alpha}+\frac{2}{3}\cdot\vec{\beta}=2\left(\frac{1}{2}\cdot\vec{\alpha}+\frac{1}{3}\cdot\vec{\beta}\right)\overset{\alpha.}{=}2\vec{EZ}$ ή $\vec{Z\Gamma}=2\vec{EZ}$

γ. Επειδή $\vec{Z\Gamma}=2\vec{EZ}$ είναι $\vec{Z\Gamma}//\vec{EZ}$ και τα διανύσματα έχουν κοινό άκρο το σημείο Z, θα έχουν τον ίδιο φορέα. Άρα τα σημεία Z, E και Γ είναι συνευθειακά.

2 Θέμα 2 - 15010

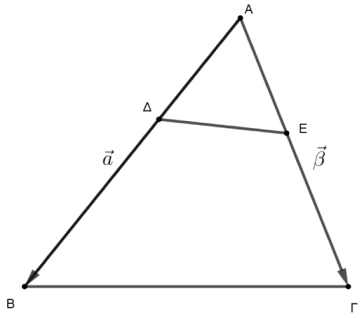
α. i. • $\vec{A\Delta}=\vec{AB}+\vec{B\Delta}=\vec{AB}+(\vec{BA}+\vec{B\Gamma})=\vec{AA}+\vec{B\Gamma}=\vec{0}+\vec{B\Gamma}=\vec{B\Gamma}$, (1)

• $\vec{AE}=\vec{A\Gamma}+\vec{\Gamma E}=\vec{A\Gamma}+(\vec{\Gamma A}+\vec{\Gamma B})=...=\vec{\Gamma B}$, (2)

ii. Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $\vec{A\Delta}=-\vec{AE}$ δηλαδή τα διανύσματα $\vec{A\Delta}$ και $\vec{AE}$ είναι αντίθετα.

β. Από το **α.** ερώτημα είναι $\vec{A\Delta}=(-1)\vec{AE}$, οπότε $\vec{A\Delta}//\vec{AE}$ και αφού έχουν κοινό σημείο το A, θα έχουν τον ίδιο φορέα. Άρα τα σημεία A, Δ και E είναι συνευθειακά.

3 Θέμα 4 - 21885



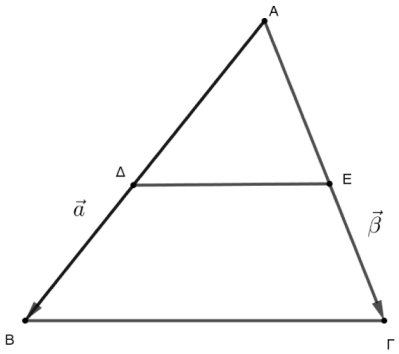
α) Είναι $\overrightarrow{\Delta E}=\overrightarrow{\Delta A}+\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{\kappa}\cdot\vec{\alpha}+\frac{1}{\lambda}\cdot\vec{\beta}$

$\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A\Gamma}=-\vec{\alpha}+\vec{\beta}$

β)

i. Αν κ=λ τότε $\overrightarrow{B\Gamma}==-\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\kappa(-\frac{1}{\kappa}\vec{\alpha}+\frac{1}{\kappa}\vec{\beta})=\kappa\cdot\overrightarrow{\Delta E}$ άρα $\overrightarrow{B\Gamma}//\overrightarrow{\Delta E}$ και $|\overrightarrow{B\Gamma}|=\kappa\cdot|\overrightarrow{\Delta E}|$

ii.



Αν κ=λ=2 τότε τα σημεία Δ και Ε είναι μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα , οπότε $\overrightarrow{BΓ}//\overrightarrow{ΔE}$ και $|\overrightarrow{BΓ}| = 2\cdot|\overrightarrow{ΔE}|$, επομένως ΔΕ//ΒΓ και ΒΓ=2·ΔΕ. Αποδείξαμε δηλαδή ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο με την τρίτη πλευρά του τριγώνου και ισούται με το μισό της τρίτης πλευράς.

4 Θέμα 2 - 14666

α. • $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta} = 3(1\,,-3) - 5(-2\,,-1) = (3,-9) - (-10\,,-5) = (13\,,-4)$

• $\vec{v} = 5\vec{\alpha} - 9\vec{\beta} = 5(1\,,-3) - 9(-2\,,-1) = (5\,,-15) - (-18\,,-9) = (23\,,-6)$

β. $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v} = 2(3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}) - (5\vec{\alpha} - 9\vec{\beta}) = 6\vec{\alpha} - 10\vec{\beta} - 5\vec{\alpha} + 9\vec{\beta} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} = 1\cdot\vec{\alpha} + (-1)\cdot\vec{\beta}$

γ. Είναι $\overrightarrow{OK} = \vec{\beta}$, $\overrightarrow{OΛ} = \vec{w}$ και $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. Οπότε:

• $\overrightarrow{KΛ} = \overrightarrow{OΛ} - \overrightarrow{OK} = \vec{w} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$

• $\overrightarrow{ΛM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OΛ} = \vec{u} - \vec{w} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta} - \vec{\alpha} + \vec{\beta} = 2\vec{\alpha} - 4\vec{\beta} = 2(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) = 2\cdot\overrightarrow{KΛ}$

Άρα $\overrightarrow{ΛM} = 2\cdot\overrightarrow{KΛ}$, οπότε $\overrightarrow{KΛ} // \overrightarrow{ΛM}$ και αφού έχουν κοινό άκρο το $Λ$, θα έχουν τον ίδιο φορέα. Επομένως τα σημεία K , $Λ$, M είναι συνευθειακά.

5 Θέμα 2 - 16580

α. • $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\,,\, y_B - y_A) = (11-2,\, 5-4) = (9,\,1)$.

• $\overrightarrow{AΓ} = (x_Γ - x_A\,,\, y_Γ - y_A) = (3-2,\, 7-4) = (1,\,3)$.

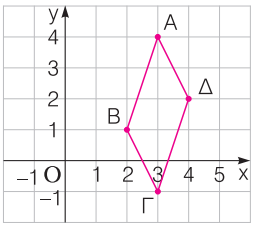
β. Είναι $\overrightarrow{AΔ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AΓ} = (9+1, 1+3) = (10,4)$.

γ. Έχουμε $\overrightarrow{AΔ} = (x_Δ - x_A\,,\, y_Δ - y_A) \Leftrightarrow (10,4) = (x_Δ - 2,\, y_Δ - 4) \Leftrightarrow \begin{cases} x_Δ - 2 = 10 \\ y_Δ - 4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_Δ = 12 \\ y_Δ = 8 \end{cases}$

Άρα $Δ(12,\,8)$.

6 Θέμα 2 - 17070

α.



β. • $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\,,\, y_B - y_A) = (2-3,\, 1-4) = (-1,\,-3)$,

• $\overrightarrow{ΔΓ} = (x_Γ - x_Δ\,,\, y_Γ - y_Δ) = (3-4,\, -1-2) = (-1,\,-3)$.

γ. Από το **β.** ερώτημα προκύπτει ότι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ΔΓ}$. Οπότε οι πλευρές AB και $ΔΓ$ του τετραπλεύρου $ΑΒΓΔ$ θα είναι ίσες και παράλληλες, άρα το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.

7 Θέμα 2 - 16581

α. • $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\,,\, y_B - y_A) = (1-(-1),\, 2-6) = (2,\,-4)$.

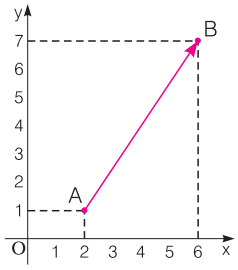
• $\overrightarrow{BΓ} = (x_Γ - x_B\,,\, y_Γ - y_B) = (3-1,\, -2-2) = (2,\,-4)$.

β. Από το ερώτημα **α.** έχουμε $\vec{AB} = \vec{B\Gamma}$. Επομένως τα διανύσματα είναι συγγραμμικά και αφού το Β είναι κοινό άκρο τα σημεία Α , Β και Γ είναι συνευθειακά.

γ. Είναι $\vec{AB} = \vec{B\Gamma}$ οπότε το Β είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

8 Θέμα 2 - 16579

α.



β. $\vec{v} = \vec{AB} = (x_B - x_A\,,\, y_B - y_A) = (6-2,\, 7-1) = (4,\, 6)$.

γ. Είναι $\vec{u} = (-8,\, -12) = (-2\cdot 4,\, -2\cdot 6) = -2\cdot(4,\, 6) = -2\cdot\vec{v}$.

Αφού $\lambda = -2 < 0$ και $\vec{u} = \lambda\cdot\vec{v}$, τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι αντίρροπα.

9 Θέμα 2 - 16147

Είναι $\vec{\alpha} = (3,\, 3\sqrt{3})$, $\vec{\beta} = (\sqrt{2},\, 0)$, $\vec{\gamma} = (0,\, -3)$ και $\vec{\delta} = (-1,\, 1)$.

α. Έχουμε $\lambda_{\vec{\alpha}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$, $\lambda_{\vec{\beta}} = \dfrac{0}{\sqrt{2}} = 0$, $\lambda_{\vec{\delta}} = \dfrac{1}{-1} = -1$

β. • Έστω ω η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με το θετικό ημιάξονα Ox . Είναι $\lambda_{\vec{\alpha}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \sqrt{3}$.
Αφού το πέρας του διανύσματος βρίσκεται στο 1° τεταρτημόριο (θετικές συντεταγμένες), είναι $\omega = 60^{\circ}$.

• Το διάνυσμα $\vec{\beta} = (\sqrt{2},\, 0)$, έχει τεταγμένη 0 , άρα $\vec{\beta} // x'x$, και επειδή το $\vec{\beta}$ έχει θετική τετμημένη σχηματίζει με το θετικό ημιάξονα Ox γωνία 0° .

• Το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (0,\, -3)$, έχει τετμημένη 0 , άρα $\vec{\gamma} // y'y$, και επειδή το $\vec{\gamma}$ έχει αρνητική τεταγμένη σχηματίζει με το θετικό ημιάξονα Ox γωνία 270° .

• Έστω φ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\delta}$ με το θετικό ημιάξονα Ox. Αφού $\lambda_{\vec{\delta}} = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\varphi = -1$.
Αφού το διάνυσμα έχει αρνητική τετμημένη και θετική τεταγμένη το πέρας του βρίσκεται στο 2° τεταρτημόριο, άρα $\varphi = 145^{\circ}$.

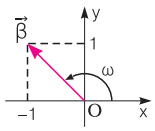
γ. • $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$

• $|\vec{\gamma}| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{0+9} = \sqrt{9} = 3$

10 Θέμα 2 - 19038

α. Έστω ω η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$. Είναι

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{1}{-1} = -1 \quad , \quad \frac{\pi}{2} < \omega < \pi$$



Άρα $\omega = \dfrac{3\pi}{4}$.

β. • $|\vec{\gamma}| = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

• $|\vec{\beta}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

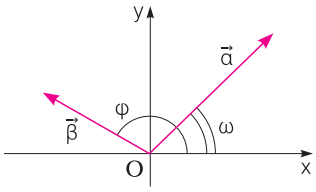
Άρα $|\vec{\gamma}| = 5|\vec{\beta}|$

γ. Είναι $\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} \Leftrightarrow (-5,\, -5) = \lambda(2,\, 3) + \mu(-1,\, 1) \Leftrightarrow (-5,\, -5) = (2\lambda - \mu,\, 3\lambda + \mu)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda-\mu=-5 \\ 3\lambda+\mu=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\lambda=-10 \\ 3\lambda+\mu=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=-2 \\ \mu=1 \end{cases}$$

Άρα $\vec{\gamma}=-2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

11 Θέμα 2 - 16151



α. Είναι $\lambda_{\vec{\alpha}}=\frac{3}{3}=1$ και $\lambda_{\vec{\beta}}=\frac{1}{-\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Έστω ω η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα $x'x$ και φ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$. Έχουμε $\varepsilon\varphi\omega=\lambda_{\vec{\alpha}}=1$ και $\varepsilon\varphi\varphi=\lambda_{\vec{\beta}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ έχει πέρας στο 1° τεταρτημόριο, άρα $\omega=45^{\circ}$ και το διάνυσμα $\vec{\beta}$ στο 2° τεταρτημόριο, άρα $\varphi=150^{\circ}$.

β. Είναι $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\varphi-\omega=150^{\circ}-45^{\circ}=105^{\circ}$

12 Θέμα 2 - 22557

α) i) Επειδή το Α είναι σημείο του θετικού ημιάξονα Oy και $(OA)=8$ θα είναι $y_A=8$, επομένως $A(0\,,8)$.

Το Ο είναι το μέσο του ΒΓ και τα Β και Γ είναι σημεία του αρνητικού και του θετικού ημιάξονα των x , αντίστοιχα.

Επειδή $(B\Gamma)=12$, θα είναι $|x_B|=|x_\Gamma|=\frac{(B\Gamma)}{2}=\frac{12}{2}=6$, επομένως $B(-6\,,0)$ και $\Gamma(6\,,0)$.

ii) Οι συντεταγμένες του μέσου Μ της πλευράς ΑΓ είναι:

$x_M=\frac{x_A+x_\Gamma}{2}=\frac{0+6}{2}=3$,

$y_M=\frac{y_A+y_\Gamma}{2}=\frac{8+0}{2}=4$,

άρα $M(3\,,4)$.

β) Το μήκος της διαμέσου ΒΜ είναι

$(BM)=\sqrt{(x_M-x_B)^2+(y_M-y_B)^2}=\sqrt{(3+6)^2+(4-0)^2}=\sqrt{97}$.

13 Θέμα 4 - 17076

α.
- $\overrightarrow{AM}=(x_M-x_A\,,\,y_M-y_A)=(x+3,\,y+1)$,
- $\overrightarrow{MB}=(x_B-x_M\,,\,y_B-y_M)=(-x,\,3-y)$,
- $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A\,,\,y_B-y_A)=(3,\,4)$.

β.
- $|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}$,
- $|\overrightarrow{MB}|=\sqrt{x^2+(y-3)^2}$,
- $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$.

γ. Έχουμε $|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}|\le|\overrightarrow{AM}|+|\overrightarrow{MB}|\Leftrightarrow|\overrightarrow{AB}|\le|\overrightarrow{AM}|+|\overrightarrow{MB}|\Leftrightarrow 5\le|\overrightarrow{AM}|+|\overrightarrow{MB}|$.

δ. Από το **γ.** ερώτημα ισχύει $|\vec{AM}|+|\vec{MB}|\ge 5$ και αντικαθιστώντας από το **β.** ερώτημα έχουμε
$\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}\ge 5$.
Οπότε δεν υπάρχει ζεύγος πραγματικών αριθμών $(x\,,\,y)$ τέτοιο ώστε να ισχύει
$\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}=4$
Άρα ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

14 Θέμα 4 - 17077

α. $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=(\lambda+1)\vec{i}+(\lambda+3)\vec{j}-2\vec{i}-\lambda\vec{j}=(\lambda+1-2)\vec{i}+(\lambda+3-\lambda)\vec{j}=(\lambda-1)\vec{i}+3\vec{j}$

β. $(AB)=|\vec{AB}|=\sqrt{(\lambda-1)^2+3^2}=\sqrt{(\lambda-1)^2+9}\,,\ \lambda\in\mathbb{R}$.

γ. $(AB)=5\Leftrightarrow\sqrt{(\lambda-1)^2+9}=5\Leftrightarrow(\lambda-1)^2+9=25\Leftrightarrow(\lambda-1)^2=16$

$\Leftrightarrow(\lambda-1)^2=4^2\Leftrightarrow(\lambda-1=4$ ή $\lambda-1=-4)\Leftrightarrow\lambda=5$ ή $\lambda=-3$.

δ. Για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ έχουμε

$(\lambda-1)^2\ge 0\Leftrightarrow(\lambda-1)^2+9\ge 9\Leftrightarrow\sqrt{(\lambda-1)^2+9}\ge\sqrt{9}\Leftrightarrow(AB)\ge 3$.

Το «=» ισχύει αν και μόνο αν $(\lambda-1)^2=0\Leftrightarrow\lambda-1=0\Leftrightarrow\lambda=1$.

Άρα, για κάθε $\lambda\ne 1$ είναι $(AB)>3$ και όταν $\lambda=1$ είναι $(AB)=3$ που είναι η μικρότερη δυνατή τιμή της.

Επομένως ο ισχυρισμός είναι αληθής.

15 Θέμα 2 - 15038

α. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\,\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=3\cdot 4\cdot\text{συν}\frac{\pi}{3}=12\cdot\frac{1}{2}=6$

β. $\vec{\alpha}^2=|\vec{\alpha}|^2=3^2=9$ και $\vec{\beta}^2=|\vec{\beta}|^2=4^2=16$.

γ. $(3\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-3\vec{\beta})=3\vec{\alpha}^2-\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}-9\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+3\vec{\beta}^2=3\vec{\alpha}^2-10\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+3\vec{\beta}^2=$

$=3\cdot 9-10\cdot 6+3\cdot 16=15$.

16 Θέμα 2 - 15463

α. $\vec{B\Gamma}=\vec{A\Gamma}-\vec{AB}=(3,-1)-(2,1)=(1,-2)$

β. $\vec{AB}\cdot\vec{B\Gamma}=(2,1)\cdot(1,-2)=2-2=0$, οπότε $\vec{AB}\perp\vec{B\Gamma}$

γ. Είναι $|\vec{B\Gamma}|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$ και $|\vec{AB}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$, οπότε $|\vec{AB}|=|\vec{B\Gamma}|$.

17 Θέμα 2 - 17075

α.
- $\vec{AB}=(x_B-x_A\,,\,y_B-y_A)=(6-2,\,0-3)=(4,-3)$
- $\vec{A\Gamma}=(x_\Gamma-x_A\,,\,y_\Gamma-y_A)=(2-2,\,1-3)=(0,-2)$

β. Είναι $\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma}=(4,-3)\cdot(0,-2)=4\cdot 0+(-3)\cdot(-2)=0+6=6$.

18 Θέμα 2 - 15996

α.
- $\vec{AB}=(8-(-6),\,7-(-1))=(14,8)$
- $\vec{B\Gamma}=(-10-8,\,6-7)=(-18,-1)$
- $\vec{AB}+\vec{B\Gamma}=\vec{A\Gamma}=(-10-(-6),\,6-(-1))=(-4,7)$

β. Είναι $\vec{A\Gamma} = \vec{AB} + \vec{B\Gamma} = (-4, 7)$.

Έχουμε $\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma} = 14 \cdot (-4) + 8 \cdot 7 = -56 + 56 = 0$.

Οπότε $\vec{AB} \perp \vec{A\Gamma}$, άρα $\hat{A} = 90^o$, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

19 Θέμα 2 - 22554

α) Είναι

i) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 6\vec{\imath} - \vec{\jmath} - (3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}) = 6\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} = 3\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$.

ii) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{5}\left(2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{5}\left(2(3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}) - (6\vec{\imath} - \vec{\jmath})\right) = \frac{1}{5}(6\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 6\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = \frac{1}{5}(5\vec{\jmath}) = \vec{\jmath}$.

β) Για τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\imath}$ και $\vec{\jmath}$ ισχύουν $\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} = 0$ και $\vec{\jmath}^2 = 1$. Επομένως,

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM} = (3\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}) \cdot \vec{\jmath} = (3\vec{\imath}) \cdot \vec{\jmath} - (3\vec{\jmath}) \cdot \vec{\jmath} = 3(\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath}) - 3 \cdot \vec{\jmath}^2 = 3 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = -3$.

20 Θέμα 2 - 15186

α. Είναι:

- $x_M = \frac{6+2}{2} = 4$ και $y_M = \frac{3+1}{2} = 2$
- $x_N = \frac{9+1}{2} = 5$ και $y_N = \frac{2-2}{2} = 0$

β. Είναι:

- $\vec{MN} = (5-4\,,\,0-2) = (1\,,\,-2)$
- $\vec{\Delta\Gamma} = \left(9-1\,,\,2-(-2)\right) = (8\,,\,4)$

γ. Έχουμε $\vec{MN} \cdot \vec{\Delta\Gamma} = (1\,,\,-2) \cdot (8\,,\,4) = 1 \cdot 8 + (-2) \cdot 4 = 8 - 8 = 0$.

Άρα $\vec{MN} \perp \vec{\Delta\Gamma}$.

21 Θέμα 2 - 14586

α. Είναι $\vec{AB} = (3-1, 4-2) = (2, 2)$ και $\vec{A\Gamma} = (5-1, -2-2) = (4, -4)$.

Οπότε $\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma} = 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-4) = 0$, άρα $\vec{AB} \perp \vec{A\Gamma}$, δηλαδή $\hat{A} = 90^o$.

β. Το Μ είναι το μέσο του ΒΓ , άρα οι συντεταγμένες του είναι $\left(\frac{3+5}{2}, \frac{-2+4}{2}\right)$, δηλαδή $M(4, 1)$.

Είναι $\vec{AM} = (4-1, 1-2) = (3, -1)$, οπότε $|\vec{AM}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$.

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στην κορυφή Α και η ΑΜ είναι η διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $(B\Gamma) = 2(AM)$ και επομένως $|\vec{B\Gamma}| = 2|\vec{AM}| = 2\sqrt{10}$.

γ. Είναι $\vec{B\Gamma} = 2\vec{M\Gamma} = 2(\vec{MA} + \vec{A\Gamma}) = -2\vec{AM} + 2\vec{A\Gamma}$.

22 Θέμα 2 - 20685

α. Είναι $\vec{AB} = \left(\beta - (-1)\,,\,0-2\right) = (\beta+1\,,\,-2)$.

Έχουμε $\vec{u} \perp \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow (1\,,\,1) \cdot (\beta+1\,,\,-2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 \cdot (\beta+1) + 1 \cdot (-2) = 0 \Leftrightarrow \beta + 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow \beta = 1$.

β. Είναι $\vec{A\Gamma} = \left(0-(-1)\,,\,\gamma-2\right) = (1\,,\,\gamma-2)$.

Έχουμε $\vec{w} \,//\, \vec{A\Gamma}$, οπότε :

$$\det(\vec{w}\,,\,\vec{A\Gamma}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -10 & 2 \\ 1 & \gamma-2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -10(\gamma-2) - 2\cdot 1 = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \gamma = \frac{9}{5}\ .$$

γ. Για $\beta = 1$ και $\gamma = \frac{9}{5}$ βρίσκουμε $\vec{AB} = (2\,,\,-2)$ και $\vec{A\Gamma} = (1\,,\,-\frac{1}{5})$.

Οπότε $\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma} = 2\cdot 1 + (-2)\cdot(-\frac{1}{5}) = 2 + \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$.

23 Θέμα 2 - 16427

α. • $\vec{AB} = (x_B - x_A\,,\,y_B - y_A) = (0+2,\,8-3) = (2,\,5)$

• $\vec{\Gamma\Delta} = (x_\Delta - x_\Gamma\,,\,y_\Delta - y_\Gamma) = (10-5,\,5-3) = (5,\,2)$

Οπότε $\vec{AB}\cdot\vec{\Gamma\Delta} = (2,\,5)\cdot(5,\,2) = 2\cdot 5 + 5\cdot 2 = 10 + 10 = 20$

β. Έστω ω η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u}$ με τον άξονα $x'x$.

Είναι $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{\Gamma\Delta} = (2,\,5) + (5,\,2) = (7,\,7)$, οπότε $\lambda_{\vec{u}} = \frac{7}{7} = 1$.

Άρα $\varepsilon\varphi\omega = \lambda_{\vec{u}} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{4}$, αφού το $\vec{u}$ έχει πέρας στο 1ο τεταρτημόριο.

24 Θέμα 2 - 15073

α. $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta} = 2\cdot(1,2) + (2,3) = (2+2, 4+3) = (4,7)$

β. $|\vec{\gamma}| = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$

γ. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} = (1,2)\cdot(4,7) = 1\cdot 4 + 2\cdot 7 = 18$

25 Θέμα 2 - 22170

α) $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ = (-1,3) – 2(-2, -$\frac{1}{2}$) = (-1,3) + (4,1) = (-1+4,3+1) = (3,4)

β) Για να είναι κάθετα τα διανύσματα θα πρέπει το εσωτερικό τους γινόμενο να είναι ίσο με μηδέν, δηλαδή $\vec{u}\cdot\vec{v}$ = 0 ή (3,4)·(x^2, x – 1) = 0 ή $3x^2$+4(x-1) = 0 ή $3x^2$+4x-4 = 0. Η διακρίνουσα είναι 64 και οι ρίζες x = $\frac{2}{3}$ και x = -2.

γ) Για να είναι τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{\beta}$ συγγραμμικά πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών τους να είναι μηδέν.

$\begin{vmatrix} x^2 & x-1 \\ -2 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0$ ή $-\frac{1}{2}x^2 - (-2)(x-1) = 0$ ή $-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 = 0$ ή x^2- 4x + 4 = 0 ή χ = 2.

26 Θέμα 2 - 20888

α. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\hat{\vec{\alpha}\,,\,\vec{\beta}}) = 4\cdot 5\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} = 20\cdot(-\frac{1}{2}) = -10$

β. Έχουμε: $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$, οπότε

$\vec{\gamma}^2 = (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})^2 \Leftrightarrow |\vec{\gamma}|^2 = 4\vec{\alpha}^2 + 12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 9\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow |\vec{\gamma}|^2 = 4|\vec{\alpha}|^2 + 12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 9|\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\vec{\gamma}|^2 = 4\cdot 4^2 + 12\cdot(-10) + 9\cdot 5^2 \Leftrightarrow |\vec{\gamma}|^2 = 64 - 120 + 225 \Leftrightarrow |\vec{\gamma}|^2 = 169 \Leftrightarrow |\vec{\gamma}| = 13$.

27 Θέμα 2 - 15825

α. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot \text{συν}(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 2\cdot 4\cdot \text{συν}\frac{\pi}{3} = 8\cdot\frac{1}{2} = 4$

β. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} = \vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|^2 - 4 = 4 - 4 = 0$

γ. Αφού $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} = 0$ και $\vec{\alpha}$, $\vec{\gamma} \neq \vec{0}$ έχουμε $\vec{\alpha} \perp \vec{\gamma}$ οπότε $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\gamma}}) = \frac{\pi}{2}$.

28 Θέμα 2 - 16428

α. $|3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| \Leftrightarrow |3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow (3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})^2 = (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9\vec{\alpha}^2 + 12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 = \vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow 16\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -8\vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -\frac{1}{2}\vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -\frac{1}{2}|\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -\frac{3}{8}$.

β. Είναι $\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|} = \frac{-\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}} = -\frac{3\cdot 4}{8\cdot\sqrt{3}} = -\frac{3}{2\cdot\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, άρα $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 150^\circ$, αφού $0^\circ \le (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) \le 180^\circ$.

29 Θέμα 2 - 14953

α. • $\vec{AB} = (7 - (-2), 8 - 5) = (9, 3)$

• $\vec{A\Gamma} = (1 - (-2), -4 - 5) = (3, -9)$

β. $\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma} = 9\cdot 3 + 3\cdot(-9) = 27 - 27 = 0$.

γ. Είναι $\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma} = 0$, οπότε $(\widehat{\vec{AB}, \vec{A\Gamma}}) = 90^\circ$, άρα $B\hat{A}\Gamma = 90^\circ$

30 Θέμα 2 - 15379

α. Είναι • $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 1\cdot 3 + 3\cdot(-1) = 3 - 3 = 0$

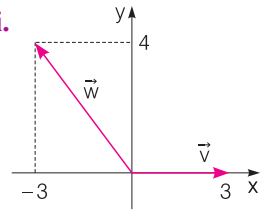
• Επειδή $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, είναι $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 90^\circ$

β. $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta} = 2(1, 3) - (3, -1) = (2, 6) - (3, -1) = (2 - 3, 6 - (-1)) = (-1, 7)$.

31 Θέμα 2 - 15317

α. Είναι $\det(\vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 0 = 12 \neq 0$, οπότε τα $\vec{v}$, $\vec{w}$ δεν είναι παράλληλα.

β. i.



ii. Είναι $\text{συν}(\widehat{\vec{v}, \vec{w}}) = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|} = \dfrac{-9+0}{\sqrt{3^2+0^2}\sqrt{(-3)^2+4^2}} = \dfrac{-9}{3\cdot 5} = -\dfrac{3}{5} < 0$, οπότε η γωνία $(\widehat{\vec{v}, \vec{w}})$ είναι αμβλεία.

32 Θέμα 2 - 16426

α. • $2\vec{\alpha} - \vec{\beta} = 2\cdot(2,-1) - (-3,2) = (4,-2) + (3,-2) = (7,-4)$

• $\vec{\alpha}\cdot(2\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = (2,-1)\cdot(7,-4) = 14 + 4 = 18$

β. Είναι $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha} = 0 \Leftrightarrow (x, y)\cdot(2,-1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y = 0 \Leftrightarrow y = 2x$.

Οπότε $\vec{\gamma} = (x, 2x)$

Έχουμε $|\vec{\gamma}| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+4x^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{5x^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow 5x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 1$.

Για $x = -1$ είναι $\vec{\gamma} = (-1,-2)$ και για $x = 1$ είναι $\vec{\gamma} = (1, 2)$

33 Θέμα 2 - 16141

α. Είναι:

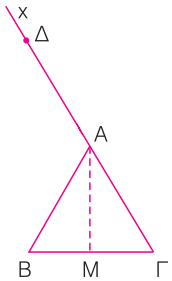
i. $(\widehat{\vec{AB}, \vec{A\Gamma}}) = 60^o$

ii. $(\widehat{\vec{AM}, \vec{B\Gamma}}) = 90^o$

iii. $(\widehat{\vec{AM}, \vec{\Gamma A}}) = x\hat{A}M = 180^o - 30^o = 150^o$, αφού η διάμεσος προς τη βάση είναι και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής.

iv. $(\widehat{\vec{BM}, \vec{\Gamma M}}) = 180^o$

v. $(\widehat{\vec{\Gamma M}, \vec{\Gamma B}}) = 0^o$



$\vec{\Gamma A} = \vec{A\Delta}$

$(\widehat{\vec{AM}, \vec{\Gamma A}}) = (\widehat{\vec{AM}, \vec{A\Delta}}) = x\hat{A}M$

β. Είναι $|\vec{AB}| = |\vec{A\Gamma}| = |\vec{B\Gamma}| = 10$ και $|\vec{M\Gamma}| = 5$.

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $AM\Gamma$ και έχουμε:

$AM^2 = A\Gamma^2 - M\Gamma^2 \Leftrightarrow AM^2 = 10^2 - 5^2 \Leftrightarrow AM^2 = 75 \Leftrightarrow AM = 5\sqrt{3}$ οπότε $|\vec{AM}| = 5\sqrt{3}$

i. Είναι $\vec{AM} \perp \vec{B\Gamma} \Leftrightarrow \vec{AM}\cdot\vec{B\Gamma} = 0$

ii. $\vec{AM}\cdot\vec{\Gamma A} = |\vec{AM}||\vec{\Gamma A}|\,\text{συν}(\widehat{\vec{AM}, \vec{\Gamma A}}) = 5\sqrt{3}\cdot 10\cdot\text{συν}150^o = 50\sqrt{3}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -75$

iii. Είναι $\vec{\Gamma M} \uparrow\uparrow \vec{\Gamma B}$, οπότε $\vec{\Gamma M}\cdot\vec{\Gamma B} = |\vec{\Gamma M}||\vec{\Gamma B}| = 5\cdot 10 = 50$.

34 Θέμα 2 - 16144

Είναι $|\vec{AB}| = |\vec{B\Gamma}| = |\vec{\Gamma\Delta}| = |\vec{\Delta A}| = 4$

α. $\vec{AB}\cdot\vec{A\Delta} = |\vec{AB}|\cdot|\vec{A\Delta}|\cdot\text{συν}|(\widehat{\vec{AB}, \vec{A\Delta}})| = 4\cdot 4\cdot\text{συν}60^o = 16\cdot\dfrac{1}{2} = 8$

β. Είναι $\vec{A\Delta} \uparrow\uparrow \vec{B\Gamma}$, οπότε $\vec{A\Delta}\cdot\vec{B\Gamma} = |\vec{A\Delta}|\cdot|\vec{B\Gamma}| = 4\cdot 4 = 16$

γ. Οι διαγώνιες $A\Gamma$ και $B\Delta$ του ρόμβου τέμνονται κάθετα. Οπότε $\vec{O\Delta} \perp \vec{AO} \Leftrightarrow \vec{O\Delta}\cdot\vec{AO} = 0$

δ. Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές αφού $AB = A\Delta = 4$ και αφού επιπλέον $\hat{A} = 60^o$, το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο. Επίσης $BO = O\Delta = 2$ και $\vec{O\Delta} \uparrow\downarrow \vec{OB}$.

Άρα $\vec{O\Delta}\cdot\vec{OB} = -|\vec{O\Delta}|\cdot|\vec{OB}| = -2\cdot 2 = -4$.

ε. Είναι: $(\widehat{\vec{A\Delta}, \vec{\Gamma\Delta}}) = 120^o$. Οπότε $\vec{A\Delta}\cdot\vec{\Gamma\Delta} = |\vec{A\Delta}|\cdot|\vec{\Gamma\Delta}|\cdot\text{συν}(\widehat{\vec{A\Delta}, \vec{\Gamma\Delta}}) = 4\cdot 4\cdot\text{συν}120^o\cdot 4\cdot 4\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -8$.

35 Θέμα 4 - 18547

α. i. Είναι: • $\vec{AB}=(\lambda,1+1)=(\lambda,2)$ και $\vec{A\Gamma}=(\lambda-2,\lambda-3+1)=(\lambda-2,\lambda-2)$

• $\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})=\begin{vmatrix}\lambda & 2\\ \lambda-2 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)-2(\lambda-2)=(\lambda-2)^2$

Πρέπει $(\lambda-2)^2\neq 0\Leftrightarrow\lambda\neq 2$.

ii. Πρέπει $\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma}=0\Leftrightarrow\lambda(\lambda-2)+2(\lambda-2)=0\Leftrightarrow(\lambda+2)(\lambda-2)=0\Leftrightarrow\lambda=2$ ή $\lambda=-2$.
Στο ερώτημα **α.i.** δείξαμε ότι για $\lambda=2$ τα σημεία A, B και Γ δεν σχηματίζουν τρίγωνο, οπότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\hat{A}=90^o$ για $\lambda=-2$.

β. Για $\lambda=-2$ είναι $\vec{AB}=(-2,2)$ και $\vec{A\Gamma}=(-4,-4)$.

i. $\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma}=0$ από το **α.ii.**

ii. Είναι $|\vec{AB}|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$ και $|\vec{A\Gamma}|=\sqrt{(-4)^2+(-4)^2}=4\sqrt{2}$, οπότε
$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}|\vec{AB}|\ |\vec{A\Gamma}|=\frac{1}{2}2\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}=8$.

36 Θέμα 4 - 15658

α. Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2\cdot 1+(-2)\cdot 1=0$, οπότε $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$.

β. i. Είναι $\vec{KA}=\vec{\alpha}\Leftrightarrow(x_A-x_K,y_A-y_K)=(2,-2)$. Οπότε:

• $x_A-x_K=2\Leftrightarrow x_A-2=2\Leftrightarrow x_A=4$

• $y_A-y_K=-2\Leftrightarrow y_A-1=-2\Leftrightarrow y_A=-1$

Άρα $A(4,-1)$.

Είναι $\vec{KB}=\vec{\beta}\Leftrightarrow(x_B-x_K,y_B-y_K)=(1,1)$. Οπότε:

• $x_B-x_K=1\Leftrightarrow x_B-2=1\Leftrightarrow x_B=3$

• $y_B-y_K=1\Leftrightarrow y_B-1=1\Leftrightarrow y_B=2$

Άρα $B(3,2)$.

ii. Είναι $\vec{AB}=(3-4,2-(-1))=(-1,3)$. Οπότε:

• $\vec{A\Gamma}=(x_\Gamma-4,y_\Gamma+1)$

• $\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ x_\Gamma-4 & y_\Gamma+1\end{vmatrix}=-y_\Gamma-1-3x_\Gamma+12=-3x_\Gamma-y_\Gamma+11$

Τα A, B, Γ, είναι συνευθειακά οπότε $\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})=0\Leftrightarrow 3x_\Gamma+y_\Gamma=11$

iii. $|\vec{K\Gamma}|=\frac{1}{2}|\vec{AB}|\Leftrightarrow(K\Gamma)=\frac{1}{2}(AB)\Leftrightarrow\sqrt{(x_\Gamma-2)^2+(y_\Gamma-1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(3-4)^2+(2+1)^2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x_\Gamma-2)^2+(y_\Gamma-1)^2=\frac{10}{4}\overset{\beta.ii.}{\Leftrightarrow}(x_\Gamma-2)^2+(10-3x_\Gamma)^2=\frac{10}{4}\Leftrightarrow x_\Gamma^2-4x_\Gamma+4+100-60x_\Gamma+9x_\Gamma^2=\frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow 10x_\Gamma^2-64x_\Gamma+104=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 20x_\Gamma^2-128x_\Gamma+203=0$

Βρίσκουμε $\Delta=144$ και ρίζες $x_\Gamma=\frac{7}{2}$ και $x_\Gamma=\frac{29}{10}$.

Είναι $x_A=4$, $x_B=3$ και πρέπει το x_Γ να είναι μεταξύ των x_A , x_B .

Οπότε $x_\Gamma = \frac{7}{2}$, αφού $\frac{29}{10} < 3$.

Επίσης $y_\Gamma = 11 - 3x_\Gamma = 11 - 3\cdot\frac{7}{2} = 11 - \frac{21}{2} = \frac{1}{2}$.

Άρα $K\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

37 Θέμα 4 - 15042

α. Με το Β ως σημείο αναφοράς, έχουμε:

$$\vec{AB} - 2\vec{AM} + \vec{A\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AB} - 2(\vec{MB} - \vec{BA}) + (\vec{B\Gamma} - \vec{BA}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AB} + 2\vec{BA} + \vec{B\Gamma} - \vec{BA} = 2\vec{BM}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{BA} + \vec{B\Gamma} = 2\vec{BM} \Leftrightarrow \vec{B\Gamma} = 2\vec{BM} \Leftrightarrow \vec{BM} = \frac{1}{2}\vec{B\Gamma}$$

Αφού $\vec{B\Gamma} \neq \vec{0}$, προκύπτει $\vec{BM} // \vec{B\Gamma}$ και αφού έχουν κοινό άκρο το Β , τα Β , Γ και είναι συνευθειακά.

β. Είναι $\vec{B\Gamma} = 2\vec{BM} \Leftrightarrow \vec{BM} + \vec{M\Gamma} = 2\vec{BM} \Leftrightarrow \vec{M\Gamma} = \vec{BM}$

Οπότε το Μ είναι το μέσο του $\vec{B\Gamma}$.

γ. i. Επειδή τα σημεία Α , Β , Γ ως κορυφές τριγώνου δεν είναι συνευθειακά, οπότε τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{AB}$, $\vec{A\Gamma}$ δεν είναι παράλληλα.

- Αν $\kappa \neq 0$, τότε $\kappa\vec{A\Gamma} = \lambda\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{A\Gamma} = \frac{\lambda}{\kappa}\vec{AB}$, δηλαδή $\vec{A\Gamma} // \vec{AB}$ που είναι άτοπο. Άρα $\kappa = 0$.
- Αν $\lambda \neq 0$, τότε $\kappa\vec{A\Gamma} = \lambda\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AB} = \frac{\kappa}{\lambda}\vec{A\Gamma}$, δηλαδή $\vec{A\Gamma} // \vec{AB}$ που είναι άτοπο. Άρα $\lambda = 0$.

Επομένως $\kappa = \lambda = 0$.

ii. Έχουμε: $\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma} = 0$ και $\vec{AM}\cdot\vec{B\Gamma} = 0$.

Οπότε τα $\vec{AB}$, $\vec{A\Gamma}$ είναι κάθετα. Επομένως, το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, με $\hat{A} = 90^\circ$.

- Η διάμεσος ΑΜ του τριγώνου είναι κάθετη στην πλευρά ΒΓ , δηλαδή είναι και ύψος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι και ισοσκελές με βάση την ΒΓ , άρα $AB = A\Gamma$.

38 Θέμα 2 - 15271

α. Ο συντελεστής διεύθυνσης είναι $\lambda = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6-2}{1+3} = 1$.

β. Η ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$ και διέρχεται από το σημείο Α (–3, 2) , οπότε έχει εξίσωση $y - 2 = 1(x+3) \Leftrightarrow y = x + 5$.

γ. Για $x = -13$ έχουμε: $y = -13 + 5 = -8 \neq y_\Gamma = -7$.

Άρα το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην ΑΒ.

39 Θέμα 2 - 15986

α. i. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι $\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$.

ii. Η ευθεία ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 2$ και διέρχεται από το σημείο Α(1, 1) , οπότε έχει εξίσωση $\varepsilon : y - 1 = 2(x-1) \Leftrightarrow y = 2x - 1$.

β. Για $y = 5$ είναι:

$5 = 2x - 1 \Leftrightarrow x = 3 \neq 2^{100}$, άρα το σημείο Γ δεν ανήκει στην (ε).

40 Θέμα 2 - 16002

α. Αν $B(x, y)$, τότε έχουμε:

- $\frac{x+5}{2}=3 \Leftrightarrow x+5=6 \Leftrightarrow x=1$
- $\frac{y+2}{2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow y+2=1 \Leftrightarrow y=-1$

Άρα $B(1,-1)$.

β. Το μήκος της πλευράς ΒΓ είναι $(B\Gamma)=\sqrt{(5-1)^2+(2+1)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$.

γ. Η ευθεία ΑΓ διέρχεται από το σημείο $A(-3,-2)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\frac{2+2}{5+3}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$,

οπότε η εξίσωσή της είναι η $y+2=\frac{1}{2}(x+3) \Leftrightarrow y+2=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

41 Θέμα 2 - 16774

α. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΒΓ είναι $\lambda_{B\Gamma}=\frac{y_\Gamma-y_B}{x_\Gamma-x_B}=\frac{-2-6}{-1-3}=\frac{-8}{-4}=2$

β. Έστω ΑΔ το ύψος από το Α. Τότε $A\Delta \perp B\Gamma$, οπότε $\lambda_{A\Delta}\lambda_{B\Gamma}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{A\Delta}\cdot 2=-1 \Leftrightarrow \lambda_{A\Delta}=-\frac{1}{2}$.

Η εξίσωση της ευθείας ΑΔ είναι:

$$y-y_A=\lambda_{A\Delta}(x-x_A) \Leftrightarrow y-5=-\frac{1}{2}(x-2) \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+1+5 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+6$$

γ. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ είναι $\lambda_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{6-5}{3-2}=\frac{1}{1}=1$

Αν ω η γωνία που σχηματίζει η ΑΒ με τον xx', έχουμε:

$\lambda_{AB}=\varepsilon\varphi\omega=1$, οπότε $\omega=\frac{\pi}{4}$, αφού $0^o \le \omega < 180^o$.

42 Θέμα 2 - 20885

α. Είναι $\lambda=\varepsilon\varphi\frac{3\pi}{4}=-1$, οπότε $\varepsilon: y-y_A=\lambda(x-x_A) \Leftrightarrow y+1=-1(x+3) \Leftrightarrow y=-x-3-1 \Leftrightarrow y=-x-4$.

β. Από την εξίσωση της ευθείας ε για $x=0$, βρίσκουμε $y=-4$ και για $y=0$ βρίσκουμε $x=-4$.

Άρα η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $K(-4,0)$ και τον $y'y$ στο $\Lambda(0,-4)$.

Το τρίγωνο είναι το ΟΚΛ, που είναι ορθογώνιο, οπότε

$$(O K\Lambda)=\frac{1}{2}(OK)\cdot(O\Lambda)=\frac{1}{2}|x_K|\cdot|y_\Lambda|=\frac{1}{2}|-4|\cdot|-4|=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4=\frac{1}{2}\cdot 16=8.$$

43 Θέμα 2 - 15027

α. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ είναι $\lambda=\frac{5-(-1)}{3-1}=\frac{6}{2}=3$.

β. Το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ έχει συντεταγμένες $\frac{1+3}{2}=2$ και $\frac{-1+5}{2}=2$ δηλαδή $M(2,2)$.

γ. Αν ε η μεσοκάθετος του ΑΒ τότε $\varepsilon \perp AB$, οπότε $\lambda_\varepsilon\cdot\lambda=-1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon\cdot 3=-1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=-\frac{1}{3}$

Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $M(2,2)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon=-\frac{1}{3}$, οπότε

$$\varepsilon: y-2=-\frac{1}{3}(x-2) \Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}+2 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}.$$

44 Θέμα 2 – 18351

α. Το μέσο M του τμήματος AB έχει συντεταγμένες $\frac{-1+3}{2}=1$, $\frac{5+3}{2}=4$, οπότε $M(1,4)$.

β. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB είναι:

$$\lambda_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{3-5}{3-(-1)}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

γ. Είναι: $\eta \perp AB \Leftrightarrow \lambda_\eta \cdot \lambda_{AB}=-1 \Leftrightarrow \lambda_\eta \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)=-1 \Leftrightarrow \lambda_\eta=2$.

Η εξίσωση της μεσοκαθέτου (η) του τμήματος AB είναι:

$$y-y_M=\lambda_\eta(x-x_M) \Leftrightarrow y-4=2(x-1) \Leftrightarrow y=2x+2$$

45 Θέμα 2 – 15044

α. i. Είναι $\lambda_{AB}=\frac{-1-5}{6-0}=-1$

ii. Είναι: • $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=3$

• $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=2$

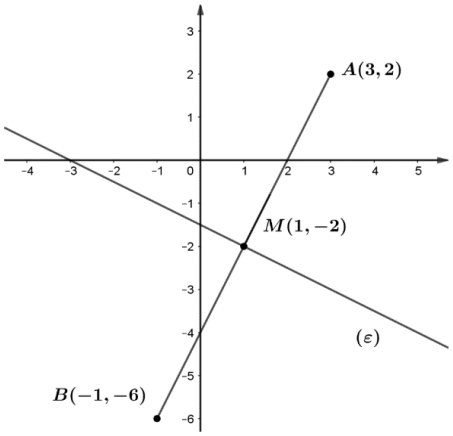
Άρα $M(3,2)$.

β. Η μεσοκάθετη ευθεία (ε) του ευθύγραμμου τμήματος AB διέρχεται από το σημείο $M(3,2)$ και είναι κάθετη στο AB. Αν η (ε) έχει κλίση λ έχουμε:

$\lambda \cdot \lambda_1=-1 \Leftrightarrow \lambda \cdot (-1)=-1 \Leftrightarrow \lambda=1$.

Άρα (ε): $y-2=1\cdot(x-3) \Leftrightarrow y=x-1$

46 Θέμα 2 – 21162



α) Το μέσο Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ έχει συντεταγμένες:

$$M\left(\frac{3+(-1)}{2},\frac{2+(-6)}{2}\right)=M(1,-2).$$

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β είναι:

$$\lambda_{AB}=\frac{2-(-6)}{3-(-1)}=\frac{8}{4}=2.$$

γ) Επειδή η ευθεία ΑΒ είναι κάθετη στην ευθεία (ε), τότε $\lambda_{AB} \cdot \lambda_{\varepsilon} = -1$.

Επιπλέον, από το β) $\lambda_{AB} = 2$ άρα:

$$2 \cdot \lambda_{\varepsilon} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} = -\frac{1}{2}.$$

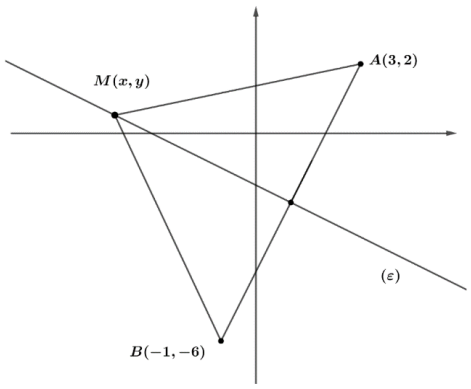
Επομένως η μεσοκάθετος (ε) του τμήματος ΑΒ έχει εξίσωση

$$y + 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Leftrightarrow x + 2y + 3 = 0.$$

Εναλλακτική λύση

Ένα σημείο Μ(x,y) ανήκει στη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ αν και μόνο αν

$$d(M,A) = d(M,B) \Leftrightarrow \sqrt{(3-x)^2 + (2-y)^2} = \sqrt{(-1-x)^2 + (-6-y)^2} \Leftrightarrow$$
$$(3-x)^2 + (2-y)^2 = (1+x)^2 + (6+y)^2 \Leftrightarrow 9 - 6x + x^2 + 4 - 4y + y^2 = 1 + 2x + x^2 + 36 + 12y + y^2 \Leftrightarrow$$
$$9 - 6x + x^2 + 4 - 4y + y^2 = 1 + 2x + x^2 + 36 + 12y + y^2 \Leftrightarrow x + 2y + 3 = 0$$



47 Θέμα 2 – 18236

α. Το σημείο Γ είναι το σημείο τομής των ε_1, ε_2 και έχει συντεταγμένες τη λύση του συστήματος.

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 4 = -\frac{1}{2}x + 2 \\ y = -x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 8 = -x + 4 \\ y = -x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$$

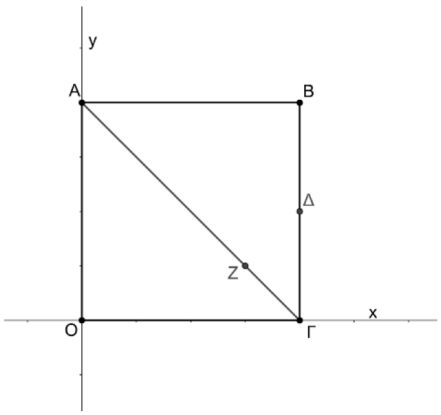
Άρα $\Gamma(4, 0)$.

β. i. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΓ είναι

$$\lambda_{A\Gamma} = \frac{0-5}{4+1} = -1$$

ii. Το ύψος ΒΔ είναι κάθετο στην πλευρά ΑΓ, οπότε $\lambda_{B\Delta} \cdot \lambda_{A\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{B\Delta} \cdot (-1) = -1 \Leftrightarrow \lambda_{B\Delta} = 1$. Επομένως η εξίσωση του ύψους ΒΔ είναι: $y - 1 = 1(x - 2) \Leftrightarrow y = x - 1$.

48 Θέμα 2 – 22173



α)

i. Οι συντεταγμένες του μέσου Δ του ΒΓ δίνονται από τους τύπους

$$x_\Delta = \frac{x_\Gamma + x_B}{2} = \frac{4+4}{2} = 4 \text{ και } y_\Delta = \frac{y_B + y_\Gamma}{2} = \frac{4+0}{2} = 2.$$

Επομένως, είναι Δ(4,2).

ii. Έστω Ζ(x,y). Τότε $\overrightarrow{AZ} = (x_Z - x_A, y_Z - y_A) = (x-0, y-4) = (x, y-4)$ και

$\overrightarrow{A\Gamma} = (x_\Gamma - x_A, y_\Gamma - y_A) = (4-0, 0-4) = (4,-4)$.

Όμως $\overrightarrow{AZ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{A\Gamma}$, άρα $(x, y-4) = \frac{3}{4}(4,-4) = (3,-3)$.

Επομένως x = 3 και y – 4 = -3, δηλαδή y = 1. Άρα, είναι Ζ(3,1).

β) Από το ερώτημα β) έχουμε ότι $\overrightarrow{AZ} = (3,-3)$.

$\overrightarrow{Z\Delta} = (x_\Delta - x_Z, y_\Delta - y_Z) = (4-3, 2-1) = (1,1)$.

$\overrightarrow{AZ} \cdot \overrightarrow{Z\Delta} = (3,3)\cdot(1,-1) = 3-3 = 0$. Επομένως τα διανύσματα είναι κάθετα. Το ίδιο θα ισχύει και για τους φορείς τους, δηλαδή ΑΓ κάθετη στην ΖΔ.

Εναλλακτική λύση:

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΖ είναι $\lambda_{AZ} = \frac{y_Z - y_A}{x_Z - x_A} = \frac{1-4}{3-0} = -1$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΖΔ είναι $\lambda_{Z\Delta} = \frac{y_\Delta - y_Z}{x_\Delta - x_Z} = \frac{2-1}{4-3} = 1$.

Επειδή $\lambda_{AZ} \cdot \lambda_{Z\Delta} = -1$, οι ευθείες ΑΖ και ΖΔ είναι κάθετες.

49 Θέμα 4 – 15029

α. Η κλίση της ευθείας ΟΑ είναι $\lambda_{OA} = \frac{\sqrt{3}-0}{1-0} = \sqrt{3}$ και επειδή διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα έχει εξίσωση $y = \sqrt{3}\cdot x$. Είναι $\varepsilon\varphi\omega = \lambda_{OA} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \sqrt{3}$, οπότε $\omega = 60^\circ$, αφού $0^\circ \le \omega < 180^\circ$.

β. Η κλίση της ευθείας ΑΒ είναι $\lambda_{AB} = \frac{\sqrt{3}-1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1-1} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ και αφού διέρχεται από το σημείο $A(1, \sqrt{3})$ έχει εξίσωση $y - \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1) \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot x + \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Είναι $\varepsilon\varphi\varphi = \lambda_{AB} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, οπότε $\varphi = 150^\circ$.

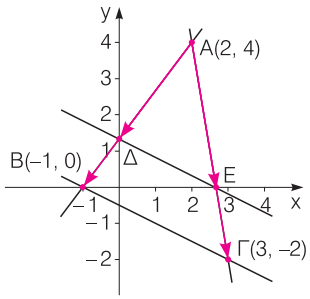
γ. Είναι $\lambda_{OA}\cdot\lambda_{AB} = \sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -1$, οπότε $OA \perp AB$, άρα το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$.

Είναι $(OA) = \sqrt{(1-0)^2 + (\sqrt{3}-0)^2} = 2$, $(AB) = \sqrt{(\sqrt{3}+1-1)^2 + (\sqrt{3}-1-\sqrt{3})^2} = 2$ οπότε $(OA) = (AB)$, άρα το τρίγωνο ΟΑΒ είναι και ισοσκελές.

δ. Αν θ η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ΟΒ με τον x΄x, είναι $\theta = \omega - A\hat{O}B = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$, αφού το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Άρα

$$\varepsilon\varphi\theta = \varepsilon\varphi 15^\circ \Leftrightarrow \lambda_{OB} = \varepsilon\varphi 15^\circ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}-1-0}{\sqrt{3}+1-0} = \varepsilon\varphi 15^\circ \Leftrightarrow \varepsilon\varphi 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

50 Θέμα 4 – 18568



α. Οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών ΑΒ και ΑΓ είναι

$\lambda_{AB}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{0-4}{-1-2}=\dfrac{4}{3}$ και $\lambda_{A\Gamma}=\dfrac{y_\Gamma-y_A}{x_\Gamma-x_A}=\dfrac{-2-4}{3-2}=\dfrac{-6}{1}=-6$.

Οπότε $\lambda_{AB}\neq\lambda_{A\Gamma}$, άρα $AB \nparallel A\Gamma$.

Άρα τα σημεία Α, Β και Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου.

β. • Η ευθεία ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\dfrac{4}{3}$ και διέρχεται από το σημείο $A(2, 4)$, οπότε η εξίσωσή της είναι $y-4=\dfrac{4}{3}(x-2)\Leftrightarrow y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{8}{3}+4\Leftrightarrow y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{4}{3}$.

• Η ευθεία ΑΓ έχει συντελεστή διεύθυνσης -6 και διέρχεται από το σημείο $\Gamma(3, -2)$, οπότε η εξίσωσή της είναι $y+2=-6(x-3)\Leftrightarrow y=-6x+18-2\Leftrightarrow y=-6x+16$

i. Στην εξίσωση της ευθείας ΑΒ ζητούμε $x=0$ και είναι $y=\dfrac{4}{3}$. Άρα $\Delta\left(0,\dfrac{4}{3}\right)$.

Στην εξίσωση της ευθείας ΑΓ θέτουμε $y=0$ και είναι $-6x+16=0\Leftrightarrow x=\dfrac{8}{3}$. Άρα $E\left(\dfrac{8}{3},0\right)$.

ii. Είναι: • $\overrightarrow{A\Delta}=\left(0-2,\dfrac{4}{3}-4\right)=\left(-2,-\dfrac{8}{3}\right)$ και $\overrightarrow{\Delta B}=\left(-1-0,0-\dfrac{4}{3}\right)=\left(-1,-\dfrac{4}{3}\right)$, οπότε

$\overrightarrow{A\Delta}=2\left(-1,-\dfrac{4}{3}\right)=2\overrightarrow{\Delta B}$

• $\overrightarrow{AE}=\left(\dfrac{8}{3}-2,0-4\right)=\left(\dfrac{2}{3},-4\right)$ και $\overrightarrow{E\Gamma}=\left(3-\dfrac{8}{3},-2-0\right)=\left(\dfrac{1}{3},-2\right)$, οπότε $\overrightarrow{AE}=2\left(\dfrac{1}{3},-2\right)=2\overrightarrow{E\Gamma}$.

γ. Είναι $\lambda_{\Delta E}=\dfrac{\frac{4}{3}-0}{0-\frac{8}{3}}=-\dfrac{1}{2}$ και $\lambda_{B\Gamma}=\dfrac{-2-0}{3+1}=-\dfrac{2}{4}=-\dfrac{1}{2}$, οπότε $\lambda_{\Delta E}=\lambda_{B\Gamma}$, άρα η ευθεία ΔΕ είναι παράλληλη της ΒΓ .

51 Θέμα 4 – 15275

α. i. Αφού η ευθεία διέρχεται από το $M(2, 1)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda\in\mathbb{R}$, η εξίσωσή της είναι $y-1=\lambda(x-2)\Leftrightarrow y=\lambda x-2\lambda+1$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

ii. Η ευθεία τέμνει και τους δυο άξονες όταν δεν είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, δηλαδή $\lambda\neq 0$ και όταν δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων, δηλαδή $-2\lambda+1\neq 0\Leftrightarrow\lambda\neq\dfrac{1}{2}$.

Άρα η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες μόνο όταν $\lambda\in\mathbb{R}-\left\{0,\dfrac{1}{2}\right\}$.

β. i. Για $y=0$ έχουμε $\lambda x-2\lambda+1=0\Leftrightarrow\lambda x=2\lambda-1\Leftrightarrow x=\dfrac{2\lambda-1}{\lambda}$, οπότε $A\left(\dfrac{2\lambda-1}{\lambda},0\right)$.

• Για $x=0$ έχουμε $y=-2\lambda+1$, οπότε $B(0,-2\lambda+1)$.

Είναι: • $(OA)=\dfrac{|2\lambda-1|}{|\lambda|}$

• $(OB)=|-2\lambda+1|=|2\lambda-1|$

ii. Η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο, όταν $(OA)=(OB)$. Είναι:

$(OA)=(OB)\Leftrightarrow\dfrac{|2\lambda-1|}{|\lambda|}=|2\lambda-1|\Leftrightarrow|2\lambda-1|(|\lambda|-1)=0\Leftrightarrow|\lambda|-1=0\Leftrightarrow\lambda=1$ ή $\lambda=-1$, αφού $\lambda\neq\dfrac{1}{2}$

iii. Αν $\lambda=-1$, τότε $(OA)=3$ και $(OB)=3$, οπότε $(OAB)=\frac{3\cdot 3}{2}=\frac{9}{2}$

Αν $\lambda=1$, τότε $(OA)=1$ και $(OB)=1$, οπότε $(OAB)=\frac{1\cdot 1}{2}=\frac{1}{2}$.

52 Θέμα 4 – 14978

α. • $d_1=(MA)=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$

• $d_2=(MB)=\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$

β. Το M ανήκει στη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, αν και μόνο αν ισαπέχει από τα άκρα του. Δηλαδή πρέπει $d_1=d_2$.

γ. Έχουμε

$d_1=d_2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2} \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y-3)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y-3)^2 \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-2y+1=x^2-6x+9+y^2-6y+9$

$\Leftrightarrow -2x-2y+2=-6x-6y+18 \Leftrightarrow x+y-4=0$

Άρα η μεσοκάθετος του AB είναι η $x+y-4=0$.

δ. Για να είναι το τρίγωνο ΣAB ισόπλευρο, πρέπει το σημείο Σ να είναι σημείο της μεσοκάθετου. Αν $\Sigma(x_\Sigma, y_\Sigma)$ τότε $x_\Sigma+y_\Sigma-4=0 \Leftrightarrow y_\Sigma=4-x_\Sigma$, οπότε $\Sigma(x_\Sigma, 4-x_\Sigma)$.

Είναι: • $(AB)=\sqrt{(1-3)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{2}$

• $(\Sigma A)=(\Sigma B)=\sqrt{(x_\Sigma-1)^2+(4-x_\Sigma-1)^2}=\sqrt{(x_\Sigma-1)^2+(x_\Sigma-3)^2}$

$=\sqrt{2x_\Sigma^2-8x_\Sigma+10}$

Πρέπει $(AB)=(\Sigma A)=(\Sigma B)$.

Οπότε $\sqrt{2x_\Sigma^2-8x_\Sigma+10}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x_\Sigma^2-4x_\Sigma+1=0$.

Βρίσκουμε $x_\Sigma=2\pm\sqrt{3}$ και $\Sigma(2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3})$ ή $\Sigma(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$.

53 Θέμα 4 – 15475

α. Η εξίσωση της ευθείας που συνδέει τα δύο εργοστάσια είναι:

$AB: y-1=\frac{3-1}{4-2}\cdot(x-2) \Leftrightarrow y-1=1\cdot(x-2) \Leftrightarrow y=x-1$

β. Το σημείο της ακτής που απέχει εξ ίσου από τα δύο εργοστάσια είναι το σημείο τομής της ευθύγραμμης ακτής με τη μεσοκάθετο της AB.

Βρίσκουμε τις συντεταγμένες του μέσου $M(x_M, y_M)$ της AB.

Είναι $x_M=\frac{2+4}{2}=3$ και $y_M=\frac{1+3}{2}=2$. Άρα $M(3,2)$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της AB είναι $\lambda=1$.

Η μεσοκάθετος ε' της AB θα έχει συντελεστή διεύθυνσης λ' για τον οποίο θα ισχύει:

$\lambda\cdot\lambda'=-1$. Άρα $\lambda'=-1$.

Οπότε $\varepsilon': y-2=-1(x-3) \Leftrightarrow y=-x+5$.

Λύνουμε το σύστημα: $\begin{cases} y=2x-7 \\ y=-x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-7=-x+5 \\ y=-x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=12 \\ y=-x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το (4, 1).

γ. Η απόσταση του καθενός από τα δύο εργοστάσια A και B από το σημείο N της ακτής είναι η ίδια. Οπότε υπολογίζουμε τη μία.

Είναι $(AN)=\sqrt{(2-4)^2+(1-1)^2}=\sqrt{2^2+0^2}=2$.

54 Θέμα 4 – 15194

α. Είναι $\lambda_{AB}=\frac{4-1}{4-1}=1$ και $\lambda_{B\Gamma}=\frac{1-4}{3-4}=3$. Αφού $\lambda_{AB}\neq\lambda_{B\Gamma}$ τα σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά, άρα σχηματίζουν τρίγωνο.

β. Για το μέσον M της $B\Gamma$ έχουμε $x_M=\frac{x_B+x_\Gamma}{2}=\frac{4+3}{2}=\frac{7}{2}$ και $y_M=\frac{y_B+y_\Gamma}{2}=\frac{4+1}{2}=\frac{5}{2}$. Άρα $M\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)$.

Η μεσοκάθετος ε είναι κάθετη στη $B\Gamma$, οπότε $\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{B\Gamma}=-1\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon\cdot 3=-1\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon=-\frac{1}{3}$

Άρα $(\varepsilon): y-\frac{5}{2}=-\frac{1}{3}\left(x-\frac{7}{2}\right)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$

γ. Το σημείο $K(x,y)$ ανήκει στην ευθεία (ε), οπότε $K\left(x,-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}\right)$.

Έχουμε

$$(KA)=(KB)\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+\left(1+\frac{1}{3}x-\frac{11}{3}\right)^2}=\sqrt{(x-4)^2+\left(4+\frac{1}{3}x-\frac{11}{3}\right)^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x-1)^2+\left(\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}\right)^2=(x-4)^2+\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)^2\Leftrightarrow(x-4)^2-(x-1)^2=\left(\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow-3(2x-5)=-3\left(\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}\right)\Leftrightarrow 2x-5=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}\Leftrightarrow 6x-15=2x-7\Leftrightarrow 4x=8\Leftrightarrow x=2$$

Οπότε $y=-\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{11}{3}=3$, δηλαδή $K(2,3)$.

Το $K(2,3)$ είναι σημείο της μεσοκάθετου του $B\Gamma$, οπότε $(KB)=(K\Gamma)$ και αφού $(KA)=(KB)$, τελικά $(KA)=(KB)=(K\Gamma)$. Άρα το σημείο K είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.

55 Θέμα 4 – 17078

α. i. AB: $y-y_B=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_B)\Leftrightarrow y-\alpha=\frac{\alpha-2\alpha}{4-3}(x-4)\Leftrightarrow y-\alpha=-\alpha(x-4)\Leftrightarrow y=-\alpha x+5\alpha$.

ii. Τα σημεία $\Gamma(\alpha+1,1-\alpha)$ και $\Delta(\alpha,1)$ ανήκουν στην ευθεία AB αν και μόνο αν οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή της, $y=-\alpha x+5\alpha$. Έχουμε:

- $1-\alpha=-\alpha(\alpha+1)+5\alpha\Leftrightarrow 1-\alpha=-\alpha^2-\alpha+5\alpha\Leftrightarrow\alpha^2-5\alpha+1=0$
- $1=-\alpha\cdot\alpha+5\alpha\Leftrightarrow 1=-\alpha^2+5\alpha\Leftrightarrow\alpha^2-5\alpha+1=0$

Βρίσκουμε $\alpha=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$.

iii.
- $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,\,y_B-y_A)=(4-3,\,\alpha-2\alpha)=(1,\,-\alpha)$
- $\overrightarrow{\Delta\Gamma}=(x_\Gamma-x_\Delta,\,y_\Gamma-y_\Delta)=(\alpha+1-\alpha,\,1-\alpha-1)=(1,\,-\alpha)$

Είναι $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ και από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι, όταν $\alpha\neq\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$ τα σημεία Γ και Δ δεν ανήκουν στην ευθεία AB. Άρα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο όταν $\alpha\neq\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$.

β. Είναι:
- $\overrightarrow{AB}=(1,\,-\alpha)$
- $\overrightarrow{A\Delta}=(x_\Delta-x_A,\,y_\Delta-y_A)=(\alpha-3,\,1-2\alpha)$

Για να είναι τετράγωνο, αρχικά θα έπρεπε να είναι ρόμβος, οπότε

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A\Delta}| \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \sqrt{1+\alpha^2} = \sqrt{5\alpha^2 - 10\alpha + 10} \Leftrightarrow 5\alpha^2 - 10\alpha + 10 = 1 + \alpha^2 \Leftrightarrow 4\alpha^2 - 10\alpha + 9 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = (-10)^2 - 4\cdot 4\cdot 9 = -44 < 0$, άρα δεν έχει πραγματικές ρίζες. Οπότε δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι τετράγωνο. Επομένως ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

56 Θέμα 4 - 21160

α. Επειδή τα τετράπλευρα ΟΒΔΕ και ΟΓΖΗ είναι τετράγωνα, οι συντεταγμένες των κορυφών τους είναι: $\Delta(\kappa, -\kappa)$, $E(0, -\kappa)$, $Z(-2\kappa, 2\kappa)$ και $H(-2\kappa, 0)$.

• Η εξίσωση της ευθείας ΓΔ είναι:

$$y - y_\Delta = \frac{y_\Delta - y_\Gamma}{x_\Delta - x_\Gamma}(x - x_\Delta) \Leftrightarrow y + \kappa = \frac{-\kappa - 2\kappa}{\kappa - 0}(x - \kappa) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y + \kappa = -3(x - \kappa) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 3x + y - 2\kappa = 0 .$$

• Η εξίσωση της ευθείας ΒΖ είναι:

$$y - y_Z = \frac{y_Z - y_B}{x_Z - x_B}(x - x_Z) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 2x + 3y - 2\kappa = 0 .$$

β. Η ευθεία (ε) του ύψους από την κορυφή $O(0, 0)$ του τριγώνου ΟΒΓ , είναι κάθετη στην πλευρά ΒΓ.

Είναι: $\lambda_{B\Gamma} = \dfrac{2\kappa - 0}{0 - \kappa} = -2$, οπότε $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \dfrac{1}{2}$.

Άρα $\varepsilon : y = \dfrac{1}{2}x$.

γ. • Οι συντεταγμένες του σημείου τομής Μ των ευθειών (ε) και ΓΔ είναι η λύση συστήματος:

$$\begin{cases} 3x + y - 2\kappa = 0 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{1}{2}x - 2\kappa = 0 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{7}\kappa \\ y = \frac{2}{7}\kappa \end{cases} , \quad \text{άρα } M\left(\frac{4}{7}\kappa , \frac{2}{7}\kappa\right).$$

• Οι συντεταγμένες του Μ την επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας ΒΖ, αφού

$$2\cdot\frac{4}{7}\kappa + 3\cdot\frac{2}{7}\kappa - 2\kappa = \frac{8}{7}\kappa + \frac{6}{7}\kappa - 2\kappa = \frac{14}{7}\kappa - 2\kappa = 2\kappa - 2\kappa = 0 .$$

Άρα οι ευθείες ΓΔ , ΒΖ και η ευθεία (ε) διέρχονται από το ίδιο σημείο.

57 Θέμα 2 – 15657

α. Οι συντεταγμένες του Μ είναι η λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 2y = -2(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 6 \\ -2x + 4y = 4 \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 5y = 10 \\ x - 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Άρα $M(2, 2)$.

β. Είναι $3\cdot 2 - 2 = 4$ οπότε οι ευθείες ε_1 , ε_2 και ε_3 διέρχονται από το ίδιο σημείο.

58 Θέμα 2 – 16766

α. • Η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση $x - 3y - 4 = 0$ και συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = -\dfrac{1}{-3} = \dfrac{1}{3}$.

• Η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση $9x + 3y - 6 = 0$

και συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2 = -\dfrac{9}{3} = -3$.

Είναι $\lambda_1\lambda_2 = \dfrac{1}{3}(-3) = -1$, οπότε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες.

β. Το σύστημα των εξισώσεων των (ε_1), (ε_2):

$$\begin{cases} x-3y=4 \\ 9x+3y=6 \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 10x=10 \\ x-3y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases},$$

έχει λύση το ζεύγος $(1,-1)$. Άρα $A(1,-1)$.

γ. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(1,-1)$ και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση $x = 1$.

59 Θέμα 2 – 22171

α) Για να βρούμε το σημείο τομής λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων.

$\begin{cases} 3x-y=5 \\ x=y-1 \end{cases}$. Στην 1η αντικαθιστούμε το x με y – 1. $\begin{cases} 3(y-1)-y=5 \\ x=y-1 \end{cases}$ ή $\begin{cases} 3y-3-y=5 \\ x=y-1 \end{cases}$ ή

$\begin{cases} 2y=8 \\ x=y-1 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y=4 \\ x=4-1=3 \end{cases}$. Επομένως το σημείο τομής είναι το M(3,4).

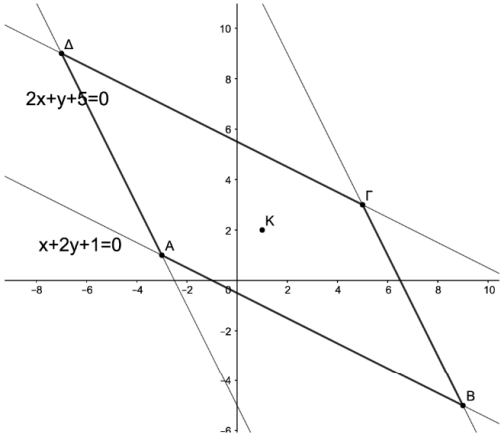
β) Η ζητούμενη ευθεία είναι κάθετη στην (ε_2), οπότε το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσής της ζητούμενης ευθείας και της (ε_2) θα είναι -1. Ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε_2) είναι $\lambda_2 = -\frac{A}{B} = -\frac{1}{-1} = 1$.

Επομένως ο συντελεστής διεύθυνσης της ζητούμενης ευθείας θα είναι -1.

Η ευθεία διέρχεται από το M(3,4), οπότε η εξίσωση θα είναι $y-y_o = \lambda(x-x_o)$ ή $y - 4 = -1(x-3)$ ή $y = -x + 7$.

γ) Ένα διάνυσμα παράλληλο στην $Ax+By+\Gamma = 0$ είναι το $\vec{\delta} = (B,-A)$, οπότε για την ευθεία $3x - y - 5 = 0$ ένα διάνυσμα παράλληλο σε αυτήν είναι το $\vec{\delta} = (-1,-3)$.

60 Θέμα 2 – 22071



α)

i. Έστω ΑΒΓΔ το παραλληλόγραμμο στο οποίο είναι ΑΒ: x+2y+1=0 και ΑΔ: 2x+y+5=0.

Το σημείο τομής των ευθειών ΑΒ και ΑΔ είναι το σημείο Α, του οποίου οι συντεταγμένες προκύπτουν από τη λύση του παρακάτω συστήματος.

$$(\Sigma): \begin{cases} x+2y+1=0 \\ 2x+y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-4y-2=0 \\ 2x+y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y+3=0 \\ 2x+y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=-3 \end{cases}$$

Άρα A(-3, 1).

ii. Το σημείο Κ είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου, οπότε είναι το μέσο του τμήματος ΑΓ. Αν Γ($x_Γ$,$y_Γ$), τότε για το σημείο Κ έχουμε, $K\left(\frac{-3+x_Γ}{2},\frac{1+y_Γ}{2}\right)$. Όμως οι συντεταγμένες του Κ είναι (1,2), οπότε $\frac{-3+x_Γ}{2}=1 \Leftrightarrow x_Γ=5$ και $\frac{1+y_Γ}{2}=2 \Leftrightarrow y_Γ=3$.

Άρα Γ(5,3).

β) Η πλευρά ΒΓ διέρχεται από το σημείο Γ(5,3) και ΒΓ//ΑΔ. Η εξίσωση της ευθείας ΑΔ είναι: 2x+y+5=0 με $λ_{ΑΔ}$ = -2. Άρα $λ_{ΒΓ}$ = - 2, οπότε η εξίσωση της ΒΓ είναι

ΒΓ: $y-y_Γ=-2(x-x_Γ)$ ή $y-3=-2\cdot(x-5) \Leftrightarrow 2x+y-13=0$.

Η πλευρά ΓΔ διέρχεται από το Γ(5,3) και ΓΔ//ΑΒ. Η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι x+2y+1=0 με $λ_{ΑΒ}=-\frac{1}{2}$. Άρα $λ_{ΓΔ}=-\frac{1}{2}$, οπότε η εξίσωση της ΓΔ είναι:

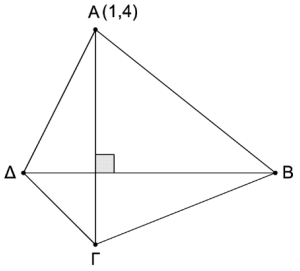
ΓΔ: $y-y_Γ=-\frac{1}{2}(x-x_Γ)$ ή $y-3=-\frac{1}{2}(x-5) \Leftrightarrow x+2y-11=0$

61 Θέμα 2 – 22092

α) Οι συντεταγμένες της κορυφής Δ προσδιορίζονται από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων των ευθειών ΑΔ και ΒΔ που διέρχονται από το σημείο αυτό.

$$\begin{cases}3x-2y+5=0\\ y=x+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x-2(x+2)+5=0\\ y=x+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x-2x-4+5=0\\ y=x+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ y=1\end{cases}.$$

Άρα $\Delta(-1,1)$.



β) Οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται κάθετα, οπότε οι συντελεστές διεύθυνσης $λ_{ΑΓ}$, $λ_{ΒΔ}$ των διαγωνίων έχουν γινόμενο ίσο με -1, δηλαδή $λ_{ΑΓ}\cdot λ_{ΒΔ}=-1$. Όμως από την εξίσωση της διαγωνίου ΒΔ προκύπτει ότι $λ_{ΒΔ}=1$, άρα $λ_{ΑΓ}=-1$.

Η εξίσωση της διαγωνίου ΑΓ είναι

$$y-y_Α=λ_{ΑΓ}(x-x_Α) \text{ ή } y-4=-1(x-1) \Leftrightarrow x+y-5=0.$$

62 Θέμα 2 – 21964

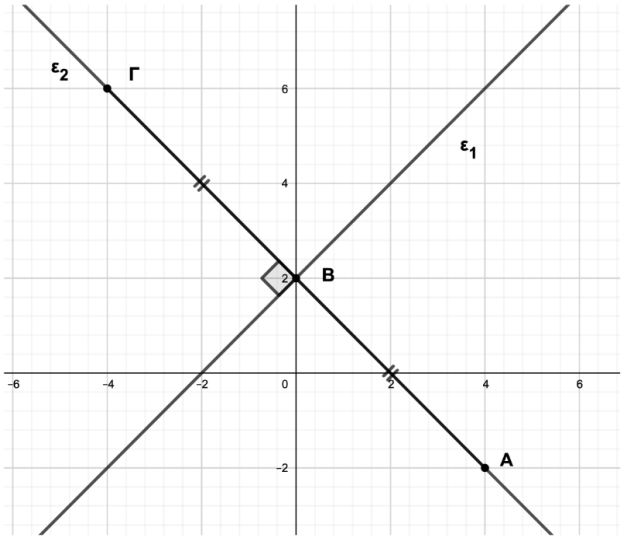
α) Η ευθεία ($ε_1$) έχει εξίσωση: y = x + 2, συνεπώς συντελεστή διεύθυνσης $λ_1$ = 1. Η ευθεία ($ε_2$) είναι κάθετη στην ευθεία $ε_1$, συνεπώς το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των δύο ευθειών θα ισούται με -1, άρα $λ_2$ = -1. Επιπλέον η ευθεία ($ε_2$) διέρχεται από το σημείο Α, άρα η εξίσωσή της θα είναι:

$y-y_A=λ_2\cdot(x-x_A)$ ή $y-(-2)=-1\cdot(x-4)$ ή $y+2=-x+4$ ή $y=-x+2$. Άρα η εξίσωση της ευθείας ($ε_2$) είναι: y = -x + 2.

β) οι συντεταγμένες του σημείου τομής Β, των δύο ευθειών (ε_1) και (ε_2) θα προκύψει από τη λύση του συστήματος: $\begin{cases} y = x+2 \\ y = -x+2 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y = x+2 \\ x+2 = -x+2 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y = x+2 \\ 2x = 0 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases}$. Άρα Β(0,2).

γ) Αν Γ το συμμετρικό του Α ως προς το Β τότε τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά και μάλιστα το Β είναι το μέσο του τμήματος ΑΓ, άρα θα ισχύει:

$\begin{cases} x_B = \frac{x_A+x_\Gamma}{2} \\ y_B = \frac{y_A+y_\Gamma}{2} \end{cases}$ ή $\begin{cases} 0 = \frac{4+x_\Gamma}{2} \\ 2 = \frac{-2+y_\Gamma}{2} \end{cases}$ ή $\begin{cases} x_\Gamma = -4 \\ y_\Gamma = 6 \end{cases}$. Οπότε το συμμετρικό του σημείο Α ως προς την ευθεία (ε1) είναι το σημείο Γ(-4,6).



63 Θέμα 2 – 21662

α. Έστω A' το συμμετρικό του A ως προς το B. Τότε το σημείο B θα είναι το μέσο του AA'.

Είναι: • $x_B = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Leftrightarrow x_{A'} = 2x_B - x_A = 2\cdot(-3)-(-5) = -6+5 = -1$ και

• $y_B = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Leftrightarrow y_{A'} = 2y_B - y_A = 2\cdot 5 - 1 = 10-1 = 9$

Άρα $A'(-1, 9)$.

β. i. Είναι $\lambda_\varepsilon = -\frac{A}{B} = -\frac{-1}{1} = 1$ και $\varepsilon' \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon'}\cdot\lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon'}\cdot 1 = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon'} = -1$.

Οπότε $\varepsilon' : y - y_B = \lambda_{\varepsilon'}(x - x_B) \Leftrightarrow y - 5 = -1\cdot(x+3) \Leftrightarrow y = -x+2$.

ii. Έστω M το σημείο τομής των ευθειών ε, ε'. Οι συντεταγμένες του M είναι η λύση του συστήματος

$\begin{cases} -x+y=2 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=4 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$, άρα $M(0, 2)$.

iii. Αν B' είναι το συμμετρικό του B ως προς την ευθεία ε, τότε το B' είναι σημείο της ευθείας ε' και το M θα είναι το μέσο του BB' οπότε:

• $x_M = \frac{x_B + x_{B'}}{2} \Leftrightarrow x_{B'} = 2x_M - x_B = 2\cdot 0 - (-3) = 3$ και

• $y_M = \frac{y_B + y_{B'}}{2} \Leftrightarrow y_{B'} = 2y_M - y_B = 2\cdot 2 - 5 = -1$

Άρα $B'(3, -1)$.

64 Θέμα 4 – 22072

α) Η εξίσωση (1): $\lambda x+(\lambda-1)y-4=0$ αποτελεί εξίσωση ευθείας αν και μόνο αν $\begin{cases}\lambda\neq 0\\ \text{ή}\\ \lambda-1\neq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda\neq 0\\ \text{ή}\\ \lambda\neq 1\end{cases}$. Άρα επειδή δεν υπάρχει τιμή του λ για την οποία να μηδενίζεται και ο συντελεστής του x και ο συντελεστής του y, η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του $\lambda\in R$.

Ομοίως η εξίσωση (2): $(3\lambda+1)x-2\lambda y-7=0$ αποτελεί εξίσωση ευθείας αν και μόνο αν

$\begin{cases}3\lambda+1\neq 0\\ \text{ή}\\ -2\lambda\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda\neq -\frac{1}{3}\\ \text{ή}\\ \lambda\neq 0\end{cases}$. Επίσης δεν υπάρχει τιμή του λ για την οποία να μηδενίζεται και ο συντελεστής του x και ο συντελεστής του y, η εξίσωση (2) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του $\lambda\in R$.

β) Έστω $\overrightarrow{\delta_1}=(\lambda-1,-\lambda)$ ένα διάνυσμα παράλληλο στην ευθεία με εξίσωση την

$$\lambda x+(\lambda-1)y-4=0 \text{ και}$$

$\overrightarrow{\delta_2}=(-2\lambda,-3\lambda-1)$ ένα διάνυσμα παράλληλο στην ευθεία με εξίσωση την

$$(3\lambda+1)x-2\lambda y-7=0.$$

Οι ευθείες με εξισώσεις (1) και (2) είναι κάθετες αν και μόνο αν:

$$\overrightarrow{\delta_1}\perp\overrightarrow{\delta_2}\Leftrightarrow\overrightarrow{\delta_1}\cdot\overrightarrow{\delta_2}=0$$

$$\Leftrightarrow(\lambda-1)(-2\lambda)-\lambda(-3\lambda-1)=0$$

$$\Leftrightarrow -2\lambda^2+2\lambda+3\lambda^2+\lambda=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2+3\lambda=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda(\lambda+3)=0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda=0 \text{ ή } \lambda=-3)$$

65 Θέμα 4 – 15253

α. Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $Ax+By+\Gamma=0$, όπου $A=\mu^2-1$, $B=3\mu^2-2\mu-1$, $\Gamma=-5\mu^2+4\mu+1$.

Είναι: • $A=0\Leftrightarrow\mu^2-1=0\Leftrightarrow\mu=1$ ή $\mu=-1$

• $B=0\Leftrightarrow 3\mu^2-2\mu-1=0\Leftrightarrow\mu=1$ ή $\mu=-\frac{1}{3}$

Άρα η (1) παριστάνει ευθεία για $\mu\neq 1$.

β. i. $A=0\Leftrightarrow\mu=1$ ή $\mu=-1$. Όμως η τιμή $\mu=1$ απορρίπτεται από το **α.** οπότε $\mu=-1$.

ii. $B=0\Leftrightarrow\mu=1$ ή $\mu=-\frac{1}{3}$. Όμως η τιμή $\mu=1$ απορρίπτεται από το **α.** οπότε $\mu=-\frac{1}{3}$.

iii. $\Gamma=0\Leftrightarrow -5\mu^2+4\mu+1=0\Leftrightarrow\mu=1$ ή $\mu=-\frac{1}{5}$. Όμως η τιμή $\mu=1$ απορρίπτεται από το **α.** οπότε $\mu=-\frac{1}{5}$.

γ. Για $\mu=-1$ έχουμε την ε_1: $4y-8=0\Leftrightarrow y=2$.

Για $\mu=0$ έχουμε την ε_2: $-x-y+1=0$.

Οι ε_1 και ε_2 τέμνονται στο σημείο M με συντεταγμένες τη λύση του συστήματος $\begin{cases} y=2 \\ -x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=-1 \end{cases}$

οπότε $M(-1, 2)$.

Οι συντεταγμένες του M επαληθεύουν την (1) για κάθε τιμή του μ αφού

$(\mu^2-1)\cdot(-1)+(3\mu^2-2\mu-1)\cdot 2-5\mu^2+4\mu+1=-\mu^2+1+6\mu^2-4\mu-2-5\mu^2+4\mu+1=0$

Άρα όλες οι ευθείες που προκύπτουν από την (1), διέρχονται από το σταθερό σημείο $M(-1, 2)$.

66 Θέμα 4 – 15439

α. i. Είναι $A\Pi \perp \varepsilon$ και $\lambda_\varepsilon = -\frac{1}{1} = -1$, οπότε $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{A\Pi} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{A\Pi} = 1$

Άρα $A\Pi : y-3 = 1(x-2) \Leftrightarrow y = x+1$.

Οι συντεταγμένες του σημείου Π έχουν συντεταγμένες τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y=x+1 \\ x+y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ 2x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-1 \end{cases}$$

Άρα $\Pi(-1, 0)$.

ii. Το Π είναι το μέσον του AA' , οπότε

$$\begin{cases} \frac{x_{A'}+2}{2} = -1 \\ \frac{y_{A'}+3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-3 \end{cases} \text{ άρα } A'(-4, -3)$$

β. i. Είναι $\varepsilon_2 : y-1 = \frac{-3-1}{-4-1}(x-1) \Leftrightarrow 4x-5y+1=0$.

ii. Οι συντεταγμένες του σημείου Σ είναι η λύση του συστήματος των εξισώσεων των ευθειών ε και ε_2 .

Είναι:

$$(-4)\cdot\begin{cases} y+x+1=0 \\ 4x-5y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x-4y-4=0 \\ 4x-5y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1=0 \\ -9y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{1}{3}+1=0 \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{2}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases}, \text{ οπότε } \Sigma\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

γ. Η ε_1 διέρχεται από τα σημεία $A(2, 3)$ και $\Sigma\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, οπότε

$$\varepsilon_1 : y-3 = \frac{3+\frac{1}{3}}{2+\frac{2}{3}}(x-2) \Leftrightarrow 5x-4y+2=0$$

67 Θέμα 4 – 16003

α. Για $\alpha=0$ έχουμε $\varepsilon_0 : -4x+4=0 \Leftrightarrow x=1$, ενώ για $\alpha=4$ έχουμε $\varepsilon_4 : -8y+8=0 \Leftrightarrow y=1$.

Το κοινό τους σημείο έχει συντεταγμένες τη λύση του συστήματος: $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

Άρα οι ευθείες ε_0 , ε_4 έχουν κοινό σημείο $M(1, 1)$.

β. Αρκεί να αποδείξουμε ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από το σημείο $M(1, 1)$. Για $x=y=1$ η αρχική εξίσωση γράφεται: $\alpha-4-2\alpha+\alpha+4=0 \Leftrightarrow 0\cdot\alpha=0$, που ισχύει για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ και προφανώς ισχύει. Άρα, όλες οι ευθείες της οικογένειας διέρχονται από το σημείο M.

γ. i. • Οι ευθείες που προκύπτουν για $\alpha=4$ και $\alpha=0$ είναι οι $y=1$ και $x=1$ που δεν τέμνουν και τους δυο άξονες αφού η πρώτη είναι παράλληλη στον $x'x$ και η δεύτερη κάθετη στον $x'x$. Έτσι, βρίσκουμε τα κοινά σημεία των ευθειών της οικογένειας με τους άξονες, όταν $\alpha \neq 0$ και $\alpha \neq 4$.

Για $x=0$ έχουμε: $y=\frac{\alpha+4}{2\alpha}$, ενώ για $y=0$ έχουμε $x=-\frac{\alpha+4}{\alpha-4}$, οπότε τα κοινά σημεία της ε_α με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι τα $A\left(\frac{\alpha+4}{4-\alpha},0\right)$ και $B\left(0,\frac{\alpha+4}{2\alpha}\right)$ αντίστοιχα. Τα σημεία Α και Β βρίσκονται στους θετικούς ημιάξονες, μόνο όταν: $\frac{\alpha+4}{4-\alpha}>0$, (1) και $\frac{\alpha+4}{2\alpha}>0$, (2) . Είναι:

$(1)\Leftrightarrow(\alpha+4)(4-\alpha)>0\Leftrightarrow(\alpha-4)(\alpha+4)<0\Leftrightarrow-4<\alpha<4$, με $\alpha\neq0$

$(2)\Leftrightarrow2\alpha(\alpha+4)>0\Leftrightarrow\alpha(\alpha+4)>0\Leftrightarrow\alpha<-4$ ή $\alpha>0$, με $\alpha\neq4$

Η συναλήθευση των δυο αποτελεσμάτων δίνει $0<\alpha<4$ που είναι το ζητούμενο.

ii. Όταν $0<\alpha<4$, τα σημεία Α, Β είναι στους θετικούς ημιάξονες, οπότε $(OA)=\frac{\alpha+4}{4-\alpha}$ και $(OB)=\frac{\alpha+4}{2\alpha}$.

Έχουμε $(OA)=2(OB)\Leftrightarrow\frac{\alpha+4}{4-\alpha}=2\frac{\alpha+4}{2\alpha}\Leftrightarrow\alpha=4-\alpha\Leftrightarrow\alpha=2$.

68 Θέμα 4 – 16477

α. i. Όλες οι φωτεινές ακτίνες που παριστάνει η εξίσωση ε_λ διέρχονται από το φάρο Φ .

Οπότε οι συντεταγμένες του $\Phi(x_\Phi, y_\Phi)$ επαληθεύουν την εξίσωση της ε_λ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. Δηλαδή είναι:

$\lambda x_\Phi+(1-\lambda)y_\Phi+2=0\Leftrightarrow\lambda x_\Phi+y_\Phi-\lambda y_\Phi+2=0\Leftrightarrow(x_\Phi-y_\Phi)\lambda+y_\Phi+2=0\Leftrightarrow(x_\Phi-y_\Phi)\lambda=-y_\Phi-2$, $\lambda\in\mathbb{R}$

Πρέπει: $\begin{cases}x_\Phi-y_\Phi=0\\ \text{και}\\ -y_\Phi-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_\Phi=-2\\ \text{και}\\ y_\Phi=-2\end{cases}$. Άρα $\Phi(-2,-2)$.

ii. Έστω ότι υπάρχει φωτεινή ακτίνα που εκπέμπεται από το φάρο προς το αγκυροβολημένο πλοίο. Τότε οι συντεταγμένες του $O(0,0)$ επαληθεύουν την εξίσωση της ε_λ .

Έχουμε $\lambda\cdot0+(1-\lambda)\cdot0+2=0\Leftrightarrow2=0$, που είναι άτοπο.

Άρα δεν υπάρχει φωτεινή ακτίνα που εκπέμπεται από το φάρο προς το αγκυροβολημένο πλοίο.

β. Έστω $P(x_P, y_P)$. Είναι $y_P>y_\Phi\Leftrightarrow y_P>-2$, αφού το ρυμουλκό πλοίο Ρ βρίσκεται βόρεια του φάρου Φ .

Επειδή το Ρ ανήκει στην ευθεία $x+y+4=0$ ισχύει $x_P+y_P+4=0\Leftrightarrow x_P=-4-y_P$. Οπότε $P(-4-y_P, y_P)$ με $y_P>-2$.

Έχουμε $(PO)=4\Leftrightarrow\sqrt{(x_O-x_P)^2+(y_O-y_P)^2}=4\Leftrightarrow\sqrt{(0-(-4-y_P))^2+(0-y_P)^2}=4$

$\Leftrightarrow\sqrt{(4+y_P)^2+y_P^2}=4\Leftrightarrow\sqrt{2y_P^2+8y_P+16}=4$

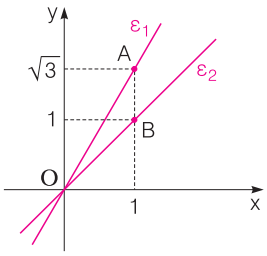
$\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\sqrt{2y_P^2+8y_P}=0\Leftrightarrow2y_P(y_P+4)=0\Leftrightarrow y_P=0$ ή $y_P=-4$

Δεκτή είναι μόνο η $y_P=0>-2$ αφού $-4<-2$.

Άρα $P(-4,0)$.

69 Θέμα 4 – 18244

α. Οι ε_1 , ε_2 διέρχονται από την αρχή των αξόνων και από τα σημεία $A(1,\sqrt{3})$ $B(1,1)$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



β. Η ε_1 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\sqrt{3}$ οπότε σχηματίζει με τον xx' γωνία 60° , ενώ η ε_2 έχει συντελεστή διεύθυνσης 1 οπότε σχηματίζει με τον xx' γωνία 45° .

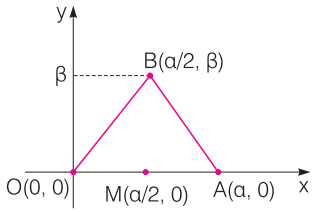
γ. Όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, η οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 , ε_2 είναι η διαφορά των γωνιών που σχηματίζει η κάθε μία από τις ε_1 , ε_2 με τον xx' , δηλαδή $60^\circ-45^\circ=15^\circ$.

δ. Το $\vec{\delta}_1=(1,\sqrt{3})$ είναι παράλληλο στην ευθεία ε_1 και το $\vec{\delta}_2=(1,1)$ είναι παράλληλο στην ευθεία ε_2. Είναι $|\vec{\delta}_1|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$,

$|\vec{\delta}_2|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ και $\vec{\delta}_1\cdot\vec{\delta}_2=(1,\sqrt{3})\cdot(1,1)=1+\sqrt{3}$, οπότε $\text{συν}15^o=\text{συν}(\widehat{\vec{\delta}_1,\vec{\delta}_2})=\dfrac{\vec{\delta}_1\cdot\vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1|\cdot|\vec{\delta}_2|}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

70 Θέμα 4 – 15681

α. Αφού $\beta\neq 0$ τα σημεία Ο, Α, Β δεν είναι συνευθειακά. Τα σημεία φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



$$(OB)=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}-0\right)^2+(\beta-0)^2}=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\beta^2} \quad \text{και}$$

$$(AB)=-\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}-\alpha\right)^2+(\beta-0)^2}=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\beta^2}$$

Οπότε το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές με βάση την ΟΑ.

Είναι $\dfrac{x_O+x_A}{2}=\dfrac{0+\alpha}{2}=\dfrac{\alpha}{2}=x_M$ και $\dfrac{y_O+y_A}{2}=0=y_M$ το μέσο του ΟΑ είναι το σημείο $M\left(\dfrac{\alpha}{2},0\right)$.

β. Είναι: • ΟΒ: $y-0=\dfrac{\beta-0}{\frac{\alpha}{2}-0}\cdot(x-0)\Leftrightarrow y=\dfrac{2\beta}{\alpha}\cdot x\Leftrightarrow 2\beta x-\alpha y=0$

• ΑΒ: $y-0=\dfrac{\beta-0}{\frac{\alpha}{2}-\alpha}\cdot(x-\alpha)\Leftrightarrow y=\dfrac{\beta}{-\frac{\alpha}{2}}\cdot(x-\alpha)\Leftrightarrow y=-\dfrac{2\beta}{\alpha}\cdot(x-\alpha)\Leftrightarrow 2\beta x+\alpha y-2\alpha\beta=0$

γ. • $d_1=\dfrac{\left|2\beta\frac{\alpha}{\beta}-\alpha\cdot 0\right|}{\sqrt{(2\beta)^2+\alpha^2}}\overset{\alpha,\beta>0}{=}\dfrac{|\alpha\beta|}{\sqrt{4\beta^2+\alpha^2}}$ και

• $d_2=\dfrac{\left|2\beta\frac{\alpha}{2}+\alpha\cdot 0-2\alpha\beta\right|}{\sqrt{(2\beta)^2+\alpha^2}}=\dfrac{|-\alpha\beta|}{\sqrt{4\beta^2+\alpha^2}}\overset{\alpha,\beta>0}{=}\dfrac{\alpha\beta}{\sqrt{4\beta^2+\alpha^2}}$ οπότε πράγματι $d_1=d_2$.

Άρα $d_1=d_2$.

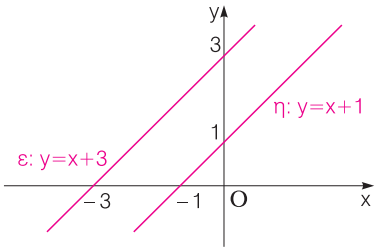
δ. Η πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που αποδείχθηκε είναι η εξής: Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο, το μέσο της βάσης ισαπέχει από τις ίσες πλευρές.

71 Θέμα 2 – 18240

α. Είναι (ε): $y=x+3\Leftrightarrow x-y+3=0$, οπότε $\delta(A,\varepsilon)=\dfrac{|1-2+3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

β. Είναι $\eta//\varepsilon$, οπότε $\lambda_\eta=\lambda_\varepsilon=1$ και αφού η (η) διέρχεται από το Α(1, 2) θα έχει εξίσωση $y-2=1\cdot(x-1)\Leftrightarrow y=x+1$.

γ. Οι ευθείες (η), (ε) φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



72 Θέμα 2 – 16759

α. Η (ε_1) έχει εξίσωση $x-2y+1=0$ και συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1=-\dfrac{A}{B}=-\dfrac{1}{-2}=\dfrac{1}{2}$.

Η (ε_2) έχει εξίσωση $2x+y-4=0$ και συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2=-\dfrac{A}{B}=-\dfrac{2}{1}=-2$.

Οπότε $\lambda_1\lambda_2=\dfrac{1}{2}(-2)=-1$, δηλαδή οι (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες.

β. Το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2) έχει συντεταγμένες τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} x-2y=-1 \\ 2x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-1 \\ 2(2y-1)+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7}{5} \\ y=\dfrac{6}{5} \end{cases}$$

Άρα οι (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο $A\left(\dfrac{7}{5}, \dfrac{6}{5}\right)$.

γ. Είναι (ε_3): $0\cdot x+1\cdot y+1=0$, οπότε $d(A, \varepsilon_3)=\dfrac{\left|0\cdot\frac{7}{5}+\frac{6}{5}+1\right|}{\sqrt{0^2+1^2}}=\dfrac{11}{5}$.

73 Θέμα 2 - 18979

α. Οι ευθείες ε_1, ε_2 έχουν συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1=-\dfrac{2}{3}$ και $\lambda_2=-\dfrac{4}{6}=-\dfrac{2}{3}$, οπότε $\lambda_1=\lambda_2$.

Επιπλέον για $x=0$ βρίσκουμε αντίστοιχα ότι $y=\dfrac{5}{3}$ και $y=\dfrac{4}{3}$, δηλαδή τέμνουν τον άξονα $y'y$ σε διαφορετικά σημεία. Άρα οι ευθείες είναι παράλληλες.

β. Είναι $2\cdot1+3\cdot1=5$. Άρα το σημείο A είναι σημείο της ευθείας ε_1.

γ. Έχουμε $\varepsilon_2: 4x+6y=8 \Leftrightarrow 2x+3y-4=0$, οπότε $d(A, \varepsilon_2)=\dfrac{2\cdot1+3\cdot1-4}{\sqrt{2^2+3^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}=\dfrac{\sqrt{13}}{13}$.

74 Θέμα 2 – 16425

α. Είναι ε_1: $y=\dfrac{2}{3}x+1$ με $\lambda_1=\dfrac{2}{3}$ και

ε_2: $x=\dfrac{3}{2}y+9 \Leftrightarrow 2x=3y+18 \Leftrightarrow 2x-3y-18=0$ με $\lambda_2=-\dfrac{A}{B}=-\dfrac{2}{-3}=\dfrac{2}{3}$

Οπότε $\lambda_1=\lambda_2$ άρα $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

β. Από την εξίσωση της ε_1 για $x=0$, βρίσκουμε το $y=1$, οπότε το σημείο $A(0,1)\in\varepsilon_1$. Άρα:

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2)=d(A, \varepsilon_2)=\frac{|2\cdot0-3\cdot1-18|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{|-21|}{\sqrt{13}}=\frac{21}{\sqrt{13}}=\frac{21\sqrt{13}}{13}$$

75 Θέμα 2 – 15440

α. • $\overrightarrow{AB}=(3-0, 0-2)=(3, -2)$

• $\overrightarrow{A\Gamma}=(1-0, 1-2)=(1, -1)$

Β. i. Είναι $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-3+2=-1\neq0$. Οπότε τα σημεία A, B και Γ ορίζουν τρίγωνο.

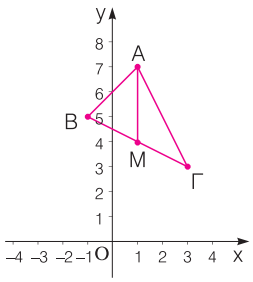
ii. $(AB\Gamma)=\dfrac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})=\dfrac{1}{2}|-1|=\dfrac{1}{2}$

76 Θέμα 2 – 16769

α. Είναι: • $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A, y_B-y_A)=(-1-1, 5-7)=(-2, -2)$

• $\overrightarrow{B\Gamma}=(x_\Gamma-x_B, y_\Gamma-y_B)=(3+1, 3-5)=(4, -2)$

Οπότε $(AB\Gamma)=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{2}|4+8|=6$



β. i. Το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ είναι $M\left(\frac{x_B+x_\Gamma}{2}, \frac{y_B+y_\Gamma}{2}\right)$ ή $M(1, 4)$.

ii. Είναι $x_M = x_A = 1$, οπότε η ευθεία ΑΜ είναι κατακόρυφη, άρα έχει εξίσωση $x = 1$.

77 Θέμα 2 – 16771

α. Είναι $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) \Leftrightarrow (3, -1) = (x_B - 2, y_B - 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_B - 2 = 3$ και $y_B - 1 = -1 \Leftrightarrow x_B = 5$ και $y_B = 0$, άρα $B(5, 0)$.

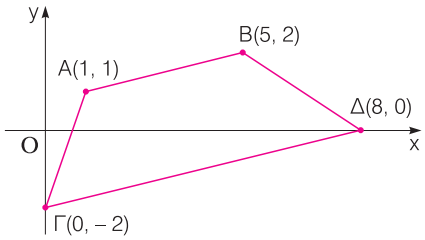
β. i. Είναι $\overrightarrow{A\Gamma} = (x_\Gamma - x_A, y_\Gamma - y_A) = (4-2, -1-1) = (2, -2)$ και $\overrightarrow{AB} = (3, -1)$

Είναι $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 3(-2) - 2(-1) = -6 + 2 = -4 \neq 0$.

Άρα τα σημεία Α, Β και Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

ii. $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})| = \frac{1}{2}|-4| = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2$

78 Θέμα 2 – 16810



α. Είναι: • $\lambda_{AB} = \frac{2-1}{5-1} = \frac{1}{4}$ και $\lambda_{\Gamma\Delta} = \frac{0+2}{8-0} = \frac{1}{4}$, οπότε $AB // \Gamma\Delta$.

• $\lambda_{A\Gamma} = \frac{-2-1}{0-1} = 3$ και $\lambda_{B\Delta} = \frac{0-2}{8-5} = -\frac{2}{3}$, οι ευθείες ΑΓ και ΒΔ δεν είναι παράλληλες.

Άρα το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

β. Για το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ έχουμε: $(AB\Gamma\Delta) = (AB\Delta) + (A\Gamma\Delta)$.

Για τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΔ βρίσκουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{AB}$.

Είναι: • $\overrightarrow{A\Gamma} = (-1, -3)$, $\overrightarrow{A\Delta} = (7, -1)$, $\overrightarrow{AB} = (4, 1)$

• $\det(\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{A\Delta}) = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 22$, $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Delta}) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -11$

Άρα $(AB\Delta) = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Delta})| = \frac{11}{2}$ και $(A\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{A\Delta})| = 11$

Επομένως $(AB\Gamma\Delta) = \frac{11}{2} + 11 = \frac{33}{2}$.

79 Θέμα 2 – 17805

α. Είναι: • $\overrightarrow{OA} = (3, 4)$.

• $\overrightarrow{A\Delta} = (x_\Delta - x_A, y_\Delta - y_A) = \left(\frac{12}{5} - 3, \frac{16}{5} - 4\right) = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

β. Έχουμε $\overrightarrow{A\Delta} = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = -\frac{1}{5}(3, 4) = -\frac{1}{5}\overrightarrow{OA}$.

γ. Είναι $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (4, -3)$.

Έχουμε $(A\Delta B) = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{A\Delta}, \overrightarrow{AB}| \overset{\beta.}{=} \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 4 & -3 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{9}{5} + \frac{16}{5}\right| = \frac{5}{2}$

Είναι $\frac{1}{5}\cdot(OAB) = \frac{1}{5}\cdot\frac{25}{2} = \frac{5}{2}$. Άρα $(A\Delta B) = \frac{1}{5}(OAB)$.

80 Θέμα 2 – 16194

α. Έχουμε $\begin{cases} 8x+y-28=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x+y=28 \\ x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x=27 \\ x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$.

Άρα $M(3, 4)$.

β. i. Είναι $\overrightarrow{OM}=(3-0, 4-0)=(3,4)$, οπότε $|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$.

ii. $d(M, \varepsilon_3)=\dfrac{|3\cdot 3+4\cdot 4+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{30}{5}=6$

81 Θέμα 4 – 16057

α. i. Οι ευθείες που έχουν κλίση $\lambda\in\mathbb{R}$ και διέρχονται από το σημείο $A(2, 0)$ είναι

$\varepsilon_\lambda : y-0=\lambda(x-2) \Leftrightarrow \lambda x-y-2\lambda=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$, (1) .

ii. Είναι $d(B,\varepsilon_\lambda)=\dfrac{|3\lambda-4-2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\dfrac{|\lambda-4|}{\sqrt{\lambda^2+1}}$.

Πρέπει $d(B, \varepsilon_\lambda)=1 \Leftrightarrow \dfrac{|\lambda-4|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=1 \Leftrightarrow |\lambda-4|=\sqrt{\lambda^2+1} \Leftrightarrow (\lambda-4)^2=\lambda^2+1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \lambda=\dfrac{15}{8}$.

Για $\lambda=\dfrac{15}{8}$, από την (1) έχουμε: $\dfrac{15}{8}x-y-\dfrac{30}{8}=0 \Leftrightarrow 15x-8y-30=0$.

β. Από το σημείο $A(2, 0)$ διέρχεται επίσης η κατακόρυφη ευθεία $\zeta : x=2 \Leftrightarrow x-2=0$.

Είναι $d(B, \zeta)=\dfrac{|1\cdot 3+0\cdot 4-2|}{\sqrt{1}}=1$. Άρα και η (ζ) απέχει απόσταση 1 από το B .

γ. Έστω δ_1, δ_2 οι διχοτόμοι των γωνιών των $(\varepsilon), (\zeta)$. Αν $M(x_0, y_0)\in\delta_1$ ή δ_2 , τότε

$$d(M, \varepsilon)=d(M, \zeta) \Leftrightarrow \frac{|15x_0-8y_0-30|}{\sqrt{15^2+(-8)^2}}=\frac{|x_0-2|}{\sqrt{1^2+0^2}} \Leftrightarrow |15x_0-8y_0-30|=17|x-2|$$

$$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 4x_0-y_0-8=0 \text{ ή } x_0+4y_0-2=0$$

Άρα $\delta_1 : 4x-y-8=0$ και $\delta_2 : x+4y-2=0$.

82 Θέμα 4 – 22266

α) Έχουμε την εξίσωση: $(2\lambda+1)x-(\lambda-2)y+\lambda-7=0$ (Ε), $\lambda\in\mathbb{R}$ που είναι της μορφής $Ax+By+\Gamma=0$, με $A=2\lambda+1$ και $B=\lambda-2$.

Οπότε: $\begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda+1=0 \\ \lambda-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=-\frac{1}{2} \\ \lambda=2 \end{cases}$, άρα για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ είναι $A\neq 0$ ή $B\neq 0$,

επομένως η εξίσωση (Ε) παριστάνει ευθεία.

β) Η εξίσωση (Ε) γράφεται: $2\lambda x+x-\lambda y+2y+\lambda-7=0$ ή

$(2x-y+1)\lambda+(x+2y-7)=0$. Το να ικανοποιείται η τελευταία εξίσωση για κάθε λ, είναι ισοδύναμο με το να είναι μηδέν οι δύο παρενθέσεις. Δηλαδή:

$$\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ x+2y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 \\ x+2(2x+1)-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 \\ x+4x+2-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}.$$

Επομένως, όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (Ε), διέρχονται από το σημείο $M(1, 3)$.

γ) Η ευθεία (ζ) είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\overrightarrow{\delta_1}$ = (B, -A) = (-8, -6).

Οι ευθείες της οικογένειας ευθειών (Ε), είναι παράλληλες στο διάνυσμα

$\overrightarrow{\delta_2}$ = (B, -A) = (-λ + 2, -2λ - 1).

Οπότε: $\overrightarrow{\delta_1} // \overrightarrow{\delta_2} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{\delta_1}, \overrightarrow{\delta_2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -8 & -6 \\ -\lambda+2 & -2\lambda-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

16λ + 8 – 6λ + 12 = 0 ⇔ 10λ = -20 ⇔ λ = -2.

Για λ = -2 από την εξίσωση (Ε) παίρνουμε: -3x + 4y – 9 = 0.

Άρα ε: -3x + 4y – 9 = 0 είναι η ζητούμενη ευθεία.

δ) Είναι (ζ): 6x-8y+3=0, οπότε $d(M, \zeta) = \frac{|6\cdot 1 - 8\cdot 3 + 3|}{\sqrt{6^2+(-8)^2}} = \frac{|15|}{\sqrt{100}} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$.

83 Θέμα 4 – 17695

α. • Έχουμε $A(t-1, 2t-1)$, $t \geq 0$. Έστω $A(x, y)$. Είναι:

$$\begin{cases} x = t-1 \\ y = 2t-1 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x+1 \\ y = 2(x+1)-1 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x+1 \\ y = 2x+1 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

Άρα το σημείο Α κινείται στην ημιευθεία $\varepsilon_1: y = 2x+1$, $x \geq -1$.

• Έχουμε $B(3t-1, -4t-1)$, $t \geq 0$. Έστω $B(x, y)$. Είναι:

$$\begin{cases} x = 3t-1 \\ y = -4t-1 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{x+1}{3} \\ y = -4\frac{x+1}{3} - 1 \\ \frac{x+1}{3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{x+1}{3} \\ 3y = -4x-7 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{x+1}{3} \\ 4x+3y+7 = 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

Άρα το σημείο Β κινείται στην ημιευθεία $\varepsilon_1: 4x+3y+7=0$, $x \geq -1$.

β. Αν υπάρχει χρονική στιγμή $t \geq 0$, κατά την οποία τα σημεία Α και Β ταυτίζονται θα είναι:

$$\begin{cases} x_A = x_B \\ y_A = y_B \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-1 = 3t-1 \\ 2t-1 = -4t-1 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 0$$

Άρα τη χρονική στιγμή $t = 0$, τα σημεία Α, Β ταυτίζονται.

γ. Για $t = 2$ είναι $A(1, 3)$ και $B(5, -9)$, οπότε:

$$(AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (-9-3)^2} = \ldots = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$$

δ. Είναι $d(A, \varepsilon) = 6 \Leftrightarrow \frac{|4\cdot(t-1)+3\cdot(2t-1)+7|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 6 \Leftrightarrow \frac{|10t|}{5} = 6 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow |10t| = 30 \Leftrightarrow |t| = 3 \Leftrightarrow t = 3$.

84 Θέμα 4 – 22073

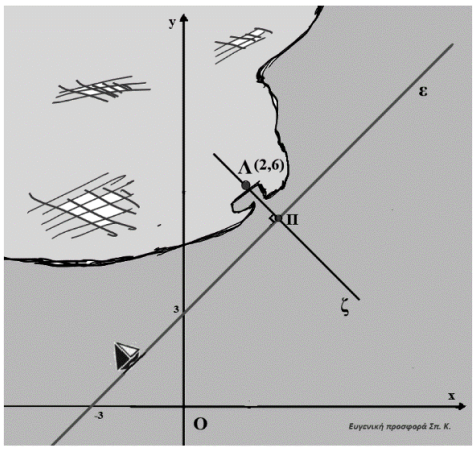
α)

i. Για το σημείο Π(λ-1, 2+λ) έχουμε: $\begin{cases} x_\Pi = \lambda - 1 \\ \text{και} \\ y_\Pi = 2 + \lambda \end{cases}$. Απαλείφοντας το λ από τις 2 εξισώσεις έχουμε ότι $y_\Pi = x_\Pi + 3$. Επομένως η εξίσωση της τροχιάς του πλοίου είναι η ευθεία ε με εξίσωση την x-y+3=0.

ii. Το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι αν οι συντεταγμένες του λιμανιού Λ(2,6) επαληθεύουν την εξίσωση της τροχιάς του, δηλαδή την εξίσωση x-y+3=0.

Για y=6 και x =2 έχουμε 2-6+3 = -1 ≠ 0. Άρα το πλοίο δεν θα περάσει από το λιμάνι.

β)



i. Η ελάχιστη απόσταση του πλοίου από το λιμάνι είναι το μήκος του κάθετου τμήματος ΛΠ, με Π το σημείο τομής της ευθείας ε με την ευθεία ζ που είναι κάθετη στην ε και διέρχεται από το Λ. Υπολογίζεται με την απόσταση του σημείου Λ από την ε. Δηλαδή

$$d(\Lambda,\varepsilon)=\frac{|2-6+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

ii. Η ευθεία ζ είναι κάθετη ευθεία στην ε, άρα $\lambda_\zeta\cdot\lambda_\varepsilon=-1$. Επειδή $\lambda_\varepsilon=1$, έχουμε ότι $\lambda_\zeta=-1$ και η εξίσωσή της είναι: $y-y_\Lambda=-(x-x_\Lambda)$ ή $y-6=-x+2 \Leftrightarrow x+y=8$. Η θέση του πλοίου είναι το κοινό σημείο των ευθειών ε και ζ, που προσδιορίζεται από τη λύση του συστήματος.

$$(\Sigma)\begin{cases}x-y=-3\\x+y=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=5\\x+y=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{5}{2}\\y=\frac{11}{2}\end{cases}$$

Άρα όταν το πλοίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από το λιμάνι βρίσκεται στο σημείο $\left(\frac{5}{2},\frac{11}{2}\right)$ του καρτεσιανού επιπέδου.

85 Θέμα 4 – 15380

α. Σύμφωνα με τα δεδομένα έχουμε $(AB)=d(A,\varepsilon)\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\sqrt{10}=\frac{|6+\alpha|}{\sqrt{10}}\Leftrightarrow|\alpha+6|=10\Leftrightarrow\alpha=4$ ή $\alpha=-16$.

β. Για $\alpha=4$ έχουμε $\varepsilon:3x+y+4=0$.

i. Για $x=0$ είναι $y=-4$, οπότε $\Gamma(0,-4)$.

Είναι $\vec{AB}=(-3,-1)$ και $\vec{A\Gamma}=(-1,-7)$. Οπότε $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-3&-1\\-1&-7\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot20=10$.

ii. Το σημείο που απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων, είναι το σημείο τομής της ευθείας ε με την ευθεία δ που διέρχεται από το Ο και είναι κάθετη στην ε .

Είναι $\lambda_\varepsilon=-3$, οπότε $\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_\delta=-1\Leftrightarrow\lambda_\delta=\frac{1}{3}$. Άρα $\delta:y=\frac{1}{3}x$.

Το ζητούμενο σημείο έχει συντεταγμένες τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} 3x+y+4=0 \\ y=\frac{1}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+\frac{1}{3}x+4=0 \\ y=\frac{1}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} 10x+12=0 \\ y=\frac{1}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{6}{5} \\ y=-\frac{2}{5} \end{cases}$$

. Άρα είναι το σημείο $\left(-\frac{6}{5}, -\frac{2}{5}\right)$.

86 Θέμα 4 – 22265

α) Καθώς το μ διατρέχει το R, είναι Γ(μ-1, 3μ-2), οπότε αν Γ(x, y) τότε:

$$\begin{cases} x=\mu-1 \\ y=3\mu-2 \\ \mu\in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu=x+1 \\ y=3(x+1)-2 \\ \mu\in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x+1 \\ \mu=x+1 \\ \mu\in R \end{cases}$$

, επομένως το σημείο Γ κινείται στην ευθεία ε: y = 3x +1.

β) Είναι $\lambda_{AB} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{2-(-1)}{2-1} = 3 = \lambda_\varepsilon$, άρα η ΑΒ // ε.

Επιπλέον, για x = 1 και y = - 1 από την εξίσωση της ε παίρνουμε $-1 \neq 3\cdot1+1$.

Άρα το σημείο Α δεν ανήκει στην ευθεία ε, αφού οι συντεταγμένες του δεν ικανοποιούν την εξίσωσή της. Οπότε τα σημεία Α, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά. Επομένως καθώς το μ διατρέχει το R, τα σημεία Α, Β, Γ είναι κορυφές τριγώνου.

γ) Είναι $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (2-1, 2-(-1)) = (1, 3)$ και

$\overrightarrow{A\Gamma} = (x_\Gamma - x_A, y_\Gamma - y_A) = (\mu-1-1, 3\mu-2-(-1)) = (\mu-2, 3\mu-1)$, οπότε:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_{AB} & y_{AB} \\ x_{A\Gamma} & y_{A\Gamma} \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ \mu-2 & 3\mu-1 \end{vmatrix}\right| =$$

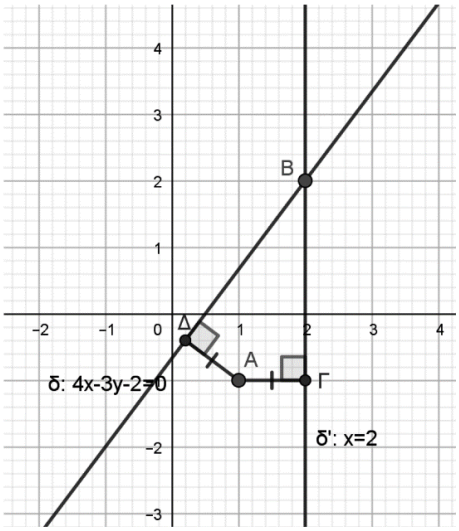
$$\frac{1}{2}|1(3\mu-1)-3(\mu-2)| = \frac{1}{2}|3\mu-1-3\mu+6| = \frac{1}{2}|5| = \frac{5}{2}$$, σταθερό για κάθε $\mu\in R$.

Εναλλακτικά: Λόγω των ερωτημάτων (α) και (β), το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ από την κορυφή του Γ στην ΑΒ, έχει σταθερό μήκος, ίσο με την απόσταση των παραλλήλων ευθειών ε και ΑΒ. Επίσης το μήκος του ΑΒ είναι σταθερό, οπότε το εμβαδό του τριγώνου: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot \upsilon$ είναι σταθερό.

δ) Από το σημείο Β(2, 2) διέρχονται οι ευθείες δ΄: x = 2 και δ: $y - y_B = \lambda(x - x_B)$ ή δ: y - 2 = λ(x - 2) ή δ: λx - y + 2 - 2λ = 0.

Είναι: $d(A, \delta') = |2 - x_A| = |2 - 1| = 1$, οπότε η ευθεία δ΄: x = 2 αποτελεί μια λύση στο πρόβλημα. Θα αναζητήσουμε αν στην οικογένεια ευθειών δ, υπάρχει και άλλη ευθεία που να αποτελεί λύση στο πρόβλημα.

Είναι: $d(A, \delta) = \frac{|\lambda\cdot1-1\cdot(-1)+2-2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+(-1)^2}} = \frac{|\lambda+1+2-2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = \frac{|3-\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}}$.



Θέλουμε: $d(A, \delta) = 1 \Leftrightarrow \frac{|3-\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = 1 \Leftrightarrow |3-\lambda| = \sqrt{\lambda^2+1}$ και υψώνοντας στο τετράγωνο

και τα δύο μέλη έχουμε: $|3-\lambda|^2 = \sqrt{\lambda^2+1}^2 \Leftrightarrow (3-\lambda)^2 = \lambda^2+1 \Leftrightarrow 9-6\lambda+\lambda^2 = \lambda^2+1$

$\Leftrightarrow 6\lambda = 8 \Leftrightarrow \lambda = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ η λύση της εξίσωσης, που επαληθεύει την αρχική, οπότε είναι

δεκτή.

Για $\lambda = \frac{4}{3}$ η ευθεία δ: $\frac{4}{3}x - y + 2 - 2\frac{4}{3} = 0$ ή δ: $\frac{4}{3}x - y + 2 - \frac{8}{3} = 0$ ή δ: $\frac{4}{3}x - y - \frac{2}{3} = 0$ ή

δ: $4x - 3y - 2 = 0$, αποτελεί μία ακόμη λύση στο πρόβλημα.

87 Θέμα 4 – 15433

α. i. Το σημείο του δρόμου από το οποίο ο οικισμός A απέχει τη μικρότερη απόσταση είναι το σημείο τομής της ευθείας και της κάθετης ευθείας ε στην ευθεία δ που διέρχεται από το σημείο A.

Είναι $\lambda_\delta = -\frac{1}{1} = -1$, οπότε $\lambda_\delta \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 1$.

Οπότε $\varepsilon : y-(-2) = 1\cdot(x-(-1)) \Leftrightarrow x-y-1=0$.

Λύνοντας το σύστημα εξισώσεων των δύο ευθειών ε και δ βρίσκουμε το ζητούμενο σημείο:

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}, \text{ οπότε το } (1, 0).$$

ii. Η θέση του κέντρου υγείας της περιοχής που ισαπέχει από τους δύο οικισμούς είναι το κοινό σημείο της ευθείας δ και της μεσοκαθέτου ζ του AB.

Είναι $\lambda_{AB} = \frac{1-(-2)}{3-(-1)} = \frac{3}{4}$ και $\lambda_{AB}\cdot\lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\zeta = -\frac{4}{3}$.

Το μέσο M του AB έχει συντεταγμένες $x_M = \frac{-1+3}{2} = 1$, $y_M = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2}$, οπότε $M(1, -\frac{1}{2})$.

Άρα $\zeta : y + \frac{1}{2} = -\frac{4}{3}(x-1) \Leftrightarrow 8x+6y-5=0$.

Έχουμε $\begin{cases} x+y-1=0 \\ 8x+6y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x \\ 8x+6(1-x)-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}$, οπότε είναι το σημείο $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

β. Έστω $\Gamma(x, y)$ σημείο της $\delta : x+y-1=0 \Leftrightarrow y=1-x$. Άρα $\Gamma(x, 1-x)$.

Είναι $\vec{AB} = (4, 3)$ και $\vec{A\Gamma} = (x+1, 3-x)$.

Έχουμε $(ΑΒΓ)=8 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ x+1 & 3-x \end{vmatrix}\right|=8 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow |9-7x|=16 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=\frac{25}{7}$.

Άρα η θέση Γ του αυτοκινήτου είναι στα σημεία $(-1, 2)$ ή $\left(\frac{25}{7}, -\frac{18}{7}\right)$.

88 Θέμα 4 – 14984

α. Έστω $M(x, y)$. Είναι $\vec{AM}=(x+2, y+3)$, $\vec{AB}=(9, 12)$.

Έχουμε $(AMB)=12 \Leftrightarrow \frac{1}{2}|\det(\vec{AM}, \vec{AB})|=12 \Leftrightarrow \left|\begin{vmatrix} x+2 & y+3 \\ 9 & 12 \end{vmatrix}\right|=24 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |12(x+2)-9(y+3)|=24 \Leftrightarrow 3|4(x+2)-3(y+3)|=24$

$\Leftrightarrow |4x+8-3y-9|=8 \Leftrightarrow |4x-3y-1|=8$

$\Leftrightarrow 4x-3y-1=8$ ή $4x-3y-1=-8 \Leftrightarrow 4x-3y-9=0$ ή $4x-3y+7=0$.

Οι ευθείες είναι παράλληλες αφού $\lambda_1=\lambda_2=\frac{4}{3}$ και τέμνουν τον $y'y$ στα $(0, -3)$ και $(0, \frac{7}{3})$ που είναι διαφορετικά.

β. Παρατηρούμε ότι $\lambda_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{9-(-3)}{7-(-2)}=\frac{4}{3}$, άρα η ευθεία ΑΒ είναι παράλληλη στις (ε_1) και (ε_2) .

Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι ένα οποιοδήποτε σημείο της ΑΒ ισαπέχει από τις (ε_1) και (ε_2) .

Βρίσκουμε το μέσο του ΑΒ που είναι το σημείο $K\left(\frac{-2+7}{2}, \frac{-3+9}{2}\right)$ δηλαδή το $K(\frac{5}{2}, 3)$.

Είναι $d(K, \varepsilon_1)=\frac{|4\cdot\frac{5}{2}-3\cdot 3-9|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{8}{5}$ και $d(K, \varepsilon_2)=\frac{|4\cdot\frac{5}{2}-3\cdot 3+7|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{8}{5}$.

γ. Το τετράπλευρο AM_1BM_2 αποτελείται από τα τρίγωνα AM_1B και AM_2B , οπότε $(AM_1BM_2)=(AM_1B)+(AM_2B)=12+12=24$, αφού $(AMB)=12$, για κάθε σημείο Μ των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Το ίδιο ισχύει για οποιαδήποτε σημεία Χ, Υ των (ε_1) και (ε_2) αντίστοιχα, αρκεί να σχηματίζεται τετράπλευρο (τα σημεία M_1, B, M_2 να μην είναι συνευθειακά).

Άρα υπάρχουν άπειρα τετράπλευρα ΑΧΒΥ με σταθερό εμβαδόν 24 .

89 Θέμα 4 – 15273

α. Είναι: $\vec{AB}=(-1, 1)$ και $\vec{AΓ}=(-5, -2)$ οπότε $\det(\vec{AB}, \vec{AΓ})=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}=2+5=7\neq 0$.

Άρα τα σημεία Α , Β , Γ δεν είναι στην ίδια ευθεία, οπότε σχηματίζουν τρίγωνο.

β. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Β , Γ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\frac{2-5}{-2-2}=\frac{3}{4}$ και

εξίσωση $y-5=\frac{3}{4}(x-2) \Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{7}{2}$.

γ. Αν $M(x, y)$ τότε $\begin{cases} x=4\alpha-1 \\ y=3\alpha+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{x+1}{4} \\ y=3\frac{x+1}{4}+1 \end{cases}$. Άρα $y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}+1=\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}$.

Άρα το Μ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y=\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}$ που είναι παράλληλη στη ΒΓ αφού έχουν ίδια κλίση και τέμνουν το $y'y$ στα $(0, \frac{7}{2})$, $(0, \frac{7}{4})$ που είναι διαφορετικά.

Για $x=3$ έχουμε $y=\frac{9}{4}+\frac{7}{4}=4$, οπότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το A .

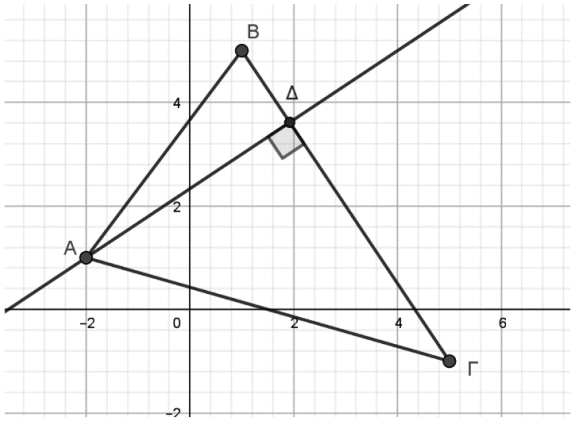
δ. Είναι:
- $(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}|7|=\frac{7}{2}$
- $\overrightarrow{ΒΓ}=(-4,-3)$ και $\overrightarrow{ΒΜ}=(4α-3,3α-4)$, οπότε

$$\det(\overrightarrow{ΒΓ},\overrightarrow{ΒΜ})=\begin{vmatrix}-4 & -3\\ 4α-3 & 3α-4\end{vmatrix}=-12α+16+12α-9=7 \text{ , άρα } (ΜΒΓ)=\frac{1}{2}|7|=\frac{7}{2}$$

Άρα $(ΜΒΓ)=(ΑΒΓ)$.

Τα εμβαδά των τριγώνων $ΑΒΓ$, $ΜΒΓ$ είναι ίσα για οποιαδήποτε θέση του $Μ$, αφού τα τρίγωνα έχουν την ίδια βάση $ΒΓ$ και το ύψος τους $υ$ είναι ίσο με την απόσταση των δύο παράλληλων ευθειών του ερωτήματος **γ.**

90 Θέμα 4 – 22262



α) Είναι: $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A, y_B-y_A)=(1-(-2), 5-1)=(3, 4)$ και

$\overrightarrow{AΓ}=(x_Γ-x_A, y_Γ-y_A)=(5-(-2), -1-1)=(7, -2)$, οπότε: $(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AΓ})|=$

$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}x_{AB} & y_{AB}\\ x_{AΓ} & y_{AΓ}\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}3 & 4\\ 7 & -2\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|3\cdot(-2)-4\cdot7|=\frac{1}{2}|-6-28|=\frac{1}{2}|-34|=\frac{1}{2}\cdot34=17.$

β) Είναι ΒΓ: $y-y_B=\frac{y_Γ-y_B}{x_Γ-x_B}(x-x_B)$ ή ΒΓ: $y-5=\frac{-1-5}{5-1}(x-1)$ ή ΒΓ: $y-5=\frac{-6}{4}(x-1)$ ή

ΒΓ: $y-5=-\frac{3}{2}(x-1)$ ή ΒΓ: $2y-10=-3x+3$ ή ΒΓ: $3x+2y-13=0$.

γ) Έστω $υ_α$ το ύψος του τριγώνου από την κορυφή Α.

Είναι $λ_{ΒΓ}=-\frac{A}{B}=-\frac{3}{2}$ και $υ_α\perp ΒΓ \Leftrightarrow λ_{υ_α}\cdot λ_{ΒΓ}=-1 \Leftrightarrow λ_{υ_α}=\frac{-1}{λ_{ΒΓ}}=\frac{-1}{-\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$. Έτσι

$υ_α$: $y-y_A=λ_{υ_α}(x-x_A)$ ή $υ_α$: $y-1=\frac{2}{3}(x-(-2))$ ή $υ_α$: $3y-3=2x+4$ ή $υ_α$: $2x-3y+7=0$,

η ζητούμενη εξίσωση.

Το σημείο της ευθείας ΒΓ που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το Α, είναι το ίχνος

Δ, του ύψους από το Α στην ευθεία ΒΓ.

Από το σύστημα των ΒΓ, $υ_α$ έχουμε: $\begin{cases}3x+2y=13\\ 2x-3y=-7\end{cases}$, οπότε

$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 4 = -13$ και

$D_x = \begin{vmatrix} 13 & 2 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} = -39 + 14 = -25$, $D_y = \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -21 - 26 = -47$,

άρα η λύση του συστήματος είναι:

$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-25}{-13} = \frac{25}{13}$ και $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-47}{-13} = \frac{47}{13}$.

Επομένως, $\Delta(\frac{25}{13}, \frac{47}{13})$ είναι το ζητούμενο σημείο της ευθείας ΒΓ.

δ) Έστω Μ(x, y) σημείο του επιπέδου ώστε: (ΜΑΒ) = $\frac{1}{2}$ (ΑΒΓ), η οποία λόγω του ερωτήματος (α) γράφεται: (ΜΑΒ) = $\frac{17}{2}$ (1).

Είναι: $\overrightarrow{AM} = (x_M - x_A, y_M - y_A) = (x - (-2), y - 1) = (x + 2, y - 1)$, άρα:

$(MAB) = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_{AB} & y_{AB} \\ x_{AM} & y_{AM} \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ x+2 & y-1 \end{vmatrix}\right| =$

$\frac{1}{2}|3\cdot(y - 1) - 4\cdot(x + 2)| = \frac{1}{2}|3y - 3 - 4x - 8| = \frac{1}{2}|3y - 4x - 11|$, οπότε από την (1) $\Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}|3y - 4x - 11| = \frac{17}{2} \Leftrightarrow |3y - 4x - 11| = 17 \Leftrightarrow 3y - 4x - 11 = -17$ ή $3y - 4x - 11 = 17 \Leftrightarrow$

$4x - 3y - 6 = 0$ ή $4x - 3y + 28 = 0$.

Άρα το σημείο Μ ανήκει στην ευθεία ε_1: $4x - 3y - 6 = 0$ ή ε_2: $4x - 3y + 28 = 0$.

91 Θέμα 4 – 17694

α. Εφόσον τα σημεία της ευθείας ε πάνω στην οποία βρίσκεται η σιδηροδρομική γραμμή ισαπέχουν από τα Α, Β αυτή θα είναι η μεσοκάθετος ε του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Αν Μ το μέσο του ΑΒ, τότε

$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3+7}{2} = 5$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = 2$, άρα $M(5, 2)$.

Είναι $\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-6}{7-3} = -2$ και $\varepsilon \perp AB \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Άρα $\varepsilon: y - 2 = \frac{1}{2}(x - 5) \Leftrightarrow \varepsilon: 2y - 4 = x - 5 \Leftrightarrow \varepsilon: x - 2y - 1 = 0$.

β. Αν $\Sigma(x, y)$ σημείο της ε, τότε $x - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2y + 1$, οπότε $\Sigma(2y+1, y)$.

Είναι:
- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (7-3, -2-6) = (4, -8)$ και
- $\overrightarrow{A\Sigma} = (x_\Sigma - x_A, y_\Sigma - y_A) = (2y+1-3, y-6) = (2y-2, y-6)$

Έχουμε $(AB\Sigma) = 20 \Leftrightarrow \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Sigma})| = 20 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 4 & -8 \\ 2y-2 & y-6 \end{vmatrix}\right| = 20$

$\Leftrightarrow |4(y-6) - (-8)(2y-2)| = 40 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow |20y - 40| = 40$

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow y = 0$ ή $y = 4$

Βρίσκουμε $\Sigma(1, 0)$ ή $\Sigma(9, 4)$.

92 Θέμα 4 – 15987

α. $\varepsilon: y - y_B = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) \Leftrightarrow y - 3 = \frac{3-1}{2-1}(x - 2) \Leftrightarrow y = 2x - 1$

β. • Για $y=0$ είναι $2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$, οπότε η ευθεία ε τέμνει τον $x'x$ στο $A(\frac{1}{2}, 0)$.

• Για $y=5$ είναι $2x-1=5 \Leftrightarrow x=3$, οπότε η ευθεία ε διέρχεται από το $B(3, 5)$.

Είναι $x_O < x_A < x_\Gamma$ και $y_B < y_\Gamma$, οπότε το Γ δεν ανήκει στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ε και το $O(0, 0)$.

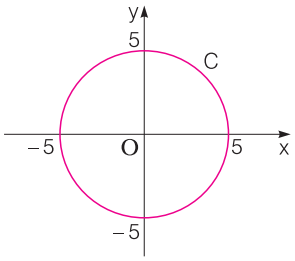
γ. Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΑΒΓ έχουν την ίδια βάση ΑΒ, με φορέα την ευθεία (ε).
Οι αποστάσεις Ο και Γ αντίστοιχα από την (ε) είναι τα ύψη των ΑΟΒ, ΑΒΓ.

Είναι: • $d(O,\varepsilon)=\frac{|2\cdot 0-0-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

• $d(\Gamma,\varepsilon)=\frac{|2\cdot 2^{100}-5-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{2^{101}-6}{\sqrt{5}}>\frac{1}{\sqrt{5}}$

Άρα $d(O, e) < d(\Gamma, \varepsilon)$ οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το ΑΟΒ.

93 Θέμα 2 – 18700



α. Η εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων, δηλαδή το $(0, 0)$ και ακτίνα 5 είναι $C: x^2+y^2=5^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=25$. Ο κύκλος C φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

β. i. Είναι $(OA)=\sqrt{(3-0)^2+(-4-0)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$, οπότε το Α ανήκει στον κύκλο C.

ii. Η εξίσωση εφαπτομένης του C στο $A(3, -4)$ είναι $\varepsilon: x\cdot x_A+y\cdot y_A=25 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \varepsilon: 3x-4y=25$.

94 Θέμα 2 – 16773

α. Η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho=(OA)=\sqrt{(1-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{5}$

Άρα η εξίσωση του είναι: $x^2+y^2=(\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=5$.

β. i. Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ είναι:

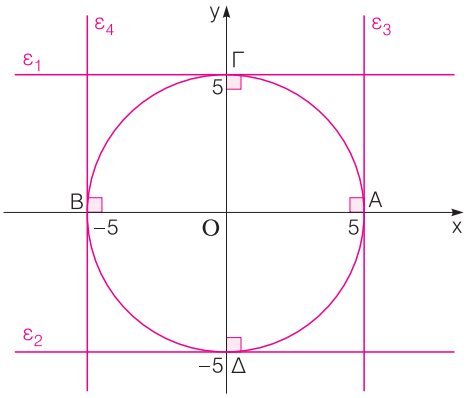
$xx_A+yy_A=\rho^2 \Leftrightarrow x+2y=5$.

ii. Για να είναι το σημείο Β αντιδιαμετρικό του Α, θα πρέπει το κέντρο Ο του κύκλου να είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ. Οπότε:

$$\begin{cases} x_O=\frac{x_A+x_B}{2} \\ y_O=\frac{y_A+y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=\frac{1+x_B}{2} \\ 0=\frac{2+y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=1+x_B \\ 0=2+y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=-1 \\ y_B=-2 \end{cases}$$

, άρα $x_B=-1$ και $y_B=-2$. Άρα $B(-1, -2)$.

95 Θέμα 2 - 18241



α. Ο κύκλος C, που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, έχει κέντρο το $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{25}=5$. Τα σημεία τομής με τον άξονα $x'x$ είναι τα σημεία $A(5, 0)$ και $B(-5, 0)$ ενώ τα σημεία τομής με τον άξονα $y'y$ είναι τα σημεία $\Gamma(0, 5)$ και $\Delta(0, -5)$.

β. Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία $\Gamma(0, 5)$ και $\Delta(0, -5)$ είναι κάθετες στις ακτίνες ΟΓ, ΟΔ οπότε είναι παράλληλες στον $x'x$ άρα έχουν εξισώσεις $y=5$ και $y=-5$ αντίστοιχα.

Είναι οι ευθείες ε_1, ε_2 που φαίνονται στο σχήμα.

γ. Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία $A(5, 0)$ και $B(-5, 0)$ είναι κάθετες στις ακτίνες ΟΑ, ΟΒ στον $x'x$, οπότε είναι παράλληλες στον $y'y$ άρα έχουν εξισώσεις $x=5$ και $x=-5$ αντίστοιχα. Είναι οι ευθείες ε_3, ε_4 που φαίνονται στο σχήμα.

96 Θέμα 2 – 15028

α. Είναι C: $(x-1)^2+(y-2)^2=4$.

β. Είναι $d(K,\varepsilon)=\dfrac{|3\cdot1+4\cdot2-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|3+8-1|}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{|10|}{\sqrt{25}}=\dfrac{10}{5}=2$.

γ. Αφού $d(K,\varepsilon)=2=\rho$ η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο C .

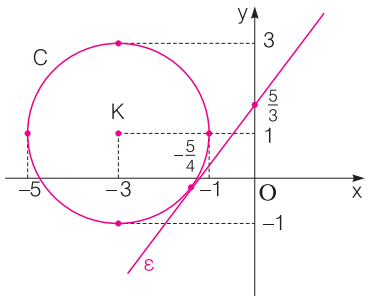
97 Θέμα 2 – 17317

α. Ο κύκλος C έχει κέντρο $K(1,2)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{4}=2$.

β. Έχουμε: $d(K,\varepsilon)=\dfrac{|3\cdot1-4\cdot2-8|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{13}{\sqrt{25}}=\dfrac{13}{5}$.

γ. Αφού $d(K,\varepsilon)=\dfrac{13}{5}>2$, η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

98 Θέμα 2 – 18239



α. Είναι $d(K,\varepsilon)=\dfrac{|4(-3)-3\cdot1+5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{|-10|}{\sqrt{25}}=\dfrac{10}{5}=2$.

β. Ο ζητούμενος κύκλος θα έχει ακτίνα $\rho=d(K,\varepsilon)=2$, οπότε η εξίσωσή του θα είναι η $(x+3)^2+(y-1)^2=4$.

γ. Η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες $x'x$, $y'y$ στα $-\dfrac{5}{4}$, $\dfrac{5}{3}$ αντίστοιχα.

Σχεδιάζουμε με διαβήτη τον κύκλο κέντρου $K(-3,1)$ και $\rho=2$.

99 Θέμα 2 - 22172

α) Η απόσταση του σημείου (x_o,y_o) από την ευθεία Ax + By + Γ = 0 δίνεται από τον τύπο:

$d=\dfrac{|Ax_o+By_o+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Επομένως έχουμε $d(A,\varepsilon)=\dfrac{|3\cdot(-2)-4\cdot1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{|-10|}{\sqrt{25}}=\dfrac{10}{5}=2$

β) Η ζητούμενη ευθεία (η) είναι κάθετη στην (ε), οπότε το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης της (η) και της (ε) θα είναι -1. Ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε) είναι

$\lambda_2=-\dfrac{A}{B}=-\dfrac{3}{-4}=\dfrac{3}{4}$.

Επομένως ο συντελεστής διεύθυνσης της ζητούμενης ευθείας (η) θα είναι $-\dfrac{4}{3}$.

Η ευθεία διέρχεται από το A(-2,1), οπότε η εξίσωση θα είναι $y-y_o=\lambda(x-x_o)$ ή $y-1=-\dfrac{4}{3}(x+2)$

ή $y=-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{8}{3}+1$ ή $y=-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{5}{3}$.

γ) Η εξίσωση κύκλου με κέντρο το σημείο (x_o,y_o) και ακτίνα ρ δίνεται από την εξίσωση

$(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=\rho^2$ (1). Για να εφάπτεται ο κύκλος στην ευθεία (ε), θα πρέπει η απόσταση του κέντρου του A από την (ε) να ισούται με την ακτίνα ρ. Στο ερώτημα (α) βρήκαμε ότι η απόσταση του A από την (ε) είναι 2, επομένως ρ = 2 και η (1) γίνεται

$(x-(-2))^2+(y-1)^2=2^2$ ή $(x+2)^2+(y-1)^2=4$.

100 Θέμα 2 - 20890

α. Είναι

$$BΓ: y - y_Γ = \frac{y_B - y_Γ}{x_B - x_Γ}(x - x_Γ) \Leftrightarrow y + 3 = \frac{-8+3}{2-7}(x-7) \Leftrightarrow y + 3 = \frac{-5}{-5}(x-7) \Leftrightarrow y + 3 = x - 7 \Leftrightarrow x - y - 10 = 0$$

β. Η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου είναι

$$\rho = d(A\ ,\ BΓ) = \frac{|1\cdot 3 - 1\cdot(-3) - 10|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\ .$$

Οπότε η ζητούμενη εξίσωση είναι:

$$C: (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = \rho^2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+3)^2 = (2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+3)^2 = 8\ .$$

101 Θέμα 2 – 18238

α. Είναι $x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+(-3)}{2} = -1$ και $y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$, οπότε $K(-1, 4)$.

β. Είναι $(KA) = \sqrt{(x_K - x_A)^2 + (y_K - y_A)^2} = \sqrt{(-1-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{5}$.

γ. Ο κύκλος έχει κέντρο το $K(-1, 4)$ και ακτίνα $\rho = (KA) = \sqrt{5}$, οπότε έχει εξίσωση: $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 5$.

102 Θέμα 2 – 16808

α. • Το μέσο K του τμήματος AB είναι $K\left(\frac{-8+4}{2}, \frac{1+5}{2}\right)$ ή $K(-2, 3)$.

• Είναι $(AB) = \sqrt{(-8-4)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{144+16} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$.

• Άρα το AB είναι διάμετρος του κύκλου C $(KΓ) = \sqrt{(-2+4)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} = \frac{AB}{2}$.

β. Το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο $K(-2, 3)$ και η ακτίνα του $\rho = 2\sqrt{10}$, άρα η εξίσωση του κύκλου C είναι: $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 40$.

103 Θέμα 2 – 21962

α) Έχουμε ότι: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (3-0\ ,\ 4-3) = (3\ ,\ 1)$,

$\overrightarrow{AΓ} = (x_Γ - x_A, y_Γ - y_A) = (1-0\ ,\ 0-3) = (1\ ,\ -3)$.

Οπότε $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AΓ} = 3\cdot 1 + 1\cdot(-3) = 3 - 3 = 0$, άρα $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AΓ}$ ή $B\hat{A}Γ = 90^o$.

β) Το σημείο Κ που είναι το μέσο του τμήματος ΒΓ θα έχει συντεταγμένες:

$K\left(\frac{X_B+X_Γ}{2}, \frac{Y_B+Y_Γ}{2}\right)$ ή $K\left(\frac{3+1}{2}, \frac{4+0}{2}\right)$ ή $K(2\ ,\ 2)$.

γ) Από το α) ερώτημα έχουμε ότι η γωνία $B\hat{A}Γ$ είναι ορθή και τα σημεία Α, Β και Γ είναι σημεία του ζητούμενου κύκλου, άρα η γωνία $B\hat{A}Γ$ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει σε ημικύκλιο, συνεπώς η υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, θα είναι διάμετρος του κύκλου και ισούται με:

$(BΓ) = \sqrt{(x_Γ - x_B)^2 + (y_Γ - y_B)^2} = \sqrt{(1-3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Όμως ΒΓ = 2R, άρα $2R = 2\sqrt{5}$ ή $R = \sqrt{5}$.

Ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ θα έχει ακτίνα R και κέντρο το σημείο Κ του ερωτήματος β) και η εξίσωσή του θα είναι:

$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 5$.

104 Θέμα 2 – 21965

α) Για το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ ισχύει: $M(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2})$ ή $M(\frac{2+0}{2}, \frac{-4+(-2)}{2})$

ή Μ(1, -3).

β) Η κλίση του ΑΒ είναι $\lambda_{AB} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{-2-(-4)}{0-2} = \frac{2}{-2}$ = -1. Η κλίση της μεσοκαθέτου (ζ) του ΑΒ θα πρέπει να είναι λ = 1 (αφού το γινόμενο των δύο κλίσεων θα πρέπει να ισούται με -1). Η εξίσωση της μεσοκαθέτου (ζ) του τμήματος ΑΒ θα είναι: $y - y_M = \lambda \cdot (x - x_M)$ ή y - (-3) = 1 (x – 1) ή y + 3 = x - 1 ή y = x - 4.

γ) το σημείο τομής των ευθειών (ε) και (ζ) θα έχει συντεταγμένες τις λύσεις του συστήματος:

$\begin{cases} y = x - 4 \\ y = 2x - 6 \end{cases}$ ή x – 4 = 2x – 6 ή x = 2 και y = -2. Άρα το σημείο τομής των δύο ευθειών είναι το σημείο (2, -2).

γ) το κέντρο Κ του κύκλου θα πρέπει να ανήκει ταυτόχρονα στη μεσοκάθετο του τμήματος ΑΒ, την ευθεία (ζ) και στην ευθεία (ε) άρα θα πρέπει να είναι το σημείο τομής τους που βρήκαμε στο ερώτημα β), δηλαδή το Κ(2, -2). Η ακτίνα του κύκλου θα είναι ρ = (ΚΑ) = (ΚΒ) αλλά ρ = (ΚΒ) = $\sqrt{(2-0)^2 + (-2+2)^2}$ = $\sqrt{4+0}$ = 2.

Η εξίσωση του κύκλου θα είναι: $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$

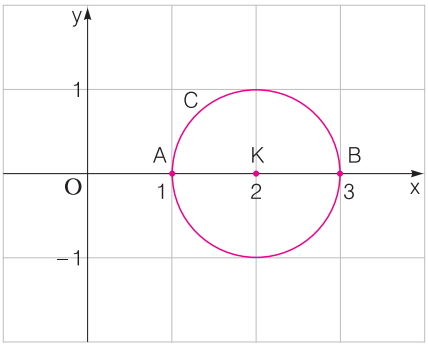
105 Θέμα 2 – 15994

α. Ως γνωστόν, η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, με $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ παριστάνει κύκλο, με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$.

Επειδή $A^2 + B^2 - 4\Gamma = (-4)^2 + 0^2 - 4 \cdot 3 = 4 > 0$, η (1) παριστάνει κύκλο. Είναι $-\frac{A}{2} = 2$, $-\frac{B}{2} = 0$ και $\rho = \frac{\sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = 1$. Άρα το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο $K(2, 0)$ και η ακτίνα του $\rho = 1$.

β. Ο κύκλος (C) φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Ο κύκλος τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(1, 0)$ και $B(3, 0)$.



106 Θέμα 2 – 22147

α) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, με $A = -1$, $B = -1$, $\Gamma = -\frac{7}{2}$.

Είναι

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 1 + 1 + 14 = 16 > 0$$

Επομένως, η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

και η ακτίνα του ισούται με

$$R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2$$

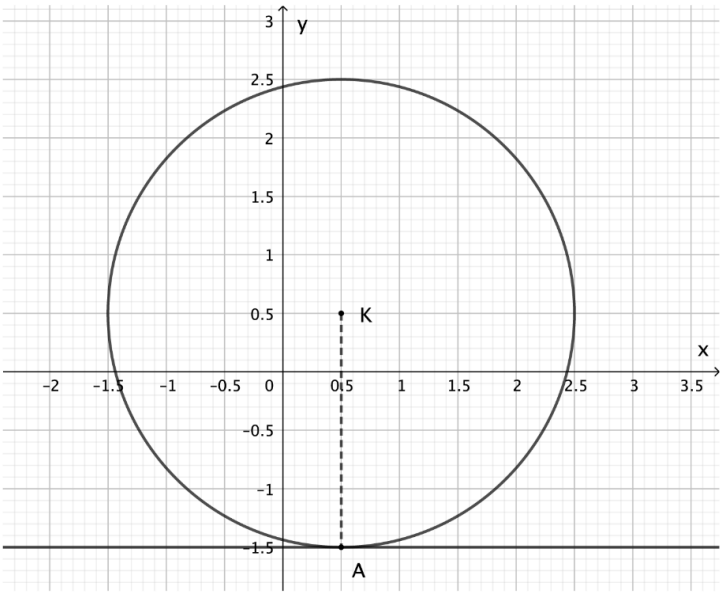
β) Οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν την εξίσωση του κύκλου:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{7}{2} = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = \frac{10}{4} - \frac{5}{2} = 0$$

Άρα, το σημείο Α είναι σημείο του κύκλου (Κ,R).

γ) Η εφαπτομένη του κύκλου (Κ,R) στο Α είναι κάθετη στην ακτίνα ΚΑ. Αφού είναι $x_K = x_A$, η ακτίνα ΚΑ είναι κάθετη στον άξονα x΄x, οπότε η εφαπτομένη του κύκλου στο Α θα είναι παράλληλη στον άξονα x΄x. Άρα, θα έχει εξίσωση

$$y = y_A \text{ ή } y = -\frac{3}{2}$$



107 Θέμα 2 – 15680

α. Είναι $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 - 4 \cdot 1}}{2} = 2$.

β. Είναι $d(K, \varepsilon) = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{12}{5}$.

γ. Αφού $d(K, \varepsilon) = \frac{12}{5} > \rho$, η ευθεία ε και ο κύκλος C δεν έχουν κοινά σημεία.

108 Θέμα 2 – 22279

α) Η εξίσωση (1) γράφεται διαδοχικά:

$$(y - 1)^2 = (3 + x)(1 - x)$$

$$(y - 1)^2 = 3 - 3x + x - x^2$$

$$(y - 1)^2 = 3 - 2x - x^2$$

$$(x^2 + 2x + 1) + (y - 1)^2 = 4$$

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$$

Άρα, η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο Κ(−1,1) και ακτίνα R = 2 .

β) Υπολογίζουμε την απόσταση ΟΚ της αρχής Ο(0,0) των αξόνων από το κέντρο Κ(−1,1) του κύκλου. Είναι:

$$OK = \sqrt{(x_K - x_O)^2 + (y_K - y_O)^2} = \sqrt{(-1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2} < R = 2$$

Άρα, η αρχή Ο των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (Κ,R).

γ) Υπολογίζουμε την απόσταση του κέντρου Κ του κύκλου από την ευθεία (ε) με εξίσωση x + y − 2 = 0. Είναι:

$$d(K,\varepsilon) = \frac{|-1+1-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < R = 2$$

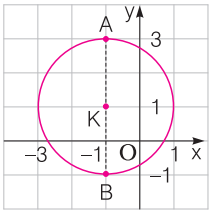
Άρα, η ευθεία (ε) είναι τέμνουσα του κύκλου (Κ,R).

109 Θέμα 2 – 19039

α. Η εξίσωση (1) γίνεται:

$(x-1)(x+3)+(y+1)(y-3)=-4 \Leftrightarrow x^2+3x-x-3+y^2-3y+y-3=-4 \Leftrightarrow x^2+2x+y^2-2y=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2-2y+1=2+1+1 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2=2^2$, (2) .



Άρα η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1,1)$ και ακτίνα $R=2$.

β. i. Για $x=-1$ η εξίσωση (2) γίνεται:

$(-1+1)^2+(y-1)^2=2^2 \Leftrightarrow (y-1)^2=4 \Leftrightarrow y-1=2$ ή $y-1=-2 \Leftrightarrow y=3$ ή $y=-1$

Άρα τα σημεία είναι: $A(-1,3)$ και $B(-1,-1)$.

ii. Το μέσο του AB είναι $\left(\frac{-1-1}{2}, \frac{3-1}{2}\right)$ ή $(-1,1)$, δηλαδή το κέντρο K του κύκλου. Άρα τα A και B είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου.

110 Θέμα 4 – 18567

α. i. Ο κύκλος C έχει κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=2$.

Το σημείο $A(2\sqrt{2},0)$ είναι εξωτερικό του κύκλου C γιατί $(OA)=|x_A-x_O|=2\sqrt{2}>\rho=2$.

ii. Οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο $A(2\sqrt{2},0)$ είναι:

- Η κατακόρυφη $x=2\sqrt{2}$ που δεν είναι εφαπτομένη του κύκλου C γιατί $d(O,\varepsilon)=2\sqrt{2}$.
- Οι ευθείες με εξίσωση (ε): $y-0=\lambda(x-2\sqrt{2})$ με $\lambda\in\mathbb{R}$ ή $\lambda x-y-2\lambda\sqrt{2}=0$.

Η (ε) είναι εφαπτομένη του C αν και μόνο αν $d=(O,\varepsilon)=\rho \Leftrightarrow \frac{|\lambda\cdot 0-0-2\lambda\sqrt{2}|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\,|\lambda|=2\sqrt{\lambda^2+1} \Leftrightarrow 8\lambda^2=4\lambda^2+4 \Leftrightarrow 4\lambda^2-4=0 \Leftrightarrow \lambda^2=1 \Leftrightarrow \lambda=\pm 1$.

Για $\lambda=1$, (ε_1): $y=x-2\sqrt{2}$ και για $\lambda=-1$, (ε_2): $y=-x+2\sqrt{2}$.

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι 1 και −1 αντίστοιχα και $\lambda_1\cdot\lambda_2=-1$. Άρα οι εφαπτόμενες ευθείες ε_1 και ε_2 του κύκλου από το σημείο A είναι μεταξύ τους κάθετες.

β. Αν B, Γ τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων ευθειών ε_1 και ε_2 με τον κύκλο C , τότε οι ακτίνες του κύκλου στα σημεία αυτά είναι κάθετες στις αντίστοιχες εφαπτόμενες. Οπότε το τετράπλευρο $AB\Gamma$ έχει 3 ορθές γωνίες, οπότε είναι ορθογώνιο και αφού $O\Gamma = OB = 2$ ως ακτίνες του κύκλου είναι ρόμβος. Άρα το $AB\Gamma$ είναι τετράγωνο με πλευρά ίση με την ακτίνα του κύκλου, δηλαδή 2. Επομένως $(AB\Gamma)=2^2=4$.

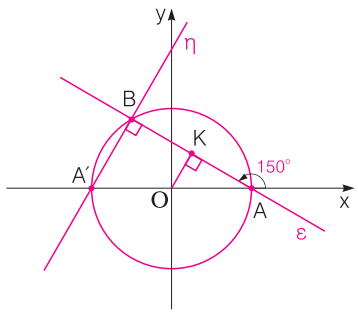
111 Θέμα 4 – 18569

α. i. Ο κύκλος C έχει κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Για $y = 0$ έχουμε: $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Άρα $A'(-1,0)$ και $A(1,0)$.

ii. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$, είναι $\lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Οπότε ε : $y - 0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1) \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1) \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}x - y + \frac{\sqrt{3}}{3} = 0$.



β. i. Αν OK το απόστημα της χορδής AB , τότε

$$OK = d(O,\varepsilon) = \frac{\left|-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 0 - 0 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1^2}} = \frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{\frac{12}{9}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{2\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{2} .$$

Αν $AK = \mu = \frac{AB}{2}$, με Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο OAK έχουμε:

$OK^2 + AK^2 = OA^2 \Leftrightarrow AK^2 = 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow AK^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow AK = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Άρα $AB = \sqrt{3}$.

ii. Η γωνία $A'\hat{B}A$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, άρα $A'B \perp BA$ δηλαδή $\eta \perp \varepsilon$, οπότε

$\lambda_\eta = -\frac{1}{\lambda_\varepsilon} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ και $(\eta): y - 0 = \sqrt{3}(x+1) \Leftrightarrow y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$.

112 Θέμα 4 – 14954

α. Για την (ε_1) είναι $B = -1 \neq 0$ και για την (ε_2) είναι $A = \mu + 1 \neq 0$ ή $B = \mu - 1 \neq 0$, οπότε $A = 0 \Leftrightarrow \mu = -1$ και $B = 0 \Leftrightarrow \mu = 1$. Έτσι, δεν υπάρχει τιμή της παραμέτρου μ η οποία να μηδενίζει ταυτόχρονα τους συντελεστές A και B των εξισώσεων.
Άρα παριστάνουν ευθείες για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

β. Το $\vec{\delta}_1 = (1,\mu)$ είναι παράλληλο στην (ε_1) και $\vec{\delta}_2 = (1-\mu, 1+\mu)$ είναι παράλληλο στην (ε_2) .
Οπότε η οξεία γωνία θ των (ε_1) και (ε_2) θα είναι ίση ή παραπληρωματική της οξείας γωνίας φ των διανυσμάτων $\vec{\delta}_1$ και $\vec{\delta}_2$. Είναι $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1|\cdot|\vec{\delta}_2|}$.

Είναι
- $\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2 = 1\cdot(1-\mu) + \mu\cdot(1+\mu) = 1 - \mu + \mu + \mu^2 = 1 + \mu^2$.
- $|\vec{\delta}_1| = \sqrt{1+\mu^2}$
- $|\vec{\delta}_2| = \sqrt{(1-\mu)^2 + (1+\mu)^2} = \sqrt{1 - 2\mu + \mu^2 + 1 + 2\mu + \mu^2} = \sqrt{2 + 2\mu^2} =$
  $= \sqrt{2(1+\mu^2)} = \sqrt{2}\sqrt{1+\mu^2} = \sqrt{2}\cdot|\vec{\delta}_1|$

Οπότε $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{1+\mu^2}{|\vec{\delta}_1|\cdot\sqrt{2}\cdot|\vec{\delta}_1|} = \frac{1+\mu^2}{\sqrt{2}|\vec{\delta}_1|^2} = \frac{1+\mu^2}{\sqrt{2}(1+\mu^2)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\hat{\theta} = \hat{\varphi} = 45^\circ$.

γ. Για να βρούμε που τέμνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (ε_1) και (ε_2). Είναι (ε_1): $y = \mu x - \mu$ και η (ε_2) δίνεται

$(\mu+1)x + (\mu-1)(\mu x - \mu) - \mu + 1 = 0 \Leftrightarrow (\mu+1)x + \mu(\mu-1)x - \mu(\mu-1) - \mu + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\mu + 1 + \mu^2 - \mu)x - \mu^2 + \mu - \mu + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1}$.

Οπότε $y=\mu\frac{\mu^2-1}{\mu^2+1}-\mu=\frac{\mu^3-\mu-\mu^3-\mu}{\mu^2+1}=\frac{-2\mu}{\mu^2+1}$.

Άρα τα σημεία τομής των (ε_1) και (ε_2) είναι τα $M\left(\frac{\mu^2-1}{\mu^2+1},\frac{-2\mu}{\mu^2+1}\right)$ για κάθε τιμή $\mu\in\mathbb{R}$.

Ο κύκλος C έχει εξίσωση $x^2+y^2=1$. Είναι

$$\left(\frac{\mu^2-1}{\mu^2+1}\right)^2+\left(\frac{-2\mu}{\mu^2+1}\right)^2=\frac{\mu^4-2\mu^2+1+4\mu^2}{(1+\mu^2)^2}=\frac{\mu^4+2\mu^2+1}{(1+\mu^2)^2}=1$$

Άρα τα σημεία M ανήκουν στον κύκλο C .

113 Θέμα 4 – 22239

α)

i. Ο κύκλος έχει κέντρο το Ο(0,0) και ακτίνα ρ = 2. Η εξίσωση κύκλου με κέντρο το Ο(0,0) είναι της μορφής $x^2 + y^2 = \rho^2$. Επομένως η εξίσωση γίνεται $x^2 + y^2 = 4$.

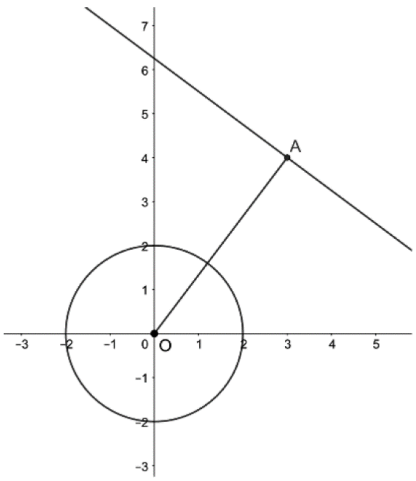
ii. Για να διέρχεται ο αγωγός από το κέντρο Ο θα πρέπει οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν την εξίσωση 3x+4y = 25, δηλαδή $3\cdot 0+4\cdot 0=0$, που δεν είναι ίσο με 25. Επομένως, ο αγωγός δεν διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού.

iii. Για να έχουμε την ελάχιστη δυνατή απόσταση θα πρέπει να φέρουμε την κάθετη ΟΑ από το κέντρο Ο προς την ευθεία του αγωγού. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας του αγωγού είναι $\lambda_1 = -\frac{A}{B}=-\frac{3}{4}$. Για να είναι η ΑΟ κάθετη στον αγωγό πρέπει $\lambda_1\lambda_{AO}=-1$ ή $-\frac{3}{4}\lambda_{AO}=-1$ ή $\lambda_{AO}=\frac{4}{3}$. Η εξίσωση της ΑΟ θα είναι:

$y-y_O=\lambda_{AO}(x-x_O)$ ή $y-0=\frac{4}{3}(x-0)$ ή $y=\frac{4}{3}x$. Το σημείο Α είναι το σημείο τομής της ΑΟ και της ευθείας του αγωγού. Για να βρεθεί λύνουμε το σύστημά τους.

$$\begin{cases}3x+4y=25 & (1)\\ y=\frac{4}{3}x & (2)\end{cases}$$

Η (1) γίνεται $3x+4\frac{4}{3}x=25$ ή 9x + 16x = 75 ή 25x = 75, δηλαδή x = 3. Η (2) γίνεται $y=\frac{4}{3}3=4$. Επομένως το σημείο Α είναι το (3,4).



β) Για να εφάπτεται ο δρόμος του κυκλικού σιντριβανιού πρέπει η απόσταση του κέντρου Ο από την ευθεία του δρόμου να ισούται με την ακτίνα του κύκλου, δηλαδή d(O,ε) = ρ.

d(O,ρ) = $\frac{|Ax_o+By_o+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|\lambda\cdot 0+0+\lambda-2|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=2$ ή $\frac{|\lambda-2|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=2$ ή $|\lambda-2|=2\sqrt{\lambda^2+1}$

$|\lambda-2|^2=\left(2\sqrt{\lambda^2+1}\right)^2$ ή $\lambda^2-4\lambda+4=4\left(\lambda^2+1\right)$ ή $3\lambda^2+4\lambda=0$ ή λ(3λ+4) = 0.

Έχουμε λ = 0 που απορρίπτεται λόγω της υπόθεσης (λ ≠ 0) ή λ = - $\frac{4}{3}$.

114 Θέμα 4 – 22214

α) $\vec{AM}=(x_M-x_A,y_M-y_A)=(x-(-1),y-0)=(x+1,y)$. $\left|\vec{AM}\right|=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$

$\vec{BM}=(x_M-x_B,y_M-y_B)=(x-1,y-0)=(x-1,y)$. $\left|\vec{BM}\right|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

$\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(1-(-1))^2+(0-0)^2}=\sqrt{2^2+0}=2$.

$\vec{AM}^2+\vec{BM}^2=9\left|\vec{AB}\right|$, άρα $\left|\vec{AM}\right|^2+\left|\vec{BM}\right|^2=9\cdot 2$ ή $\left(\sqrt{(x+1)^2+y^2}\right)^2+\left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right)^2=18$ ή

$x^2+2x+1+y^2+x^2-2x+1+y^2=18$ ή $2x^2+2y^2+2=18$ ή $x^2+y^2=8$

β)

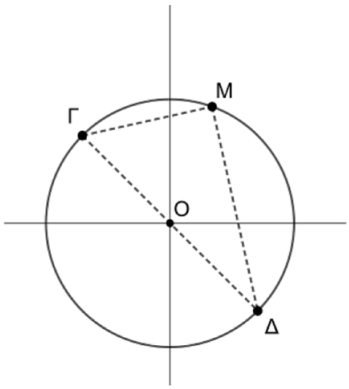
i. Για τα σημεία Γ και Δ του κύκλου ισχύει $\Gamma\Delta^2=32$

δηλαδή ΓΔ = $\sqrt{32}=\sqrt{16\cdot 2}=4\sqrt{2}$.

Η εξίσωση του κύκλου είναι $x^2+y^2=8$, οπότε η ακτίνα του ρ είναι ρ = $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ και το κέντρο του το Ο(0,0).

Παρατηρούμε ότι ΓΔ = 2ρ, οπότε τα σημεία Γ και Δ είναι αντιδιαμετρικά και επομένως η διάμετρος ΓΔ θα διέρχεται από το κέντρο Ο του κύκλου.

ii. Αφού η ΓΔ είναι διάμετρος και το σημείο Μ είναι σημείο του κύκλου, τότε η γωνία $\Gamma\hat{M}\Delta=90^o$ γιατί είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο. Επειδή τα διανύσματα $\vec{M\Gamma}$ και $\vec{M\Delta}$ είναι κάθετα, το εσωτερικό τους γινόμενο θα ισούται με μηδέν.



115 Θέμα 4 – 18237

α. Είναι: $\overrightarrow{AB}=(4,0)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(2,2)$ και $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})=\begin{vmatrix}4 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix}=8\neq 0$.

Άρα τα σημεία Α, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά, οπότε σχηματίζουν τρίγωνο.

β. Η πλευρά ΒΓ έχει μέσο το σημείο $M\left(\frac{3+1}{2},\frac{2+4}{2}\right)$ δηλαδή το $M(2,3)$ και συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{B\Gamma}=\frac{4-2}{1-3}=\frac{2}{-2}=-1$, οπότε η μεσοκάθετη (ε) της ΒΓ που διέρχεται από το Μ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=1$. Επομένως (ε): $y-3=x-2\Leftrightarrow y=x+1$.

γ. Έστω $K(x,y)$ το σημείο της μεσοκάθετης που ισαπέχει από τα σημεία Α, Β . Είναι $y=x+1$, οπότε: $K(x,x+1)$. Έχουμε

$$(KA)=(KB)\Leftrightarrow (KA)^2=(KB)^2\Leftrightarrow (x+1)^2+(x-1)^2=(x-3)^2+(x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1=x^2-6x+9\Leftrightarrow 8x=8\Leftrightarrow x=1$$

Άρα, $K(1,2)$.

δ. Είναι $(KA)=(KB)=(K\Gamma)$ οπότε το σημείο Κ ισαπέχει από τις κορυφές Α, Β, Γ του τριγώνου, άρα είναι το περίκεντρό του. Επιπλέον $\rho=(KA)=\sqrt{(-1-1)^2+(2-2)^2}=\sqrt{4}=2$.

Άρα, ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ έχει εξίσωση $(x-1)^2+(y-2)^2=4$.

116 Θέμα 4 – 18247

α. i. Είναι $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{\alpha}{2}$, $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{\beta}{2}$, οπότε $M\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\right)$.

ii. $(OM)=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}-0\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}-0\right)^2}=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}}=\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}}=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}$

β. i. $(AB)=\sqrt{(\alpha-0)^2+(0-\beta)^2}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=2\cdot(OM)$ ή $(OM)=\frac{(AB)}{2}$

ii. Η πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που έχει αποδειχθεί είναι η εξής:
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

γ. Αφού $(OM)=\frac{(AB)}{2}=(AM)=(BM)$ το σημείο Μ ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου ΟΑΒ , οπότε είναι το περίκεντρό του. Η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho=(OM)=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}$.

Άρα ο κύκλος έχει εξίσωση $\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(x-\frac{\beta}{2}\right)^2=\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}$.

117 Θέμα 4 – 22508

α) Το μέσο K του ευθυγράμμου τμήματος $A\Gamma$ έχει συντεταγμένες

$x_K=\frac{x_A+x_\Gamma}{2}=\frac{1+3}{2}=2$ και $y_k=\frac{y_A+y_\Gamma}{2}=\frac{4+0}{2}=2$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $A\Gamma$ είναι ίσος με $\lambda_1=\frac{4-0}{1-3}=-2$, κατά συνέπεια η μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2=\frac{1}{2}$.

Άρα η εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος ΑΓ είναι $y-2=\frac{1}{2}(x-2)$.

β) Το κέντρο του κύκλου διαμέτρου $A\Gamma$ είναι το σημείο $K(2,2)$ και η ακτίνα είναι ίση με $\rho=(AK)=\sqrt{(1-2)^2+(4-2)^2}=\sqrt{5}$.

Επομένως η εξίσωση του κύκλου διαμέτρου ΑΓ είναι $(x-2)^2+(y-2)^2=5$.

γ) Οι ζητούμενες κορυφές B,Δ του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ ισαπέχουν από τα σημεία Α, Γ και βλέπουν το ΑΓ υπό ορθή γωνία, άρα είναι τα σημεία τομής της μεσοκαθέτου του τμήματος $A\Gamma$ και του κύκλου διαμέτρου $A\Gamma$.

Λύνουμε το σύστημα :

$y-2=\frac{1}{2}(x-2)$ (1)

$(x-2)^2+(y-2)^2=5$ (2)

Η εξίσωση (2) με τη βοήθεια της (1) γράφεται

$(x-2)^2+\frac{1}{4}(x-2)^2=5 \Leftrightarrow 4(x-2)^2+(x-2)^2=20 \Leftrightarrow 5(x-2)^2=20 \Leftrightarrow$

$(x-2)^2=4 \Leftrightarrow x-2=2$ ή $x-2=-2 \Leftrightarrow x=4$ ή $x=0$.

Για $x=4$ βρίσκουμε $y=3$ και για $x=0$ βρίσκουμε $y=1$.

Επομένως οι ζητούμενες κορυφές είναι τα σημεία $(4,3)$ και $(0,1)$.

118 Θέμα 4 – 15030

α. Ο κύκλος C έχει κέντρο το $K(2,-3)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$.

β. Είναι $d(K,\varepsilon)=\frac{|2\cdot 2+1\cdot(-3)+5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|6|}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}>\sqrt{5}=\rho$, οπότε ο κύκλος C και η ευθεία (ε) δεν έχουν κοινά σημεία.

γ. Είναι $\lambda_\varepsilon=-2$.

Κάθε ευθεία (η) παράλληλη στην (ε) έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης με την ευθεία (ε), δηλαδή $\lambda_\eta=-2$.

Οπότε (η): $y=-2x+\beta \Leftrightarrow 2x+y-\beta=0$.

Πρέπει $d(K,\eta)=\rho \Leftrightarrow \frac{|2\cdot 2+1\cdot(-3)-\beta|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|1-\beta|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow |1-\beta|=5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-\beta=5$ ή $1-\beta=-5 \Leftrightarrow \beta=-4$ ή $\beta=6$

Άρα έχουμε δύο εφαπτόμενες τις $\eta_1: 2x+y+4=0$ και $\eta_2: 2x+y-6=0$.

δ. Είναι $d(K,\eta_1)=d(K,\eta_2)=\rho$ δηλαδή το $K(2,-3)$ ισαπέχει από τις ευθείες (η_1), (η_2) οπότε ανήκει στη μεσοπαράλληλή τους. Η ζητούμενη μεσοπαράλληλη ως παράλληλη στις (η_1), (η_2) θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-2$.

Άρα η μεσοπαράλληλη είναι η $y+3=-2(x-2) \Leftrightarrow y=-2x+1$.

119 Θέμα 4 – 15646

α. Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K(1,1)$ και ακτίνα $\rho=3$ ενώ ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $\Lambda(4,4)$ και ακτίνα $\rho=3$. Είναι $x_K=y_K$ και $x_\Lambda=y_\Lambda$, οπότε τα K,Λ βρίσκονται στην ευθεία με εξίσωση $y=x$, που είναι διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$.

β. Για να βρούμε τα σημεία τομής των κύκλων C_1 και C_2 θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεών τους. Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$(x-1)^2+(y-1)^2-(x-4)^2-(y-4)^2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2-(x-4)^2=(y-4)^2-(y-1)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(2x-5)=-3(2y-5) \Leftrightarrow 2x-5=5-2y \Leftrightarrow y=5-x$.

Αντικαθιστώντας την τιμή του y στην $(x-1)^2+(y-1)^2=9$,

προκύπτει $(x-1)^2+(4-x)^2=9 \Leftrightarrow 2x^2-10x+8=0 \leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=4$

αντίστοιχες τιμές $y=4$ ή $y=1$. Άρα τα σημεία τομής των κύκλων C_1 και C_2 είναι $B(1,4)$ και $\Gamma(4,1)$.

γ. Έστω $A(x,y)$ που ανήκει στην ευθεία $y=x$. Οπότε έχουμε $A(x,x)$.

Είναι: • $\vec{AB}=(1-x,4-x)$ και $\vec{A\Gamma}=(4-x,1-x)$

• $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}|\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}1-x & 4-x\\ 4-x & 1-x\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|(1-x)^2-(4-x)^2|=\frac{1}{2}|6x-15|$

Οπότε $(AB\Gamma)=\frac{21}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}|6x-15|=\frac{21}{2} \Leftrightarrow |6x-15|=21 \Leftrightarrow \begin{cases}6x-15=21\\ 6x-15=-21\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=6\\ x=-1\end{cases}$

Άρα τα σημεία είναι $A(6,6)$ και $A'(-1,-1)$.

120 Θέμα 4 – 15082

α. Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K(2,3)$ και ακτίνα $\rho_1=2\sqrt{2}$, ενώ ο κύκλος C_2 κέντρο $\Lambda(7,-2)$ και ακτίνα $\rho_2=3\sqrt{2}$. Οπότε έχουμε $(K\Lambda)=\sqrt{(7-2)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{5^5+5^2}=5\sqrt{2}$.

Ακόμα $\rho_1+\rho_2=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}$, δηλαδή $(K\Lambda)=\rho_1+\rho_2$.

Άρα οι κύκλοι C_1, C_2 εφάπτονται εξωτερικά.

β. i. Έχουμε $y-3=\frac{-2-3}{7-2}(x-2) \Leftrightarrow y-3=-1(x-2) \Leftrightarrow y=-x+5$.

ii. Θα βρούμε τα σημεία τομής της ευθείας $K\Lambda$ με τον κύκλο C_1 . Έχουμε

$\begin{cases}(x-2)^2+(y-3)^2=8\\ y=-x+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2+(-x+2)^2=8\\ y=-x+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2=4\\ y=-x+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-2=\pm 2\\ y=-x+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4 \text{ ή } x=0\\ y=1 \text{ ή } y=5\end{cases}$.

Οπότε τα κοινά σημεία της ευθείας $K\Lambda$ με τον κύκλο C_1 είναι τα $A(4,1)$ και $A'(0,5)$.

Είναι $(\Lambda A)=\sqrt{(7-4)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}=\rho_2$.

Άρα το κοινό σημείο της ευθείας και με τους δύο κύκλους είναι το $A(4,1)$, οπότε είναι το σημείο επαφής.

γ. Η κοινή εσωτερική εφαπτομένη (η) των δύο κύκλων είναι κάθετη στην ευθεία $K\Lambda$ και διέρχεται από το σημείο επαφής $A(4,1)$.

Στο ερώτημα **β.i.** έχουμε $\lambda_{K\Lambda}=-1$, οπότε $\lambda_\eta \cdot \lambda_{K\Lambda}=-1 \Leftrightarrow \lambda_\eta \cdot (-1)=-1 \Leftrightarrow \lambda_\eta=1$, και η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων έχει εξίσωση:

$(\eta): y-1=1(x-4) \Leftrightarrow y=x-3$.

121 Θέμα 4 - 20091

α. i. Το μέσο M του τμήματος AB είναι $M\left(\frac{-7+3}{2}, \frac{-1-5}{2}\right)$ ή $M(-2, -3)$.

ii. Είναι $\lambda_{AB}=\frac{-5+1}{3+7}=-\frac{2}{5}$ και $KM \perp AB \Leftrightarrow \lambda_{KM}\cdot\lambda_{AB}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{KM}=\frac{5}{2}$.

Άρα $(KM): y-y_M=\frac{5}{2}(x-x_M) \Leftrightarrow y+3=\frac{5}{2}(x+2) \Leftrightarrow 2y+6=5x+10 \Leftrightarrow 5x-2y+4=0$.

β. i. Το κέντρο K του κύκλου ανήκει στην ευθεία δ και στην ευθεία KM . Άρα οι συντεταγμένες του K είναι η λύση του συστήματος.

$$\begin{cases} 5x-2y=-4 \\ x+y=-12 \end{cases} \Big| \cdot 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-2y=-4 \\ 2x+2y=-24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x=-28 \\ x+y=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-8 \end{cases}$$

Άρα $K(-4\,,-8)$.

ii. Είναι $\rho=(KA)=\sqrt{(-4+7)^2+(-8+1)^2}=\sqrt{9+49}=\sqrt{58}$.

Άρα: $C:(x+4)^2+(y+8)^2=58$.

122 Θέμα 4 - 15189

α. Είναι:

- $K\left(\dfrac{-2+2}{2}\,,\dfrac{0-2}{2}\right)$ δηλαδή $K(0\,,-1)$.
- $|\vec{AB}|=\sqrt{(2-(-2))^2+(-2-0)^2}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

β. Ο κύκλος C με διάμετρο AB έχει κέντρο το μέσο της $K(0\,,-1)$ και ακτίνα $\rho=\dfrac{|\vec{AB}|}{2}=\sqrt{5}$.

Άρα $C:x^2+(y+1)^2=5$.

γ. Έστω $M(x\,,y)$. Είναι $\vec{AM}=(x+2\,,y)$ και $\vec{AB}=(4\,,-2)$.

Έχουμε: $(ABM)=5\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}|(\det\vec{AB}\,,\vec{AM})|=5\Leftrightarrow\left|\begin{vmatrix}4 & -2\\ x+2 & y\end{vmatrix}\right|=10\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow|4y+2(x+2)|=10\begin{cases}4y+2x+4=10\\ \text{ή}\\ 4y+2x+4=-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+4y-6=0\\ \text{ή}\\ 2x+4y+14=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y-3=0\\ \text{ή}\\ x+2y+7=0\end{cases}$$

Άρα τα σημεία $M(x\,,y)$ ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1:x+2y-3=0$ και $\varepsilon_2:x+2y+7=0$.

δ. Είναι:
- $d(K\,,\varepsilon_1)=\dfrac{|0+2(-1)-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}=\rho$
- $d(K\,,\varepsilon_2)=\dfrac{|0+2(-1)+7|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}=\rho$

Άρα οι ευθείες ε_1, ε_2 εφάπτονται του κύκλου C.

123 Θέμα 4 – 22280

α) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$, με $A=-6$, $B=-8$, $\Gamma=21$ και $A^2+B^2-4\Gamma=36+64-84=16>0$.

Επομένως, το κέντρο Κ του κύκλου είναι

$$K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=(3,4)$$

και η ακτίνα του ισούται με

$$R=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{16}}{2}=2$$

Η εξίσωση (2) είναι της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$, με $A=2$, $B=-2$, $\Gamma=1$ και $A^2+B^2-4\Gamma=4+4-4=4>0$.

Επομένως, το κέντρο Λ του κύκλου είναι

$$\Lambda\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=(-1,1)$$

και η ακτίνα του ισούται με

$$\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{4}}{2}=1$$

β) Η απόσταση των κέντρων των δύο κύκλων είναι

$$(K\Lambda)=\sqrt{(x_\Lambda-x_K)^2+\left(y_\Lambda-y_K\right)^2}=\sqrt{16+9}=5$$

Επίσης, $R+\rho=3$.

Αφού $(K\Lambda)>R+\rho$, συμπεραίνουμε ότι οι δύο κύκλοι βρίσκονται ο ένας εξωτερικά του άλλου.

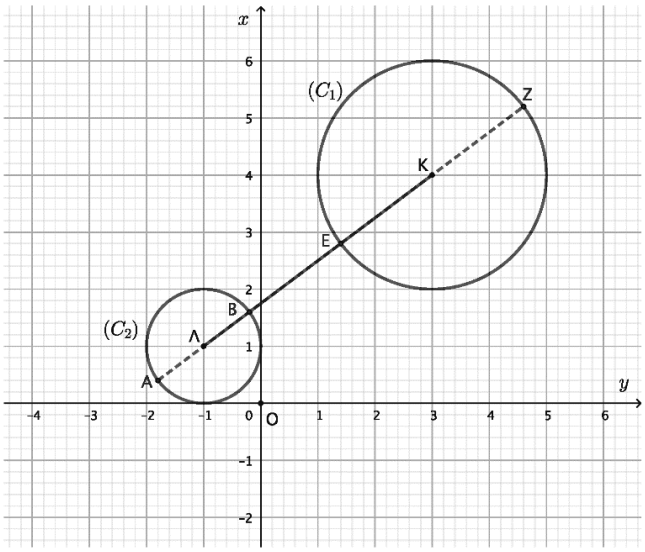
γ) Φέρουμε τη διακεντρική ευθεία ΚΛ, η οποία τέμνει τον κύκλο (Κ, R) στα σημεία Ε και Ζ και τον κύκλο (Λ, ρ) στα σημεία Α και Β, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Η ελάχιστη απόσταση του τυχαίου σημείου Μ του κύκλου (Κ, R) από το τυχαίο σημείο Ν του κύκλου (Λ, ρ) ισούται με (ΒΕ), οπότε:

$$(BE)=(K\Lambda)-(EK)-(\Lambda B)=(K\Lambda)-R-\rho=5-2-1=2$$

Η μέγιστη απόσταση του τυχαίου σημείου Μ του κύκλου (Κ, R) από το τυχαίο σημείο Ν του κύκλου (Λ, ρ) ισούται με (ΑΖ), οπότε:

$$(AZ)=(K\Lambda)+(A\Lambda)+(KZ)=(K\Lambda)+R+\rho=5+2+1=8$$



124 Θέμα 4 – 18415

α. Η (1) παριστάνει για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ κύκλο με κέντρο $K(3\lambda,-2\lambda)$ που ανήκει στην ευθεία ε: $2x+3y=0$, αφού $2\cdot3\lambda+3(-2\lambda)=6\lambda-6\lambda=0$.

β. Αν $M(x,y)\in\varepsilon_1$ ή ε_2, τότε $d(M,\varepsilon)=1\Leftrightarrow\frac{|2x+3y|}{\sqrt{2^2+3^2}}=1\Leftrightarrow|2x+3y|=\sqrt{13}\Leftrightarrow2x+3y-\sqrt{13}=0$ ή $2x+3y+\sqrt{13}=0$ που είναι οι εξισώσεις των ευθειών ε_1, ε_2.

γ. Αφού τα κέντρα $K(3\lambda, -2\lambda)$ όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1), ανήκουν στην $\varepsilon: 2x+3y=0$, δηλαδή στη μεσοπαράλληλη των ε_1, ε_2, έχουμε ότι $d(K, \varepsilon_1) = d(K, \varepsilon_2) = 1 = \rho$. Οπότε όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) εφάπτονται στις ευθείες ε_1, ε_2.

δ. Το τετράγωνο του οποίου οι δύο απέναντι πλευρές ανήκουν στις ευθείες ε_1, ε_2, θα έχει μήκος πλευράς ίσο με την απόσταση των ε_1, ε_2, δηλαδή 2. Συνεπώς το εμβαδόν του θα είναι ίσο με 4.

125 Θέμα 4 – 15993

α. Η (1) γράφεται $(x-2)^2 + (y-\lambda)^2 = (\sqrt{\lambda^2+1})^2$, επομένως παριστάνει κύκλο με κέντρο το $K(2, \lambda)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{\lambda^2+1}$, διότι $\lambda^2+1>0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β. Η εξίσωση (1) γίνεται $x^2-4x+4+y^2-2\lambda y+\lambda^2 = \lambda^2+1 \Leftrightarrow 2\lambda y = (x-2)^2+y^2-1$.

Πρέπει $\begin{cases} 2y=0 \\ (x-2)^2+y^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ (x-2)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=3 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases}$.

Επομένως όλοι οι κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία, τα $A(1, 0)$ και $B(3, 0)$.

γ. Η κοινή χορδή των κύκλων (1) είναι το ευθύγραμμο τμήμα AB επειδή $y_A = y_B = 0$ έχει εξίσωση $y=0$.
Τα κέντρα όλων των κύκλων είναι της μορφής $K(2, \lambda)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$. Άρα, η ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα όλων των κύκλων, είναι η κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση $x=2$.
Επομένως είναι κάθετη στην κοινή χορδή.

δ. Αφού το σημείο $M(\alpha, \beta)$ επαληθεύει την (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, πρέπει υποχρεωτικά να είναι ή το $A(1, 0)$ ή το $B(3, 0)$, οπότε $\beta = 0$, άρα $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot 0 = 0$.

126 Θέμα 4 – 15791

α. Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $A(0,7)$ και ακτίνα $\rho = 2$, οπότε έχει εξίσωση
$(x-0)^2+(y-7)^2 = 2^2 \Leftrightarrow x^2+(y-7)^2 = 4$

β. i. $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2 = 4$

ii. $(AB) = \sqrt{(0-x_1)^2+(7-y_1)^2} \Leftrightarrow (AB) = \sqrt{x_1^2+(7-y_1)^2}$

γ. Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά αν και μόνο αν η διάκεντρος είναι ίση με το άθροισμα των ακτίνων τους. Οπότε έχουμε:

$(AB) = 2+2 \Leftrightarrow \sqrt{(x_1-0)^2+(y_1-7)^2} = 4 \Leftrightarrow x_1^2+(y_1-7)^2 = 16$, (1)

Ένας κύκλος εφάπτεται σε ευθεία αν και μόνο αν το κέντρο του κύκλου απέχει από την ευθεία απόσταση ίση με την ακτίνα του. Οπότε έχουμε: $d(A, B) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{|0+x_1-5|}{\sqrt{0^2+1^2}} = 2 \Leftrightarrow |x_1-5| = 2$, (2).

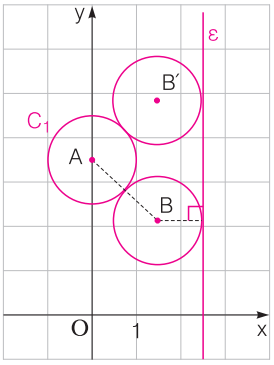
Για να βρούμε τους κύκλους που εφάπτονται στον κύκλο C_1 και στην ευθεία (ε) επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2):

$$\begin{cases} x_1^2+(y_1-7)^2 = 16 \\ |x_1-5| = 2 \end{cases}$$

Προκύπτουν τα παρακάτω συστήματα:

- $\begin{cases} x_1^2+(y_1-7)^2 = 16 \\ x_1-5 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7^2+(y_1-7)^2 = 16 \\ x_1 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y_1-7)^2 = -33 \\ x_1 = 7 \end{cases}$, αδύνατο.
- $\begin{cases} x_1^2+(y_1-7)^2 = 16 \\ x_1-5 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^2+(y_1-7)^2 = 16 \\ x_1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y_1-7)^2 = 7 \\ x_1 = 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 7-\sqrt{7} \text{ ή } y_2 = 7+\sqrt{7} \\ x_1 = 3 \end{cases}$$



Άρα οι κύκλοι που εφάπτονται εξωτερικά στον κύκλο C_1 και στην ευθεία (ε) έχουν κέντρα τα σημεία $B(3, 7-\sqrt{7})$ και $B'(3, 7+\sqrt{7})$ και ακτίνα $\rho = 2$.

127 Θέμα 4 – 15272

α. Η εξίσωση γράφεται

$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$

οπότε παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(1, -2)$ και ακτίνα $\rho = 2$.

β. Είναι: $(KM) = \sqrt{(3-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{20} > \rho = 2$.

Οπότε το $M(3, 2)$ βρίσκεται έξω από τον κύκλο.

γ. Όλες οι ευθείες που διέρχονται από το $M(3, 2)$ είναι:

• Η κατακόρυφη ευθεία $x = 3 \Leftrightarrow x - 3 = 0$. Η ευθεία αυτή απέχει από το κέντρο $K(1, -2)$ του κύκλου απόσταση $d = \dfrac{|1-3|}{\sqrt{1^2+0^2}} = 2 = \rho$. Άρα η κατακόρυφη ευθεία $x = 3$ είναι εφαπτομένη του κύκλου.

• Οι ευθείες με κλίση λ , δηλαδή: $y - 2 = \lambda(x-3) \Leftrightarrow \lambda x - y - 3\lambda + 2 = 0$. Μια τέτοια ευθεία εφάπτεται στον κύκλο, μόνο όταν η απόσταση d του κέντρου K από αυτή είναι ίση με την ακτίνα ρ του κύκλου. Είναι:

$$d = 2 \Leftrightarrow \frac{|\lambda + 2 - 3\lambda + 2|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{|\lambda - 2|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = \lambda^2 + 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{4}$$

Οπότε η άλλη εφαπτομένη του κύκλου που διέρχεται από το M είναι η

$$y - 2 = \frac{3}{4}(x-3) \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$$

Άρα οι εφαπτόμενες του κύκλου είναι οι ευθείες $x = 3$ και $y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{4}$.

128 Θέμα 4 – 15080

α. Για την εξίσωση (1) έχουμε:

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 4 - 4(-8) = 36 > 0 \ , \ -\frac{A}{2} = 1 \ , \ -\frac{B}{2} = 0 \ \text{ και } \ \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = 3$$

δηλαδή παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(1, 0)$ και ακτίνα $\rho_1 = 3$.

Όμοια για την (2) βρίσκουμε ότι παριστάνει κύκλο με κέντρο $\Lambda(3, 0)$ και ακτίνα $\rho_2 = 1$.

β. i. $(K\Lambda) = \sqrt{(3-1)^2 + 0^2} = 2$

ii. Είναι $\rho_1 - \rho_2 = 3 - 1 = 2$ και από το **β.i.** έχουμε $(K\Lambda) = 2 = \rho_1 - \rho_2$, οπότε ο κύκλος C_2 εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου C_1 .

γ. Κάθε ακτίνα του κύκλου C_1 διέρχεται από το σημείο $K(1, 0)$.

Από το $K(1, 0)$ έχουμε τις ευθείες (η): $x = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ (κατακόρυφη)

(ε): $y - 0 = \lambda(x-1) \Leftrightarrow y - \lambda x + \lambda = 0$, που έχουν κλίση $\lambda \in \mathbb{R}$.

Είναι $d(\Lambda, \eta) = \dfrac{|3-1|}{\sqrt{1^2+0^2}} = 2 \neq \rho_2 = 1$, οπότε η ευθεία (η) δεν εφάπτεται του C_2 .

Η (ε) θα εφάπτεται στον C_2 αν και μόνο αν $d(\Lambda, \varepsilon) = \rho_2$. Έχουμε:

$$d(\Lambda, \varepsilon) = \rho_2 \Leftrightarrow \frac{|0 - 3\lambda + \lambda|}{\sqrt{1+\lambda^2}} = 1 \Leftrightarrow |2\lambda| = \sqrt{1+\lambda^2} \Leftrightarrow 3\lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Άρα οι ζητούμενες ακτίνες έχουν εξισώσεις:

(ε_1): $3y - \sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$, όταν $\lambda = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ και (ε_2): $3y + \sqrt{3}x - \sqrt{3} = 0$, όταν $\lambda = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

129 Θέμα 4 – 15081

α. Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$, δηλαδή $K(-\sqrt{2},0)$ και ακτίνα: $\rho_1=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=1$ και ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $\Lambda\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$, δηλαδή $\Lambda(3\sqrt{2},0)$ και ακτίνα: $\rho_2=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=3$.

β. i. Οι ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ είναι:

(ε): $x=0$ (κατακόρυφη)

(η): $y=\lambda x \Leftrightarrow \lambda x-y=0$, που έχουν κλίση $\lambda\in\mathbb{R}$.

Είναι $d(K,\varepsilon)=\frac{|-\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+0^2}}=\sqrt{2}\neq\rho_1=1$ και $d(\Lambda,\varepsilon)=\frac{|3\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+0^2}}=3\sqrt{2}\neq\rho_2=3$.

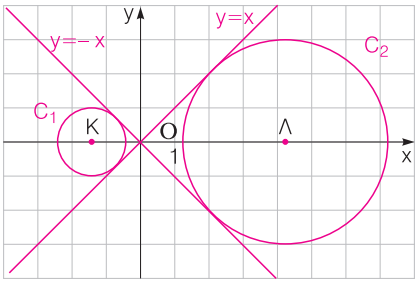
Οπότε η (ε) δεν εφάπτεται των C_1 , C_2 .

Η ευθεία (η) εφάπτεται και στους δύο κύκλους.

$$\begin{cases} d(K,\eta)=\rho_1 \\ d(\Lambda,\eta)=\rho_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|0-\sqrt{2}\lambda|}{\sqrt{1+\lambda^2}}=1 \\ \frac{|0+3\sqrt{2}\lambda|}{\sqrt{1+\lambda^2}}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\sqrt{2}\lambda|=\sqrt{1+\lambda^2} \\ |3\sqrt{2}\lambda|=3\sqrt{1+\lambda^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda^2=1+\lambda^2 \\ 18\lambda^2=9+9\lambda^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=\pm1 \\ \lambda=\pm1 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda=\pm1$$

Άρα, από την αρχή των αξόνων διέρχονται δυο κοινές εφαπτόμενες των κύκλων C_1 , C_2 με εξισώσεις:

$(\eta_1): y=-x$ και $(\eta_2): y=x$



ii. Η αρχή των αξόνων $O(0,0)$ είναι εσωτερικό σημείο της διακέντρου $K\Lambda$, διότι η $K\Lambda$ είναι πάνω στον άξονα $x'x$ και έχει άκρα τα σημεία $K(-\sqrt{2},0)$ και $\Lambda(3\sqrt{2},0)$. Επομένως οι εφαπτόμενες που βρήκαμε στο **β.i.** ερώτημα είναι εσωτερικές, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

130 Θέμα 4 - 18416

α. Η εξίσωση (1) γράφεται: $x^2-4x+y^2-2y=2x+2y-8 \Leftrightarrow x^2-6x+y^2-4y=-8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-2\cdot3\cdot x+3^2+y^2-2\cdot2\cdot y+2^2=3^2+2^2-8 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-2)^2=5$

Άρα η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(3,2)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$.

β. i.
- Η (1) για $x=4$ και $y=4$ γίνεται $0+4\cdot2=2\cdot4$, που ισχύει.
- Η (1) για $x=2$ και $y=0$ γίνεται $2(-2)+0=2\cdot(-2)$, που ισχύει.

Οπότε τα σημεία A και B είναι πάνω στον κύκλο.

Για να είναι αντιδιαμετρικά αρκεί το κέντρο K να είναι το μέσο του τμήματος AB.

Είναι:
- $\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{4+2}{2}=3=x_K$
- $\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{4+0}{2}=2=y_K$

ii. Η κλίση της διαμέτρου AB είναι $\lambda=\frac{0-4}{2-4}=2$

Άρα και οι ζητούμενες εφαπτόμενες έχουν κλίση 2.

Οι ευθείες με κλίση 2 είναι $\varepsilon: y=2x+\beta \Leftrightarrow 2x-y+\beta=0$.

Η ε είναι εφαπτομένη του κύκλου όταν:

$d(K,\varepsilon)=\rho \Leftrightarrow \frac{|2\cdot3-2+\beta|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow |\beta+4|=5 \Leftrightarrow \beta+4=5$ ή $\beta+4=-5 \Leftrightarrow \beta=1$ ή $\beta=-9$.

Άρα οι εφαπτόμενες του κύκλου οι οποίες είναι παράλληλες στην διάμετρο AB έχουν εξισώσεις $\varepsilon_1 : y = 2x + 1$ και $\varepsilon_2 : y = 2x - 9$.

γ. Ισχύει $(\Gamma\Delta) = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} = 2\rho$. Οπότε τα σημεία Γ και Δ είναι αντιδιαμετρικά, άρα η ευθεία (η) πρέπει να διέρχεται από το κέντρο Κ του κύκλου.

Επομένως $2 = 3\lambda + 4 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}$.

131 Θέμα 4 – 15432

α. Είναι $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 16\kappa^2 + 4\kappa^2 - 16 = 20\kappa^2 - 16$

Πρέπει $20\kappa^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow \kappa^2 > \frac{4}{5} \Leftrightarrow |\kappa| > \frac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \kappa < -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ή $\kappa > \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

β. Για κάθε $\kappa \in \left(-\infty, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, +\infty\right)$ έχουμε από έναν κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$, δηλαδή με $K(2\kappa, \kappa)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{20\kappa^2 - 16}}{2}$

γ. Έστω $K(x, y)$. Είναι $\begin{cases} x = 2\kappa \\ y = \kappa \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = \kappa \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ y = \kappa \end{cases}$.

Άρα τα κέντρα ανήκουν στην ευθεία $x - 2y = 0$.

δ. Για $\kappa = 1$ η εξίσωση (1) γίνεται $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$, επομένως είναι $A = -4$, $B = -2$ και $\Gamma = 4$, οπότε το κέντρο είναι $K(2, 1)$ και η ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{20 \cdot 1^2 - 16}}{2} = 1$

Είναι $(K\Gamma) = |y_\Gamma - y_K| = |2 - 1| = 1 = \rho$, οπότε το $\Gamma(2, 2)$ είναι σημείο του κύκλου. Επειδή $x_K = x_\Gamma = 2$ η ΚΓ είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, οπότε επειδή η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο του Γ είναι κάθετη στην ΚΓ θα είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Άρα έχει εξίσωση $y = y_\Gamma \Leftrightarrow y = 2$.

132 Θέμα 4 – 15628

α. Είναι $A^2 + B^2 - 4\Gamma = (4 - 2k)^2 + [-2(1 + k)]^2 - 4 \cdot (5 - 2k) =$

$= 16 - 16k + 4k^2 + 4 + 8k + 4k^2 - 20 + 8k = 8k^2 > 0$ για κάθε $k > 0$.

Άρα η (1) παριστάνει κύκλο με ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{8k^2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}k}{2} = k\sqrt{2}$ και κέντρο $M\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ ή

$M\left(-\frac{4 - 2k}{2}, -\frac{-2(1 + k)}{2}\right)$ ή $M(k - 2, k + 1)$.

β. Έστω $M(x, y)$. Είναι $\begin{cases} x = k - 2 \\ y = k + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = x + 2 \\ y = x + 3 \end{cases}$.

Άρα τα σημεία M ανήκουν στην ευθεία $y = x + 3$, για κάθε $k > 0$.

133 Θέμα 4 – 22264

α) Έχουμε την εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x + \lambda y + \lambda - 1 = 0$ (1), $\lambda \in R$, για την οποία:

$A = \lambda$, $B = \lambda$ και $\Gamma = \lambda - 1$, οπότε $A^2 + B^2 - 4\Gamma = \lambda^2 + \lambda^2 - 4(\lambda - 1) = 2\lambda^2 - 4\lambda + 4 =$

$2(\lambda^2 - 2\lambda + 2) > 0$ για κάθε $\lambda \in R$, εφόσον η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = -4 < 0$.

Άρα η εξίσωση (1), παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in R$.

β) Το κέντρο και η ακτίνα των κύκλων που ορίζονται από την (1), συναρτήσει του λ∈ R

είναι το $K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}) = (-\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2})$ και η

$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma} = \frac{1}{2}\sqrt{2(\lambda^2 - 2\lambda + 2)} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 2}$ αντίστοιχα.

Για να εφάπτεται ο κύκλος που ορίζεται από την (1), της ευθείας ε: x + y + 2 = 0, θα πρέπει d(K, ε) = ρ (2).

Είναι: $d(K, \varepsilon) = \frac{|-\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda}{2}+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|-\lambda+2|}{\sqrt{2}} = \frac{|2-\lambda|}{\sqrt{2}}$, οπότε από τη (2), ισοδύναμα παίρνουμε:

$\frac{|2-\lambda|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 2} \Leftrightarrow |2 - \lambda| = \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 2}$ και υψώνουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης στο τετράγωνο οπότε:

$|2 - \lambda|^2 = \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 2}^{\,2} \Leftrightarrow (2 - \lambda)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 \Leftrightarrow 4 - 4\lambda + \lambda^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 \Leftrightarrow$

$2\lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = 1$ η λύση, που επαληθεύει την αρχική εξίσωση επομένως είναι δεκτή.

Για λ = 1, το κέντρο του εφαπτόμενου κύκλου στην ε είναι το $K(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

και ακτίνα η $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

γ) Για λ = 1, από την εξίσωση (1) παίρνουμε τον κύκλο C: $x^2 + y^2 + x + y = 0$, που λόγω του ερωτήματος (β) έχει κέντρο το $K(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Από το σημείο $M(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ διέρχονται οι ευθείες ζ: $y - y_M = \kappa(x - x_M)$ με κ∈ R ή

ζ: $y + \frac{1}{2} = \kappa(x + \frac{3}{2})$ ή ζ: $2\kappa x - 2y + 3\kappa - 1 = 0$ με κ∈ R.

Η ευθεία ζ εφάπτεται του κύκλου C ⇔ d(K, ζ) = ρ ⇔ $d(K, \zeta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (3).

Όμως $d(K, \zeta) = \frac{|2\kappa(-\frac{1}{2})-2(-\frac{1}{2})+3\kappa-1|}{\sqrt{(2\kappa)^2+(-2)^2}} = \frac{|-\kappa+1+3\kappa-1|}{\sqrt{2}} = \frac{|2\kappa|}{\sqrt{4\kappa^2+4}} = \frac{2|\kappa|}{2\sqrt{\kappa^2+1}} =$

$\frac{|\kappa|}{\sqrt{\kappa^2+1}}$, οπότε από τη (2), ισοδύναμα παίρνουμε:

$\frac{|\kappa|}{\sqrt{\kappa^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και υψώνουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης στο τετράγωνο οπότε:

$\frac{\kappa^2}{\kappa^2+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\kappa^2 = \kappa^2 + 1 \Leftrightarrow \kappa^2 = 1 \Leftrightarrow \kappa = -1$ ή $\kappa = 1$ οι λύσεις, που επαληθεύουν την αρχική εξίσωση επομένως είναι δεκτές.

Για κ = 1 από την εξίσωση της ζ προκύπτει η ζ_1: $2x - 2y + 2 = 0$ ή ζ_1: $x - y + 1 = 0$.

Για κ = -1 από την εξίσωση της ζ προκύπτει η ζ_2: $-2x - 2y - 4 = 0$

Για κ = -1 από την εξίσωση της ζ προκύπτει η $ζ_2$: -2x – 2y - 4 = 0

ή $ζ_2$: x + y +2 = 0. Οι $ζ_1$, $ζ_2$ είναι οι ζητούμενες εφαπτόμενες του κύκλου C από το σημείο Μ. Παρατηρούμε ότι η $ζ_2$ είναι η ευθεία ε που δόθηκε στο ερώτημα (β), κάτι που ήταν αναμενόμενο εφόσον το σημείο Μ ανήκει στην ε (οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν).

134 Θέμα 4 - 21154

α. Έχουμε $A=-4\alpha$, $B=-4\alpha$ και $\Gamma=0$. Είναι $A^2+B^2-4A\Gamma=16\alpha^2+16\alpha^2=32\alpha^2$.

Πρέπει $32\alpha^2>0 \Leftrightarrow \alpha^2>0 \Leftrightarrow \alpha\neq 0$.

β. • Το κέντρο των κύκλων είναι $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ ή $K(2\alpha\,,2\alpha)$, $\alpha\neq 0$.

• Η ακτίνα των κύκλων είναι $R=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4A\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{32\alpha^2}}{2}=\frac{4\sqrt{2}\,|\alpha|}{2}=2\sqrt{2}\,|\alpha|$, $\alpha\neq 0$.

γ. Έχουμε $K(2\alpha\,,2\alpha)$, $\alpha\neq 0$. Έστω $K(x\,,y)$. Είναι $\begin{cases} x=2\alpha \\ y=2\alpha \end{cases}, \alpha\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ x\neq 0 \end{cases}$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων είναι η ευθεία $y=x$ με εξαίρεση το σημείο $O(0\,,0)$, αφού για $x\neq 0$ είναι $y\neq 0$.

δ. Για να εφάπτεται κάποιος από τους κύκλους που ορίζονται από την εξίσωση (1) στον άξονα $x'x$, θα πρέπει να ισχύει: $d(K\,,x'x)=R \Leftrightarrow |y_K|=R \Leftrightarrow |2\alpha|=2\sqrt{2}\,|\alpha| \Leftrightarrow |\alpha|=\sqrt{2}\,|\alpha| \Leftrightarrow |\alpha|(1-\sqrt{2})=0 \Leftrightarrow |\alpha|=0 \Leftrightarrow \alpha=0$.

Όμως, $\alpha\neq 0$, οπότε δεν υπάρχει τιμή του α ώστε ο αντίστοιχος κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση (1) να εφάπτεται στον άξονα $x'x$.

135 Θέμα 4 - 21159

α) Το κέντρο των κύκλων με διάμετρο την ΑΒ, είναι το μέσο της Μ, επομένως

$$M\left(\frac{\alpha+0}{2},\frac{\beta+0}{2}\right) \text{ ή } M\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\right)$$

και η ακτίνα τους είναι

$$\rho=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{(0-\alpha)^2+(\beta-0)^2}}{2}=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}.$$

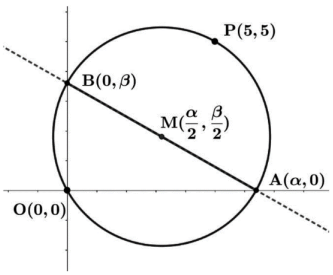
επομένως η εξίσωση των κύκλων είναι:

$$\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\beta}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2-2\cdot x\cdot\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{4}+y^2-2y\frac{\beta}{2}+\frac{\beta^2}{4}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2-\alpha x-\beta y+\cancel{\frac{\alpha^2}{4}}+\cancel{\frac{\beta^2}{4}}=\cancel{\frac{\alpha^2}{4}}+\cancel{\frac{\beta^2}{4}} \Leftrightarrow x^2+y^2-\alpha x-\beta y=0. \quad (1)$$

Είναι όμως $\alpha+\beta=10$, τότε $\beta=10-\alpha$ και η εξίσωση (1) γράφεται:

$$x^2+y^2-\alpha x-(10-\alpha)y=0.$$



β) Για α = 1 έχουμε τον κύκλο C_1 : $x^2+y^2-x-9y=0$. (1)

Για α = 9 έχουμε τον κύκλο C_2: $x^2+y^2-9x-y=0$. (2)

Θα βρούμε τα κοινά σημεία των δύο παραπάνω κύκλων, αν υπάρχουν.

Η αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις των παραπάνω κύκλων έχουμε:

$$8x-8y=0 \Rightarrow x=y$$

τότε από την εξίσωση (2) έχουμε:

$$x^2+x^2-9x-x=0 \Leftrightarrow 2x^2-10x=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=5$$

Για x = 0 έχουμε y = 0 και για x = 5 έχουμε y = 5, άρα οι δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Ο (0,0) και Ρ(5,5).

Όλοι οι κύκλοι διέρχονται από το σημείο Ρ(5,5) αφού οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση των κύκλων $x^2+y^2-\alpha x-(10-\alpha)y=0$.
Πράγματι αντικαθιστώντας τις τιμές $x=5$ και $y=5$ έχουμε:

$$0^2+0^2-\alpha\cdot 0-(10-\alpha)\cdot 0=0 \Leftrightarrow 0=0.$$

Ομοίως, όλοι οι κύκλοι διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

γ) Έστω τυχαίο σημείο Μ(x, y) είναι σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου, αν και μόνο αν

$$\left\{\begin{array}{c} x=\dfrac{\alpha}{2} \\ y=\dfrac{\beta}{2} \\ \alpha+\beta=10,\ \alpha>0,\ \beta>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha=2x \\ \beta=2y \\ \alpha+\beta=10,\ \alpha>0,\ \beta>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 2x+2y=10 \Leftrightarrow x+y=5 \text{ . (ε)}$$

Η παραπάνω ευθεία τέμνει τους άξονες στα σημεία (5,0) και (0,5). Επειδή α, β > 0 έχουμε:

$$\alpha>0 \Leftrightarrow 2x>0 \Leftrightarrow x>0 \text{ και}$$

$$\beta>0 \Leftrightarrow y>0.$$

Συνεπώς ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, που ορίζεται από την ευθεία $x+y=5$ με x > 0 και y > 0 εκτός από τα άκρα του Α(5,0) και Β(0,5).

136 Θέμα 4 – 20229

α. Έχουμε την εξίσωση $x^2+y^2-(\lambda+8)x+\lambda y+7=0$ (1), με $\lambda\in\mathbb{R}$, για την οποία: $A=-(\lambda+8)$, $B=\lambda$ και $\Gamma=7$, οπότε $A^2+B^2-4\Gamma=[-(\lambda+8)]^2+\lambda^2-4\cdot 7=(\lambda+8)^2+\lambda^2-28=$
$=\lambda^2+16\lambda+64+\lambda^2-28=2\lambda^2+16\lambda+36=2(\lambda^2+8\lambda+18)>0$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, εφόσον η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=-8<0$.
Άρα η εξίσωση (1), παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Επίσης το κέντρο των κύκλων που ορίζονται από την (1) έχει συντεταγμένες $\left(-\dfrac{A}{2},-\dfrac{B}{2}\right)$ ή $\left(-\dfrac{-(\lambda+8)}{2},-\dfrac{\lambda}{2}\right)$ ή $\left(\dfrac{\lambda+8)}{2},-\dfrac{\lambda}{2}\right)$, $\lambda\in\mathbb{R}$ και ακτίνα $\rho=\dfrac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(\lambda^2+8\lambda+18)}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

β. Λόγω του ερωτήματος **α.**, τα κέντρα των κύκλων που εκφράζει η εξίσωση (1) είναι τα $K\left(\dfrac{\lambda+8}{2},-\dfrac{\lambda}{2}\right)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Αν $K(x, y)$, τότε: $\begin{cases} x = \dfrac{\lambda+8}{2} \\ y = -\dfrac{\lambda}{2} \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-2y+8}{2} \\ \lambda = -2y \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-4=0 \\ \lambda = -2y \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$.

Άρα τα κέντρα των κύκλων της εξίσωσης (1), κινούνται στην ευθεία ε: $x+y-4=0$.

γ. Η εξίσωση (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ γράφεται:

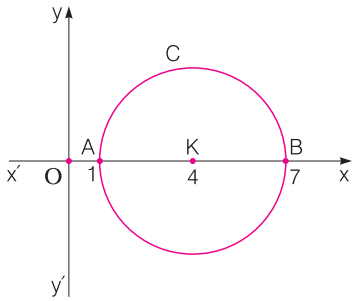
$x^2+y^2-\lambda x-8x+\lambda y+7=0 \Leftrightarrow (x^2+y^2-8x+7)+\lambda(y-x)=0$, οπότε:

$\begin{cases} y-x=0 \\ x^2+y^2-8x+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2-\dfrac{\sqrt{2}}{2} = y$ ή $x = 2+\dfrac{\sqrt{2}}{2} = y$

Επομένως για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, όλοι οι κύκλοι (1), διέρχονται από τα σταθερά σημεία

$M\left(2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και $N\left(2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

δ. Λόγω του ερωτήματος **α.**, για $\lambda=0$ η εξίσωση (1), εκφράζει κύκλο με κέντρο το $K(4, 0)$ και ακτίνα $\rho=3$. Ο κύκλος αυτός φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τα σημεία του κύκλου που απέχουν την ελάχιστη και μέγιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων βρίσκονται πάνω στην OK. Οπότε το σημείο του που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το $O(0, 0)$, είναι το $A(1, 0)$ και το σημείο του που απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση είναι το $B(7, 0)$.



137 Θέμα 4 – 15826

α. Είναι $A^2+B^2-4\Gamma = [-2(\lambda+1)]^2+(-2\lambda)^2-4(2\lambda+1) = 4\lambda^2+8\lambda+4+4\lambda^2-8\lambda-4 = 8\lambda^2$

Πρέπει $8\lambda^2>0 \Leftrightarrow \lambda^2>0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$.

Το κέντρο είναι το $K\left(-\dfrac{A}{2}, \dfrac{B}{2}\right)$ ή $K(\lambda+1, \lambda)$ και η ακτίνα $\rho = \dfrac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2} = \dfrac{\sqrt{8\lambda^2}}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}\,|\lambda|}{2} = \sqrt{2}\,|\lambda|$

β. Για $\lambda=0$ η (1) γίνεται $x^2+y^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ που σημαίνει ότι παριστάνει το σημείο $M(1, 0)$.

γ. i. Η ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα K_1, K_2 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \dfrac{y_{K_1}-y_{K_2}}{x_{K_1}-x_{K_2}} = \dfrac{2-1}{3-2} = 1$

και εξίσωση $\zeta: y-1 = 1(x-2) \Leftrightarrow y = x-1$.

Οι συντεταγμένες του $K(\lambda+1, \lambda)$ επαληθεύουν την εξίσωση $y=x-1$, αφού $\lambda = \lambda+1-1$, για κάθε $\lambda \neq 0$.

Άρα τα κέντρα όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1) βρίσκονται πάνω στην ευθεία ζ.

ii. Οι κύκλοι του σχήματος διέρχονται από το σημείο $M(1, 0)$. Θα αποδείξουμε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από το $M(1, 0)$. Πράγματι οι συντεταγμένες του M επαληθεύουν την (1) για κάθε $\lambda \neq 0$, αφού $1^2+0^2-2(\lambda+1)\cdot 1-2\lambda\cdot 0+2\cdot\lambda+1=0 \Leftrightarrow 0=0$, που ισχύει.

iii. Είναι $d(K, \varepsilon) = \dfrac{|\lambda+1+\lambda-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{2|\lambda|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,|\lambda| = \rho$, οπότε η ε είναι κοινή εφαπτομένη όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1).

138 Θέμα 4 - 21276

α. • Έχουμε $A(\lambda-1, 2\lambda+1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Έστω αν $A(x, y)$. Έχουμε

$\begin{cases} x = \lambda-1 \\ y = 2\lambda+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x+1 \\ y = 2(x+1)+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x+3 \\ \lambda = x+1 \end{cases}$, οπότε $\gamma_1: 2x-y+3=0$

• Ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{u}=(-1\,,\,3)$ είναι

$\lambda=\dfrac{y}{x}=\dfrac{3}{-1}=-3$, οπότε η ευθεία γ_2 έχει κλίση $\lambda=-3$.

Είναι $\gamma_2: y-y_\Sigma=\lambda(x-x_\Sigma)\Leftrightarrow y-2=-3(x+4)\Leftrightarrow y-2=-3x-12\Leftrightarrow 3x+y+10=0$.

β. Είναι: • $d(K\,,\,\gamma_1)=\dfrac{|2\cdot1-1\cdot1+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|4|}{\sqrt5}=\dfrac{4}{\sqrt5}=\dfrac{4\sqrt5}{5}$ και

• $d(K\,,\,\gamma_2)=\dfrac{|3\cdot1+1\cdot1+10|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{|14|}{\sqrt{10}}=\dfrac{14}{\sqrt{10}}=\dfrac{14\sqrt{10}}{10}=\dfrac{7\sqrt{10}}{5}$.

Αφού $\dfrac{4\sqrt5}{5}<\dfrac{7\sqrt{10}}{5}\Leftrightarrow d(K\,,\,\gamma_1)<d(K\,,\,\gamma_2)$, πιο συμφέρουσα είναι η σύνδεση του σταδίου με τη γραμμή γ_1.

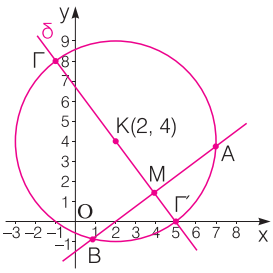
γ. Το κέντρο του κύκλου C που ορίζει το πάρκο γύρω από το στάδιο, είναι το σημείο $K(1\,,\,1)$. Αφού ο κύκλος εφάπτεται στη γραμμή γ_1 , η ακτίνα του είναι $\rho=d(K\,,\,\gamma_1)=\dfrac{4}{\sqrt5}$.

Άρα $C:(x-1)^2+(y-1)^2=\left(\dfrac{4}{\sqrt5}\right)^2\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-1)^2=\dfrac{16}{5}$.

139 Θέμα 4 – 18570

α. $x^2+y^2-4x-8y-5=0\Leftrightarrow x^2-4x+4-4+y^2-8y+16-16-5=0$

$\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-4)^2=25$



Άρα το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο $K(2,4)$ και η ακτίνα του είναι $\rho=5$.

β. i. Η ευθεία τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία αν και μόνο αν η

$d(K,\varepsilon)<\rho\Leftrightarrow\dfrac{|3\cdot2-4\cdot4-\mu|}{\sqrt{3^2+4^2}}<5\Leftrightarrow\dfrac{|-10-\mu|}{5}<5\Leftrightarrow|\mu+10|<25$

$\Leftrightarrow-25<\mu+10<25\Leftrightarrow-35<\mu<15$

ii. Αν η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του κύκλου, τότε οι συντεταγμένες του σημείου K θα επαληθεύουν την εξίσωσή της. Δηλαδή $3\cdot3-4\cdot4=\mu\Leftrightarrow\mu=-10$. Η τιμή $\mu=-10$ είναι δεκτή αφού βρίσκεται στο διάστημα $(-35,15)$ που βρήκαμε στο **β.i.** ερώτημα.

iii. Το ζητούμενο σημείο Γ θα είναι η κορυφή του ισοσκελούς τριγώνου ΓΑΒ με βάση τη χορδή ΑΒ . Άρα το Γ θα ανήκει στη μεσοκάθετο ευθεία (δ) της χορδής ΑΒ που είναι ο φορέας του αποστήματος της χορδής ΑΒ και είναι ευθεία που διέρχεται από το κέντρο K του κύκλου. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε , με $\lambda_\varepsilon=\dfrac{3}{4}$.

Επειδή $\delta\perp\varepsilon$ θα είναι $\lambda_\delta\cdot\lambda_\varepsilon=-1\Leftrightarrow\lambda_\delta=-\dfrac{4}{3}$.

Οπότε η εξίσωση της ευθείας δ είναι:

$y-y_K=-\dfrac{4}{3}(x-x_K)$ ή $y-4=-\dfrac{4}{3}(x-2)\Leftrightarrow3y-12=-4x+8$

$\Leftrightarrow4x+3y=20$. Τα σημεία τομής της ευθείας δ με τον κύκλο είναι τα ζητούμενα σημεία. Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους.

$$(\Sigma)\begin{cases}x^2+y^2-4x-8x-5=0\\ y=\dfrac{1}{3}(20-4x)\end{cases}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\ \text{ή}\ x=-1\\ y=0\ \text{ή}\ y=8\end{cases}$$

Άρα υπάρχουν δύο σημεία του κύκλου τέτοια ώστε, το τρίγωνο ΓΑΒ να είναι ισοσκελές με βάση τη χορδή ΑΒ , τα $\Gamma(5,0)$ και $\Gamma'(-1,8)$.

140 Θέμα 4 – 22223

α) Το διάνυσμα της διαμέσου $\overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}}{2}=\dfrac{(\lambda,\lambda+1)+(3\lambda,\lambda-1)}{2}=$

$=\dfrac{(\lambda+3\lambda,\lambda+1+\lambda-1)}{2}=\dfrac{(4\lambda,2\lambda)}{2}=(2\lambda,\lambda)$.

β)

i. Αφού $B\hat{A}\Gamma=90^{o}$ θα είναι $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{A\Gamma}$ ή $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=0$ ή $(\lambda,\lambda+1)\cdot(3\lambda,\lambda-1)=0$

ή $3\lambda^2+(\lambda-1)(\lambda+1)=0$ ή $3\lambda^2+\lambda^2-1=0$ ή $4\lambda^2=1$ ή $\lambda=\pm\dfrac{1}{2}$.

ii. Ο ζητούμενος κύκλος διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου Α,Β,Γ. Επειδή όμως η εγγεγραμμένη γωνία $B\hat{A}\Gamma=90^{o}$ η απέναντί πλευρά ΒΓ θα είναι διάμετρος του κύκλου. Το κέντρο του θα βρίσκεται στο μέσο Μ(x,y) της διαμέτρου ΒΓ.

Από το (α) ερώτημα έχουμε ότι $\overrightarrow{AM}=(2\lambda,\lambda)=\left(2\cdot\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)=\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ και $A\left(2,\dfrac{3}{2}\right)$.

Όμως $\overrightarrow{AM}=(x_M-x_A,y_M-y_A)$ ή $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)=\left(x_M-2,y_M-\dfrac{3}{2}\right)$ ή $\begin{cases}x_M-2=1\\ y_M-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

ή $\begin{cases}x_M=3\\ y_M=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}=2\end{cases}$. Επομένως το κέντρο Μ είναι το (3,2).

Η ακτίνα θα είναι η απόσταση (ΑΜ)=$\sqrt{(x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2}=$

$\sqrt{(3-2)^2+\left(2-\dfrac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}=\sqrt{\dfrac{5}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Η εξίσωση του κύκλου με κέντρο (x_o,y_o) και ακτίνα ρ δίνεται από την εξίσωση $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=\rho^2$. Για κέντρο το (3,2) και ακτίνα $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ έχουμε

$(x-3)^2+(y-2)^2=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$ ή $(x-3)^2+(y-2)^2=\dfrac{5}{4}$.

141 Θέμα 4 – 16191

α. i. $\overrightarrow{AM}=(x-1,\ \psi-1)$

$\overrightarrow{BM}=(x-5,\ \psi-5)$

$\overrightarrow{AM}^2+\overrightarrow{BM}^2=32\Leftrightarrow\left(\sqrt{(x-1)^2+(\psi-1)^2}\right)^2+\left(\sqrt{(x-5)^2+(\psi-5)^2}\right)^2=32$

$x^2-2x+1+\psi^2-2\psi+1+x^2-10x+25+\psi^2-10\psi+25=32$

$2x^2+2\psi^2-12x-12\psi+20=0\Leftrightarrow x^2+\psi^2-6x-6\psi+10=0\quad(1)$

ii. Είναι $A^2+B^2-4\Gamma=6^2+6^2-4\cdot10=32>0$. Επομένως η (1) παριστάνει κύκλο.

β. i. Πρέπει $d(K,\varepsilon)=\rho\Leftrightarrow\dfrac{|3\lambda+3-2|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=2\sqrt{2}\Rightarrow|3\lambda+1|=2\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2+1}\Rightarrow(3\lambda+1)^2=8(\lambda^2+1)$

$9\lambda^2+6\lambda+1=8\lambda^2+8 \Rightarrow \lambda^2+6\lambda-7=0 \Leftrightarrow \lambda=-7$ ή $\lambda=1$.

ii. Είναι $\lambda_{AB}=\dfrac{\psi_B-\psi_A}{\chi_B-\chi_A}=\dfrac{5-1}{5-1}=1$. Ένα διάνυσμα παράλληλο στην AB είναι το $\vec{\delta}_1=(1,1)$ ενώ ένα διάνυσμα παράλληλο στην (ε) είναι το $\vec{\delta}_2=(1,-\lambda)$.

Η γωνία των δύο ευθειών είναι η γωνία των δύο διανυσμάτων που είναι παράλληλα σε αυτές.

$$\text{συν}(\widehat{\vec{\delta}_1,\vec{\delta}_2})=\text{συν}45^\circ \text{ ή } \frac{\vec{\delta}_1\vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1||\vec{\delta}_2|}=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } \frac{(1,1)(1,-\lambda)}{\sqrt{1^2+1^1}\sqrt{1^2+\lambda^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } \frac{1-\lambda}{\sqrt{2}\sqrt{1+\lambda^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2(1-\lambda)=\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{1+\lambda^2} \Leftrightarrow 2(1-\lambda)=2\sqrt{1+\lambda^2} \text{ ή } 1-\lambda=\sqrt{1+\lambda^2} \Leftrightarrow (1-\lambda)^2=\left(\sqrt{1+\lambda^2}\right)^2$$

$$1-2\lambda+\lambda^2=1+\lambda^2 \Leftrightarrow \lambda=0.$$

142 Θέμα 4 – 21349

α) i. Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$, με $A=-9$, $B=-3$, $\Gamma=10$ και $A^2+B^2-4\Gamma=81+9-40=50>0$.

Επομένως, το κέντρο του κύκλου είναι

$$K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)$$

και η ακτίνα του

$$R=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{50}}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

<u>Εναλλακτική λύση (με συμπλήρωση τετραγώνου)</u>

Η εξίσωση (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$x^2+y^2-9x-3y+10=0$$

$$\left[x^2-2\cdot\frac{9}{2}x+\left(\frac{9}{2}\right)^2\right]+\left[y^2-2\cdot\frac{3}{2}y+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]=\left(\frac{9}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-10$$

$$\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{81}{4}+\frac{9}{4}-\frac{40}{4}$$

$$\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{50}{4}$$

$$\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

ii. Η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία (ε) είναι

$$d(K,\varepsilon)=\frac{\left|4\cdot\frac{9}{2}+3\cdot\frac{3}{2}-10\right|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{\left|\frac{25}{2}\right|}{5}=\frac{5}{2}<\frac{5\sqrt{2}}{2}=R$$

Άρα, η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο (C) σε δύο σημεία A και B.

ii. Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2). Η εξίσωση (1) γίνεται:

$$3y=10-4x \Leftrightarrow y=\frac{10-4x}{3}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (1), οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$x^2 + \left(\frac{10-4x}{3}\right)^2 - 9x - 3\left(\frac{10-4x}{3}\right) + 10 = 0$$

$$x^2 + \frac{(10-4x)^2}{9} - 9x - (10-4x) + 10 = 0$$

$$x^2 + \frac{(10-4x)^2}{9} - 9x + 4x = 0$$

$$x^2 + \frac{(10-4x)^2}{9} - 5x = 0$$

$$9x^2 + \left(100 - 80x + 16x^2\right) - 45x = 0$$

$$25x^2 - 125x + 100 = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \quad (3)$$

Οι λύσεις της εξίσωσης (3) είναι $x = 1$, $x = 4$.

Για $x = 1$ είναι $y = 2$.

Για $x = 4$ είναι $y = -2$.

Άρα, τα σημεία τομής της ευθείας (ε) και του κύκλου (C) είναι A(1,2) και B(4, −2).

β) i. Είναι:

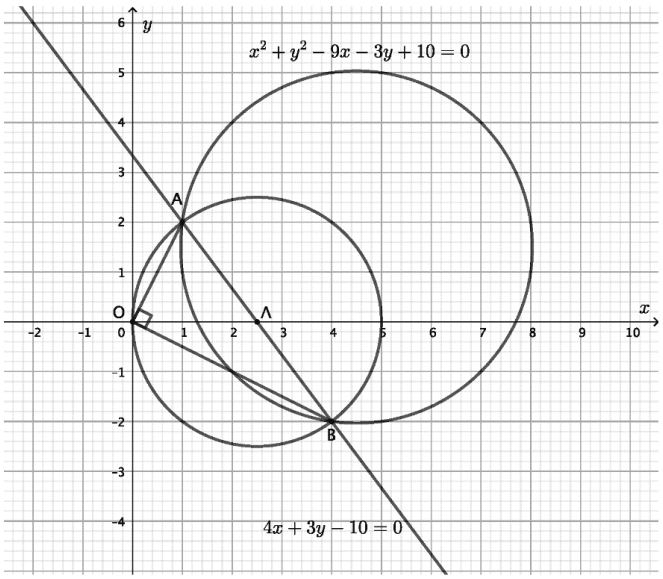
$$\overrightarrow{OA} = \left(x_A - x_O, y_A - y_O\right) = (1,2)$$

$$\overrightarrow{OB} = \left(x_B - x_O, y_B - y_O\right) = (4,-2)$$

Οπότε:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) = 0$$

ii.

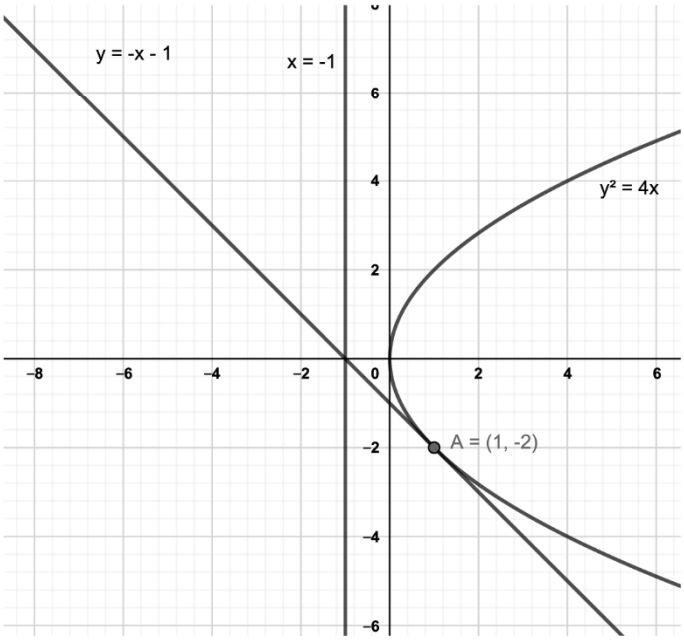


Αφού είναι $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, η γωνία $A\hat{O}B$ θα είναι ορθή. Επομένως, ο κύκλος με διάμετρο AB είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του ορθογωνίου τριγώνου OAB. Συνεπώς, διέρχεται από το σημείο O.

143 Θέμα 2 – 22267

α) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής y^2 = 2px, όπου 2p= 4, άρα p=2. Η μορφή αυτής της εξίσωσης παριστάνει τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται σε παραβολή με εστία στον άξονα x'x. Η Εστία της είναι το σημείο E($\frac{p}{2}$, 0) και η διευθετούσα της έχει εξίσωση x = -$\frac{p}{2}$.

«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται **παραβολή.** Η εστία της Ε, έχει συντεταγμένες Ε(**1, 0**) και η διευθετούσα έχει εξίσωση **x = -1** ».



β) Η εφαπτόμενη ευθεία σε σημείο με συντεταγμένες (x_1, y_1) της παραβολής είναι της μορφής : $yy_1=p(x+x_1)$ και επειδή p =2 η εφαπτόμενη ε θα είναι ε: $yy_1=2(x+x_1)$. Δίνεται το σημείο επαφής A(1, -2), οπότε η εξίσωση της ευθείας ε για $x_1 = 1$ και $y_1 = -2$ θα είναι ε: -2y= 2 (x +1) ή ε: y = -x -1.

γ) Για να βρω το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα x'x θέτω στην εξίσωση της ευθείας ε όπου y = 0. Οπότε έχω -x -1 = 0 ή x = -1, δηλαδή το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα x'x είναι το σημείο (-1,0), το οποίο είναι σημείο της διευθετούσας αφού η εξίσωση της διευθετούσας είναι η x = -1.

144 Θέμα 2 – 20235

α. Είναι: C: $y^2 = 2\cdot 4x$, οπότε $p = 4$, άρα $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ ή $E(2, 0)$ είναι η εστία και δ: $x = -\frac{p}{2}$ ή $x = -2$, είναι η διευθετούσα.

β. Η εφαπτομένη της παραβολής C στο $\left(\frac{1}{8}, 1\right)$ είναι:

$$\varepsilon_1 : yy_1 = p(x + x_1) \text{ ή } \varepsilon_1 : y\cdot 1 = 4\left(x + \frac{1}{8}\right) \Leftrightarrow \varepsilon_1 : y = 4x + \frac{1}{2} \text{ με } \lambda_{\varepsilon_1} = 4$$

Επίσης για την ευθεία ε: $8x-2y+3=0$ είναι: $\lambda_\varepsilon=-\frac{A}{B}=-\frac{8}{-2}=4$.

Οπότε $\lambda_{\varepsilon_1}=\lambda_\varepsilon$ επομένως η $\varepsilon_1 // \varepsilon$.

145 Θέμα 2 - 21307

α. • Είναι $x^2=12y \Leftrightarrow x^2=2\cdot 6y$, οπότε $\rho=6$, άρα η εστία της είναι το $E(0\,,\frac{6}{2})$ ή $E(0\,,3)$.

• Για $y=3$ έχουμε $x^2=12\cdot 3 \Leftrightarrow x^2=36 \Leftrightarrow x=6$ ή $x=-6$.

Άρα είναι τα σημεία $(6\,,3)$ και $(-6\,,3)$.

β. Τα σημεία $A(6\,,3)$ και $B(-6\,,3)$ λόγω του ερωτήματος **α.** είναι σημεία της παραβολής. Οι εφαπτομένες ε_1, ε_2 της παραβολής στα A και B αντίστοιχα έχουν εξισώσεις:

• $\varepsilon_1: 6x=6(y+3) \Leftrightarrow x=y+3 \Leftrightarrow y=x-3$

• $\varepsilon_2: -6x=6(y+3) \Leftrightarrow -x=y+3 \Leftrightarrow y=-x-3$

γ. Το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 έχει συντεταγμένες τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y=x-3 \\ y=-x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-3 \\ 2y=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3=x-3 \\ y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases}$$

Άρα το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 είναι $(0\,,-3)$.

146 Θέμα 2 – 22190

α) Αρχικά υπολογίζουμε την παράμετρο p της παραβολής. Είναι:

$$2p = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$$

Η εστία Ε της παραβολής έχει συντεταγμένες

$$E\left(\frac{p}{2},0\right) = \left(\frac{1}{4},0\right)$$

Η διευθετούσα (δ) της παραβολής έχει εξίσωση

$$x = -\frac{p}{2} = -\frac{1}{4}$$

β) Εξετάζουμε αν οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν την εξίσωση της παραβολής. Για $x = 1$ και $y = -1$ είναι:

$$(-1)^2 = 1$$

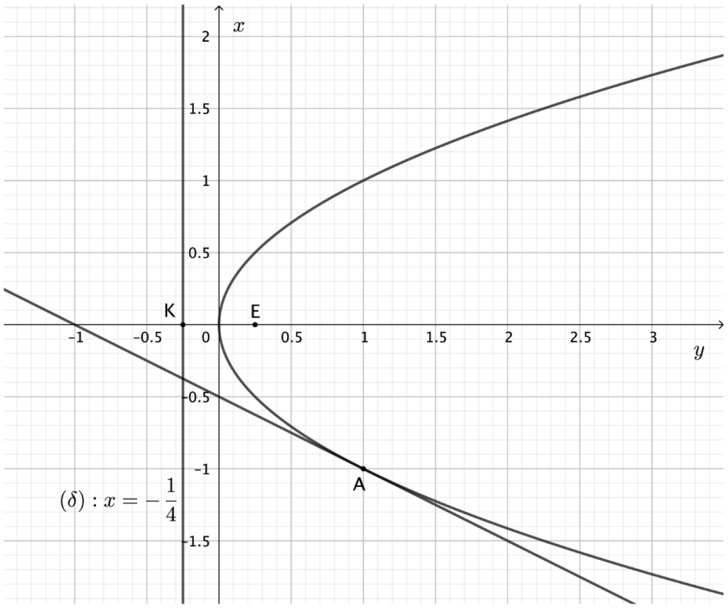
Η τελευταία ισότητα είναι αληθής, οπότε το σημείο Α είναι σημείο της παραβολής.

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο της $A(x_1,y_1)$ είναι:

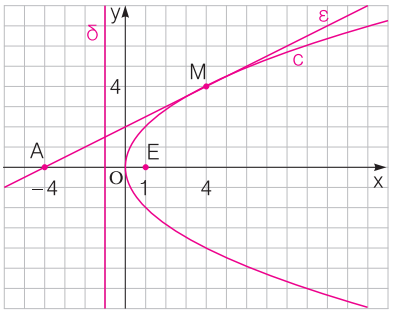
$$yy_1 = p(x + x_1)$$

Αφού δίνεται Α(1,-1), η ζητούμενη εξίσωση θα είναι:

$$-1\cdot y = \frac{1}{2}(x + 1) \quad \text{ή} \quad x + 2y + 1 = 0$$



147 Θέμα 2 – 18242



α. Η παραβολή C έχει εξίσωση της μορφής $y^2 = 2px$ όπου

$2p = 4 \Leftrightarrow p = 2$, οπότε η εστία της έχει συντεταγμένες $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ δηλαδή

$E(1, 0)$ και διευθετούσα με εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$ δηλαδή $\delta : x = -1$.

β. Η ζητούμενη εφαπτομένη (ε) έχει εξίσωση της μορφής $yy_1 = p(x + x_1)$
δηλαδή $y \cdot 4 = 2(x + 4) \Leftrightarrow 2y = x + 4$.

γ. Η ευθεία (ε) εκτός από το $M(4, 4)$ διέρχεται και από το σημείο $A(-4, 0)$.
Η παραβολή C , η διευθετούσα δ και η ευθεία (ε) φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

148 Θέμα 2 - 21306

α. • Η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και κορυφή $(0 , 0)$ έχει εξίσωση $y^2 = 2px$ και εστία

$E(\frac{p}{2} , 0)$.

Οπότε $\frac{p}{2} = 2 \Leftrightarrow p = 4$, άρα η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 2 \cdot 4 \cdot x \Leftrightarrow y^2 = 8x$.

• Για $x = 3$ έχουμε $y^2 = 8 \cdot 3 \Leftrightarrow y^2 = 24 \Leftrightarrow y = \sqrt{24} \Leftrightarrow y = 2\sqrt{6}$, αφού $y > 0$.

Άρα $A(3 , 2\sqrt{6})$.

β. Η διευθετούσα (δ) της παραβολής είναι η ευθεία $x = -\frac{p}{2}$.

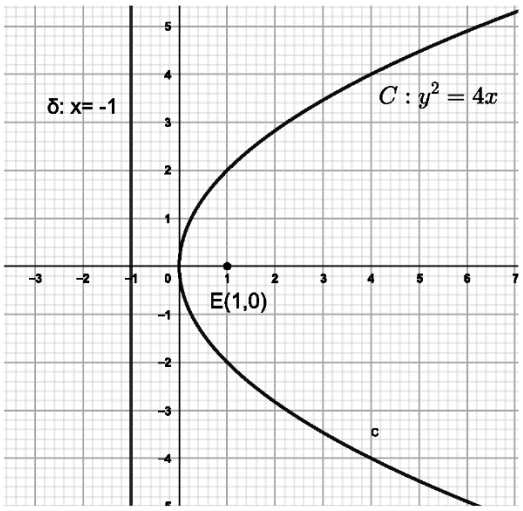
Οπότε: $\delta : x = -2$ την οποία σχεδιάζουμε (ευθεία κάθετη στον $x'x$ από το σημείο $(-2 , 0)$).

γ. Η εφαπτομένη (ε) της παραβολής στο σημείο της A έχει εξίσωση
$\varepsilon : 2\sqrt{6}y = 4(x + 3) \Leftrightarrow \sqrt{6}y = 2(x + 3) \Leftrightarrow \sqrt{6}y = 2x + 6 \Leftrightarrow 2x - \sqrt{6}y + 6 = 0$.

149 Θέμα 4 - 22275

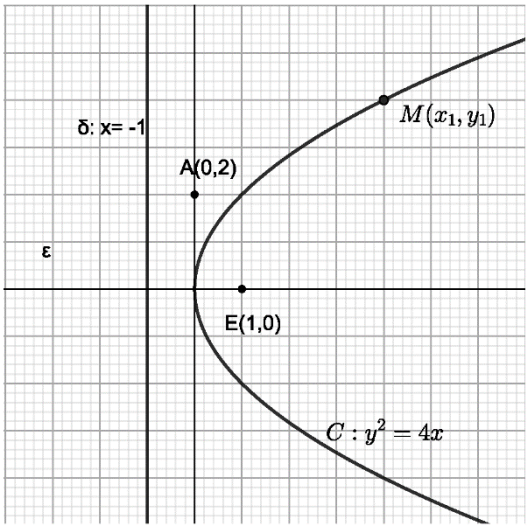
Η εξίσωση (1) της παραβολής είναι της μορφής y^2 = 2px, όπου 2p= 4, άρα p=2. Η μορφή αυτής της εξίσωσης παριστάνει τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται σε παραβολή με εστία στον άξονα x'x.

α)



Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια παραβολή. Η εστία Ε της παραβολής (C) έχει συντεταγμένες Ε($\frac{p}{2}$, 0) και η διευθετούσα της δ έχει εξίσωση x = - $\frac{p}{2}$. Επειδή p =2 η εστία έχει συντεταγμένες Ε(1, 0) και η διευθετούσα δ έχει εξίσωση δ : x = -1.

β)



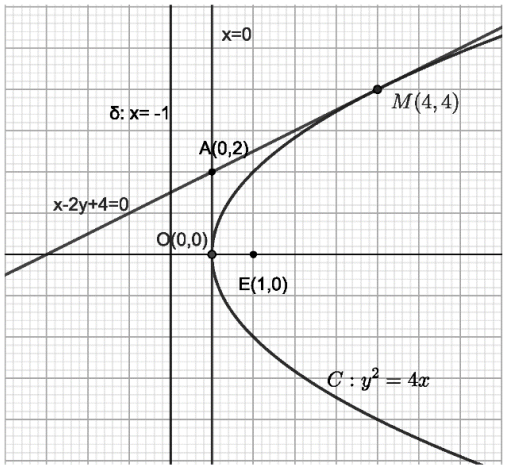
Το σημείο Α(0, 2) είναι εξωτερικό σημείο της παραβολής, αφού είναι σημείο στον άξονα y'y και η παραβολή που μας δόθηκε έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα x'x και μοναδικό κοινό σημείο με τον άξονα y'y την κορυφή της Ο(0, 0). Θεωρούμε $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής. Η εξίσωση της εφαπτόμενης στο σημείο Μ θα είναι της μορφής $y\, y_1 = p\,(x + x_1)$, και επειδή p =2 η εφαπτόμενη θα είναι ε: $y\, y_1 = 2\,(x + x_1)$. Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο Α(0 , 2), οπότε οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας ε. Ισχύει δηλαδή $2\, y_1 = 2(0 + x_1) \Leftrightarrow y_1 = x_1$ (2).

Επιπλέον το σημείο $M(x_1, y_1)$ είναι σημείο της παραβολής, οπότε ικανοποιεί την εξίσωση (1). Άρα $y_1^2 = 4 \cdot x_1$ (3), και λόγω της (2) η σχέση (3) μας δίνει $x_1^2 = 4\, x_1 \Leftrightarrow x_1(x_1 - 4) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ ή $x_1 = 4$.

Για $x_1 = 0$ από τη σχέση (2) έχουμε $y_1 = 0$, οπότε η εφαπτόμενη έχει εξίσωση $0 = 2\,(x + 0) \Leftrightarrow x = 0$, δηλαδή ο άξονας y'y.

Για $x_1 = 4$ από τη σχέση (2) έχουμε $y_1 = 4$, οπότε η εφαπτόμενη έχει εξίσωση ε: $4y = 2\,(x + 4) \Leftrightarrow 2y = x + 4 \Leftrightarrow x - 2y + 4 = 0$.

Άρα οι δύο εφαπτόμενες της παραβολής που διέρχονται από το σημείο Α(0, 2) είναι οι: x = 0 (άξονας y'y) και η ευθεία ε με εξίσωση $x - 2y + 4 = 0$.



150 Θέμα 4 - 20092

α. i. • Αρκεί να δείξουμε ότι το σύστημα των εξισώσεων της παραβολής $y^2 = 4x$ και της ευθείας $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0$ είναι αδύνατο. Είναι

$$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0 \\ y^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y + 12 = 0 \\ y^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 3y + 12 = 0 \\ y^2 = 4x \end{cases}$$

Η εξίσωση $y^2 - 3y + 12 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες, αφού $\Delta = 9 - 48 < 0$, άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

• Είναι $\varepsilon : 4x - 3y + 12 = 0$ και $M(\frac{1}{4}, 1)$, οπότε

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|4 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot 1 + 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

ii. • Για $y=0$ έχουμε $\frac{x}{3}=-1 \Leftrightarrow x=-3$, άρα $\Gamma(-3\,,\,0)$.

• Για $x=0$ έχουμε $\frac{y}{4}=1 \Leftrightarrow y=4$, άρα $\Delta(0\,,\,4)$.

Είναι: • $\overrightarrow{M\Gamma}=(-3-\frac{1}{4}\,,\,0-1)=(-\frac{13}{4}\,,\,-1)$

• $\overrightarrow{\Gamma\Delta}=(0+3\,,\,4-0)=(3\,,\,4)$

Οπότε $(M\Gamma\Delta)=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-\frac{13}{4} & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|-13+3|=5$.

β. i. • Η εφαπτομένη ζ της παραβολής σε σημείο της $(x_1\,,\,y_1)$ έχει εξίσωση

$\zeta: yy_1=2(x+x_1) \Leftrightarrow y=\frac{2}{y_1}\cdot x+\frac{2x_1}{y_1}$, οπότε $\lambda_\zeta=\frac{2}{y_1}$.

• Είναι $\lambda_\varepsilon=\frac{4}{3}$. Πρέπει $\lambda_\zeta=\lambda_\varepsilon \Leftrightarrow \frac{4}{3}=\frac{2}{y_1} \Leftrightarrow y_1=\frac{3}{2}$.

Είναι $y_1^2=4x_1 \Leftrightarrow (\frac{3}{2})^2=4x_1 \Leftrightarrow x_1=\frac{9}{16}$.

Άρα $\zeta: y=\frac{2}{\frac{3}{2}}x+\frac{2\cdot\frac{9}{16}}{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow y=\frac{4}{3}x+\frac{3}{4} \Leftrightarrow 16x-12y+9=0$.

ii. Για να βρούμε την απόσταση των ευθειών ζ και ε , αρκεί να βρούμε ένα σημείο, έστω K , της ζ και να υπολογίσουμε την απόσταση του σημείου αυτού από την ευθεία ε.

Για $x=0$ από την εξίσωση της ευθείας ζ έχουμε: $y=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$.

Άρα ένα σημείο της ευθείας ζ είναι το $K(0\,,\,\frac{3}{4})$ και έχουμε $\varepsilon: 4x-3y+12=0$.

Είναι $d(\zeta\,,\,\varepsilon)=d(K\,,\,\varepsilon)=\frac{|4\cdot 0-3\cdot\frac{3}{4}+12|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|-\frac{9}{4}+\frac{48}{4}|}{\sqrt{25}}=\frac{\frac{39}{4}}{5}=\frac{39}{20}$.

151 Θέμα 4 – 18372

α. Για την $y^2=4x$ θα έχουμε ότι $2p=4$, οπότε είναι $p=2$.

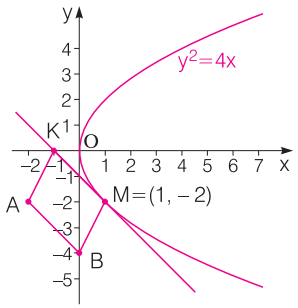
Η εστία της E της παραβολής είναι το σημείο $\left(\frac{p}{2},0\right)$ ή $\left(\frac{2}{2},0\right)$ ή $(1,0)$.

Η διευθετούσα (δ) έχει εξίσωση $x=-\frac{p}{2}$, δηλαδή $x=-\frac{2}{2}=-1$.

β. Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $M(x_1\,,\,y_1)$ είναι $yy_1=2(x+x_1)$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι $\lambda_1=\frac{2}{y_1}$, ενώ ο συντελεστής διεύθυνσης της AB είναι $\lambda_2=\frac{-4-(-2)}{0-(-2)}=\frac{-2}{2}=-1$.

Για να είναι η εφαπτομένη παράλληλη στην AB πρέπει $\lambda_1=\lambda_2$ ή $\frac{2}{y_1}=-1$, άρα $y_1=-2$.

Επειδή όμως το σημείο M ανήκει στην παραβολή θα επαληθεύει την εξίσωσή της, δηλαδή $y_1^2=4x_1$.
Αντικαθιστούμε και έχουμε $(-2)^2=4x_1$, άρα $x_1=1$.
Επομένως το σημείο M θα είναι το $(1,-2)$.



γ. Η εφαπτομένη ευθεία (ε) της παραβολής στο σημείο της $M(1,-2)$ θα είναι $yy_1 = 2(x+x_1)$ ή $-2y = 2(x+1)$ ή $-y = x+1$ ή $x+y+1=0$.

Το σημείο τομής με τον άξονα $x'x$ είναι το $K(-1.\ 0)$.

Από το ερώτημα **β.** γνωρίζουμε ότι $KM // AB$.

$$(KM) = \sqrt{(x_M - x_K)^2 + (y_M - y_K)^2} = \sqrt{(1-(-1))^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$$

$$(AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0-(-2))^2 + (-4-(-2))^2} = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}\ .$$

Τα τμήματα AB και KM είναι ίσα και παράλληλα, επομένως το τετράπλευρο $ABMK$ είναι παραλληλόγραμμο.

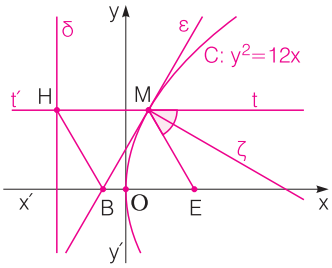
152 Θέμα 4 – 15394

α. Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $y_1 y = p(x+x_1)$. Αλλά $2p = 12$, άρα $p = 6$. Οπότε $(\varepsilon): 2\sqrt{3}\cdot y = 6(x+1) \Leftrightarrow y = \frac{3}{\sqrt{3}}(x+1) \Leftrightarrow y = \sqrt{3}(x+1) \Leftrightarrow y = \sqrt{3}\cdot x + \sqrt{3}$.

β. Η διευθετούσα (δ) έχει εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$, άρα είναι $(\delta): x = -3$ έτσι είναι $H(-3, 2\sqrt{3})$ και η εστία E έχει συντεταγμένες $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, άρα $E(3, 0)$. Επίσης για $y = 0$ από την εξίσωση της (ε) παίρνουμε $0 = \sqrt{3}(x+1) \Leftrightarrow x = -1$. Άρα $B(-1, 0)$.

γ. Είναι $\lambda_{ME} = \frac{2\sqrt{3}-0}{1-3} = -\sqrt{3}$ και $\lambda_{HB} = \frac{2\sqrt{3}-0}{-3-(-1)} = -\sqrt{3}$.

Άρα $ME // HB$. Άρα το $MEBH$ είναι παραλληλόγραμμο. Από τον ορισμό της παραβολής είναι $MH = ME$. Οπότε είναι ρόμβος.



δ. Από την ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής, γνωρίζουμε ότι η ευθεία που είναι κάθετη στην εφαπτομένη (ε) στο σημείο επαφής M , διχοτομεί την γωνία $E\hat{M}t$ όπου E η εστία της παραβολής. Αρκεί λοιπόν να βρούμε την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στην (ε) στο M . Αλλά $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\zeta = -1$, έτσι $\lambda_\zeta = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

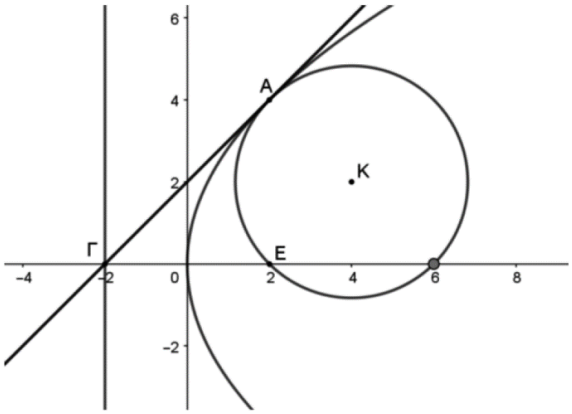
Άρα $(\zeta): y - 2\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1) \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{7\sqrt{3}}{3}$.

153 Θέμα 4 – 22465

α) Αν p η παράμετρος της παραβολής τότε η |p| παριστάνει την απόσταση της εστίας από την διευθετούσα και εφόσον η εστία της παραβολής μας είναι στο θετικό ημιάξονα x'x είναι p>0, άρα p=4. Οι συντεταγμένες της είναι $E(\frac{p}{2},0)$ άρα E(2,0). Η διευθετούσα της έχει εξίσωση $x= -\frac{p}{2} = -2$ και η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2=2px$ =8x.

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2=2px$ στο σημείο της $A(x_1,y_1)$ είναι η $y_1y=p(x+x_1)$, άρα η εφαπτομένη της παραβολής μας στο σημείο της A(2,4) είναι 4y=4(x+2) ή y=x+2

γ)



Αν Κ το κέντρο του ζητούμενου κύκλου η ευθεία ΚΑ είναι κάθετη στην ευθεία ε, επομένως το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των είναι -1 , και αφού ο συντελεστής διεύθυνσης της ε είναι 1 άρα λ_{AK}=-1. Η ευθεία ΑΚ διέρχεται από το σημείο Α(2,4) και έχει συντελεστή διεύθυνσης -1 , επομένως η εξίσωσή της είναι y-4 = -(x-2) ή y = -x+6 . Το κέντρο Κ του κύκλου ισαπέχει από το σημείο Α(2,4) και την εστία Ε(2,0), άρα βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετη του τμήματος ΑΕ. Εφόσον τα σημεία Α και Ε έχουν την ίδια τετμημένη, η ευθεία ΑΕ είναι κάθετη στον άξονα x'x, x'x. Το μέσον του τμήματος ΑΕ είναι το σημείο (2,2). Έτσι η μεσοκάθετη του τμήματος ΑΕ είναι η ευθεία y=2 και επομένως η τεταγμένη του κέντρου Κ είναι y=2 . Θέτοντας y=2 στην εξίσωση της ευθείας ΑΚ έχουμε 2 = - x+6 άρα x=4 . Άρα το κέντρο του ζητούμενου κύκλου είναι το Κ(4,2). Η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου είναι $\rho=(KE)=\sqrt{((4-2)^2+2^2}=\sqrt{8}$.

'Αρα η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου είναι $(x-4)^2+(y-2)^2=8$.

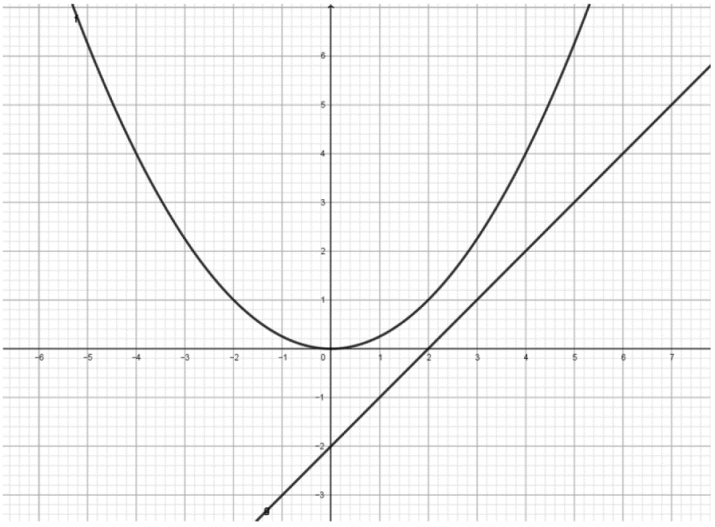
154 Θέμα 4 - 21883

α) Η παράμετρος της παραβολής είναι p=2, άρα η εστία είναι το $E(0,\frac{p}{2}) = (0,1)$ και η εξίσωση της διευθετούσας δ: y= -1

β) Τα κοινά σημεία της παραβολής και της ευθείας είναι οι λύσεις του συστήματος των εξισώσεών τους.

$$\begin{cases} x^2=4y \\ y=x-2 \end{cases}$$

Άρα $x^2=4(x-2)$ άρα $x^2-4x+8=0$ η οποία είναι αδύνατη εφόσον Δ<0 . Άρα η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία.



γ)

i. Έστω σημείο M(x,y) σημείο της παραβολής , οπότε M(x,$\frac{1}{4}x^2$) . Η απόστασή του από την ευθεία ε: x-y-2=0 είναι d(M,ε) = $\frac{|x-\frac{1}{4}x^2-2|}{\sqrt{2}}$ = $\frac{|\frac{1}{4}x^2-x+2|}{\sqrt{2}}$ = $\frac{\frac{1}{4}x^2-x+2}{\sqrt{2}}$, διότι η διακρίνουσα του τριωνύμου $\frac{1}{4}x^2$-x+2 είναι Δ=1-4·$\frac{1}{4}$·2 = -1<0 και άρα $\frac{1}{4}x^2$-x+2 >0 για κάθε πραγματικό αριθμό x.

ii. d(M,ε) = $\frac{\frac{1}{4}x^2-x+2}{\sqrt{2}}$ = $\frac{\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2+1}{\sqrt{2}}$ ≥ $\frac{1}{\sqrt{2}}$=$\frac{\sqrt{2}}{2}$ Η απόσταση του M από την ευθεία γίνεται ελάχιστη όταν $\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x-1=0 \Leftrightarrow x=2$

Άρα η ελάχιστη απόσταση d(M,ε) =$\frac{\sqrt{2}}{2}$ όταν x=2. Επομένως το ζητούμενο σημείο της παραβολής που απέχει ελάχιστη απόσταση από την ευθεία ε είναι το M(2,1).

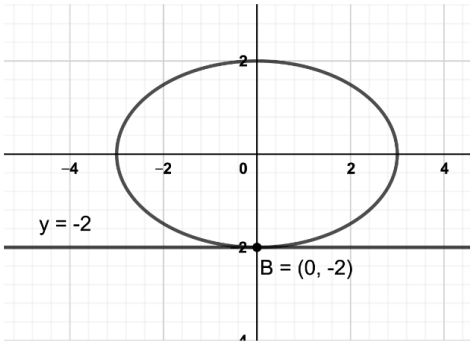
155 Θέμα 2 - 22268

Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $\frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, όπου $\alpha^2=9$ και $\beta^2=4$. Η μορφή αυτής της εξίσωσης παριστάνει τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται σε έλλειψη με εστίες στον άξονα x'x. Οι εστίες έχουν συντεταγμένες Ε(γ, 0) , και Ε'(-γ, 0), όπου γ = $\sqrt{\alpha^2-\beta^2}=\sqrt{5}$. Η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι ε = $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης είναι ίσο με 2α= 2·3 =6

α) «Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται **έλλειψη**. Οι εστίες της Ε και Ε' , έχουν συντεταγμένες Ε($\sqrt{5}$**, 0**) και Ε'**(-**$\sqrt{5}$**, 0**) . Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι ίσο με **6** και η εκκεντρότητα της είναι ίση με $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ».

β)



Η εφαπτόμενη ευθεία σε σημείο με συντεταγμένες (x_1, y_1) της έλλειψης είναι της μορφής

ε: $\frac{x\,x_1}{9} + \frac{y\,y_1}{4} = 1 \Leftrightarrow 4\cdot xx_1 + 9\cdot yy_1 = 36$. Δίνεται το σημείο επαφής B(0,-2), οπότε αν θέσουμε στην εξίσωση της ευθείας ε όπου $x_1 = 0$ και $y_1 = -2$ θα έχουμε

ε : $4x\cdot 0 + 9y\cdot(-2) = 36$ ή ε : $-18y = 36$ ή ε: $y = -2$.

156 Θέμα 2 - 21308

α. • Είναι $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ και $5>4$, οπότε έχουμε την έλλειψη της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\alpha=5$ και $\beta=4$.

Είναι $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2} \Leftrightarrow \beta^2=\alpha^2-\gamma^2 \Leftrightarrow \gamma^2=\alpha^2-\beta^2 \Leftrightarrow \gamma^2=25-16 \Leftrightarrow \gamma^2=9$, οπότε $\gamma=3$.

Άρα οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία $E(3\,,0)$ και $E'(-3\,,0)$.

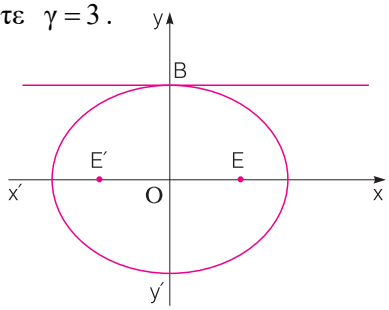
• Η απόσταση των εστιών είναι $2\gamma=2\cdot 3=6$.

β. • Ο μικρός άξονας της έλλειψης έχει μήκος $2\beta=2\cdot 4=8$.

• Ο μεγάλος άξονας της έλλειψης έχει μήκος $2\alpha=2\cdot 5=10$.

γ. Η εφαπτομένη (ε) της έλλειψης στο σημείο της $B(0\,,4)$ έχει εξίσωση

$\frac{xx_B}{\alpha^2}+\frac{yy_B}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow \frac{0x}{25}+\frac{4y}{16}=1 \Leftrightarrow y=4$.



157 Θέμα 2 - 22192

α) Η έλλειψη με εξίσωση την (1) έχει $\alpha^2 = 225$, $\beta^2 = 81$ και εστίες τα σημεία E(γ,0), E΄(-γ,0). Είναι:

$$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 225 - 81 = 144$$

Άρα, γ = 12. Επομένως, οι εστίες της έλλειψης είναι:

E(12,0), E΄(-12,0)

β) Εξετάζουμε αν οι συντεταγμένες του σημείου B επαληθεύουν την εξίσωση της έλλειψης. Για x = 0 και y = 9 είναι:

$$\frac{0^2}{225}+\frac{9^2}{81}=1$$

Η τελευταία ισότητα είναι αληθής, οπότε το σημείο B είναι σημείο της έλλειψης .

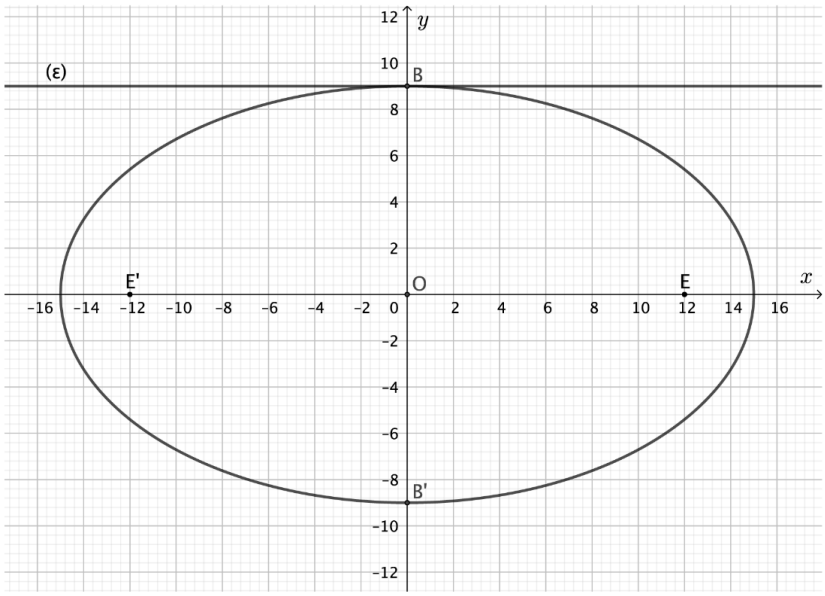
γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο της $B(x_1,y_1)$ είναι:

$$\frac{xx_1}{225}+\frac{yy_1}{81}=1$$

Αφού δίνεται ότι B(0,9), η ζητούμενη εξίσωση θα είναι:

$$\frac{0x}{225}+\frac{9y}{81}=1 \quad \text{ή} \quad y=9$$

Η καμπύλη της έλλειψης, οι εστίες Ε, Ε΄ της και η εφαπτομένη (ε) απεικονίζονται στο ακόλουθο σχήμα:



158 Θέμα 2 - 22556

α) i) Είναι $(A'A)=|x_A-x_{A'}|=|5+5|=10$ και $(B'B)=|y_B-y_{B'}|=|4+4|=8$,

άρα ο μεγάλος άξονας έχει μήκος $(A'A)=10$ και ο μικρός άξονας έχει μήκος $(B'B)=8$.

ii) Είναι $(A'A)=2\alpha$ ή $2\alpha=10$ ή $\alpha=5$

και $(B'B)=2\beta$ ή $2\beta=8$ ή $\beta=4$.

Επομένως

$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$

$5^2=4^2+\gamma^2$

$\gamma^2=9$

$\gamma=3$.

Άρα οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία $E'(-3,0)$ και $E(3,0)$.

β) Επειδή το Μ είναι σημείο της έλλειψης, σύμφωνα με τον ορισμό της έλλειψης θα είναι

$(ME')+(ME)=2\alpha$ ή $(ME')+(ME)=10$.

159 Θέμα 2 - 22564

α) Οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν τις εξισώσεις των δύο ελλείψεων αφού

$$\frac{2^2}{12}+\frac{2^2}{6}=\frac{4}{12}+\frac{4}{6}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1 \quad \text{και} \quad \frac{2^2}{6}+\frac{2^2}{12}=\frac{4}{6}+\frac{4}{12}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$$

Το σημείο Β είναι συμμετρικό του σημείο Α ως προς τον άξονα $y'y$, επομένως θα ανήκει στις δύο ελλείψεις, αφού και το σημείο Α ανήκει στις δύο ελλείψεις.

β) Η εφαπτομένη ε_1 της έλλειψης C_1 στο σημείο Α έχει εξίσωση:

$$\frac{2x}{12}+\frac{2y}{6}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{6}+\frac{2y}{6}=1 \Leftrightarrow x+2y=6 \Leftrightarrow x+2y-6=0.$$

Η εφαπτομένη ε_2 της έλλειψης C_2 στο σημείο Β έχει εξίσωση:

$$\frac{-2x}{6}+\frac{2y}{12}=1 \Leftrightarrow \frac{-2x}{6}+\frac{y}{6}=1 \Leftrightarrow -2x+y=6 \Leftrightarrow -2x+y-6=0.$$

γ) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε_1 είναι $\lambda_1=-\frac{1}{2}$ και ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε_2 είναι $\lambda_2=2$.

Οι εφαπτομένες ε_1, ε_2 είναι κάθετες, γιατί $\lambda_1\lambda_2=-\frac{1}{2}\cdot 2=-1$.

160 Θέμα 2 - 22558

α) Οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία $E'(-2,0)$ και $E(2,0)$,

άρα $2\gamma=(E'E)=4$ ή $\gamma=2$.

Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι $(A'A)=8$,

άρα $2\alpha=(A'A)=8$ ή $\alpha=4$.

Επομένως $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2=4^2-2^2=12$.

Επειδή οι εστίες βρίσκονται στον άξονα $x'x$, η έλλειψη έχει εξίσωση της μορφής

$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, οπότε με αντικατάσταση προκύπτει $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

β) i) Από την εξίσωση της έλλειψης $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$, για $x=x_E=2$ βρίσκουμε:

$\frac{2^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

$\frac{1}{4}+\frac{y^2}{12}=1$

$3+y^2=12$

$y^2=9$

$y=3$ ή $y=-3$

Επειδή το Σ έχει θετική τεταγμένη και το Ρ αρνητική, θα είναι $\Sigma(2,3)$ και $P(2,-3)$.

ii) Είναι $(\Sigma P)=|y_P-y_\Sigma|=|-3-3|=|-6|=6$.

161 Θέμα 2 - 20883

α. Είναι $16x^2+25y^2=400 \Leftrightarrow \frac{16x^2}{400}+\frac{25y^2}{400}=\frac{400}{400} \Leftrightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ και $5>4$.

Άρα $\alpha=5$, $\beta=4$ και $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \gamma=3$.

Άρα $(A'A) = 2\alpha = 2 \cdot 5 = 10$, $(B'B) = 2\beta = 2 \cdot 4 = 8$ και $E'(-3\,,\,0)$, $E(3\,,\,0)$.

β. Επειδή το $E'(-3\,,\,0)$ είναι σημείο του άξονα $x'x$ η παραβολή με εστία το E' έχει εξίσωση της μορφής $y^2 = 2px$.

Είναι $\frac{p}{2} = -3 \Leftrightarrow p = -6$, άρα $y^2 = 2 \cdot (-6)x \Leftrightarrow y^2 = -12x$.

162 Θέμα 2 – 22168

α)

i. Η παραβολή $y^2 = 2px$ διέρχεται από το A(1,2), οπότε οι συντεταγμένες του σημείου A επαληθεύουν την εξίσωσή της, δηλαδή:

$$2^2 = 2p1 \text{ ή } 4 = 2p \text{ ή } p = 2$$

Επομένως, $y^2 = 2 \cdot 2x$ ή $y^2 = 4x$.

ii. Η εστία E της παραβολής είναι:

$$E\left(\frac{p}{2},0\right) \text{ ή } E(1,0)$$

β) Μία από τις εστίες της έλλειψης είναι το σημείο E(γ,0) και ο μεγάλος άξονας έχει μήκος 2α. Αφού η εστία είναι το σημείο E(1,0), έχουμε ότι γ = 1.

Επειδή ο μεγάλος άξονας έχει μήκος ίσο με 4 έχουμε ότι 2α = 4, οπότε α = 2.

Είναι:

$$\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$$

Οπότε, η εξίσωση της έλλειψης γίνεται:

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

163 Θέμα 4 – 22273

α) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, όπου $\alpha^2 = 9$ και $\beta^2 = 4$.

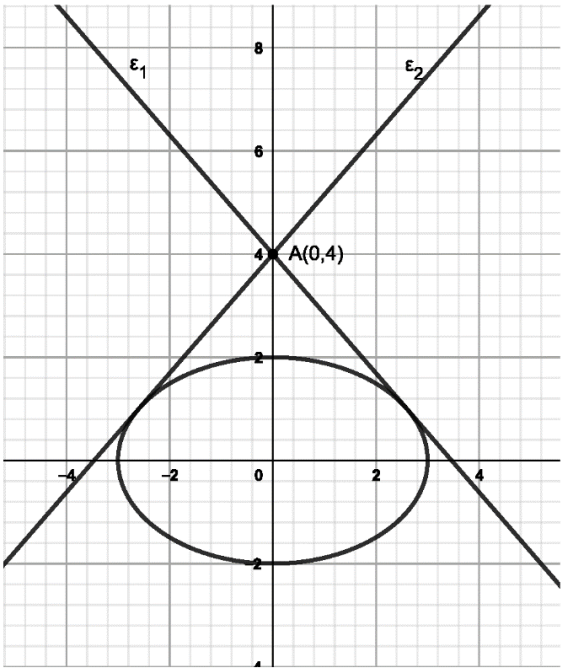
i. Για να βρούμε τα σημεία τομής της έλλειψης αυτής με τον άξονα x'x θέτουμε στην εξίσωση (1) y=0. Έτσι έχουμε $\frac{\chi^2}{9} = 1$ ή $x^2 = 9$, οπότε x =3 ή x= -3. Τα σημεία τομής με τον άξονα x'x είναι τα σημεία A(3,0) και A'(-3,0).

Αντίστοιχα, για να βρούμε τα σημεία τομής της έλλειψης αυτής με τον άξονα y'y θέτουμε στην εξίσωση (1) x=0. Έτσι έχουμε $\frac{y^2}{4} = 1$ ή $y^2 = 4$, οπότε y =2 ή y= -2.

Τα σημεία τομής με τον άξονα y'y είναι τα σημεία B(0,2) και B'(0,-2).

ii. Η εξίσωση (1) παριστάνει έλλειψη με εστίες στον άξονα x'x. Οπότε οι εστίες έχουν συντεταγμένες E(γ, 0) , και E'(-γ, 0), όπου γ = $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{5}$. Άρα οι εστίες της E, και E' έχουν συντεταγμένες E($\sqrt{5}$, 0) και E'(-$\sqrt{5}$, 0).

β)



Το σημείο Α(0, 4) είναι εξωτερικό σημείο της έλλειψης, αφού είναι σημείο στον άξονα y'y και η έλλειψη που μας δόθηκε τέμνει τον άξονα y'y στα σημεία Β(0, 2) και Β'(0,-2). Θεωρούμε Μ(x_1, y_1) το σημείο επαφής. Η εξίσωση της εφαπτόμενης στο σημείο Μ θα είναι της μορφής ε: $\frac{x\,x_1}{9} + \frac{y\,y_1}{4} = 1 \Leftrightarrow 4\,xx_1 + 9\,yy_1 = 36$. Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο Α(0 , 4), οπότε οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας ε. Ισχύει δηλαδή $4\cdot 0\,x_1 + 9\cdot 4y_1 = 36 \Leftrightarrow y_1 = 1$ (2).

Επιπλέον το σημείο Μ(x_1, y_1) είναι σημείο της έλλειψης, οπότε ικανοποιεί την εξίσωση(1). Άρα ισχύει $\frac{{x_1}^2}{9} + \frac{{y_1}^2}{4} = 1$ (3), και λόγω της (2) η σχέση (3) μας δίνει

$$\frac{{x_1}^2}{9} + \frac{1^2}{4} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{{x_1}^2}{9} = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{ή} \quad x_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Για $x_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ και λόγω της (2) έχουμε $y_1 = 1$, έχουμε την εφαπτόμενη ε με εξίσωση

$$\varepsilon:\ 4\,\frac{3\sqrt{3}}{2}x + 9\,y = 36 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{3}\,x + 3y = 12.$$

Για $x_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ από τη σχέση (2) έχουμε $y_1 = 1$, οπότε η εφαπτόμενη ε έχει εξίσωση

$$\varepsilon:\ 4\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)x + 9\,y = 36 \quad \Leftrightarrow \quad -2\sqrt{3}\,x + 3y = 12.$$

Άρα οι δύο εφαπτόμενες της έλλειψης που διέρχονται από το σημείο Α(0, 4) είναι οι ε_1 :

$$2\sqrt{3}\,x + 3y = 12 \text{ και } \varepsilon_2 : -2\sqrt{3}\,x + 3y = 12.$$

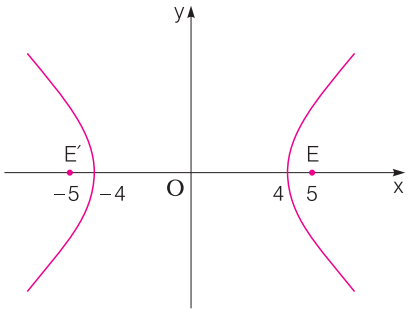
164 Θέμα 2 – 16128

α. Η υπερβολή έχει εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Είναι $\alpha^2=16$ και $\beta^2=9$, οπότε $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2=25$, άρα $\gamma=5$. Έτσι, οι εστίες είναι τα σημεία $E'(-5,0)$ και $E(5,0)$.

β. Έχουμε ότι $|(NE')-(NE)|=2\alpha=2\cdot 4=8$.

γ. Η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(-\alpha,0)$ και $(\alpha,0)$, δηλαδή στα σημεία $(-4,0)$ και $(4,0)$.

Έτσι, έχουμε το διπλανό σχήμα.



165 Θέμα 2 – 22567

α) i) Η υπερβολή με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A'(-\alpha,0)$ και $A(\alpha,0)$. Δίνεται $A'(-4,0)$ και $A(4,0)$, άρα θα έχουμε $\alpha=4$.

Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι οι ευθείες $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ και $y=-\frac{\beta}{\alpha}x$.

Δίνεται ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι ευθείες $y=\frac{3}{4}x$ και $y=-\frac{3}{4}x$,

άρα θα έχουμε $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{3}{4}$ και επειδή $\alpha=4$, προκύπτει $\beta=3$.

ii) Οι εστίες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι τα σημεία $E'(-\gamma,0)$ και $E(\gamma,0)$.

Είναι

$\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$

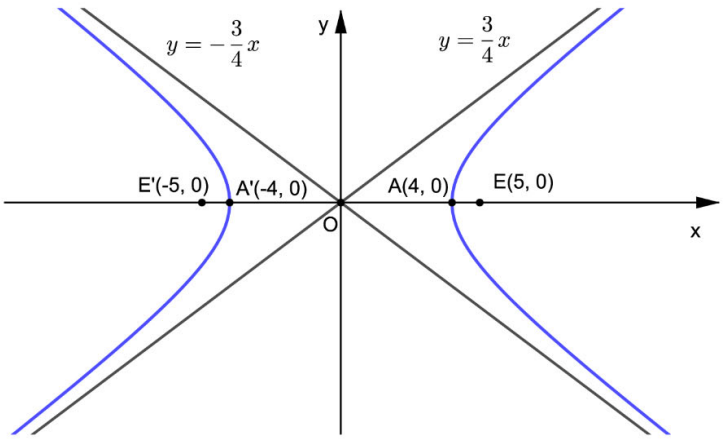
$\gamma^2=4^2+3^2$

$\gamma^2=25$

$\gamma=5$.

Επομένως οι εστίες της υπερβολής είναι τα σημεία $E'(-5,0)$ και $E(5,0)$.

β)



166 Θέμα 2 – 22559

α) Επειδή η υπερβολή έχει τις εστίες της $E'(-10\,,0)$, $E(10\,,0)$ και τις κορυφές της $A'(-8\,,0)$, $A(8\,,0)$ στον άξονα x′x, η εξίσωση της είναι της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

Είναι $\gamma=10$ και $\alpha=8$, άρα

$\beta^2=\gamma^2-\alpha^2$

$\beta^2=10^2-8^2$

$\beta^2=36$

$\beta=6$.

Επομένως η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$.

β) i) Το Μ είναι σημείο της υπερβολής, αν και μόνο αν η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων του Μ από τις εστίες Ε′ και Ε είναι 2α, δηλαδή $|(ME')-(ME)|=2\alpha$.

Επειδή $\alpha=8$, θα είναι $|(ME')-(ME)|=16$.

ii) Δίνεται $(ME)=9$ οπότε έχουμε:

$|(ME')-9|=16$

$(ME')-9=-16$ ή $(ME')-9=16$

$(ME')=-7$ ή $(ME')=25$

και επειδή $(ME')>0$ θα είναι $(ME')=25$.

167 Θέμα 2 – 22169

α)

i. Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι η y = $\frac{\beta}{\alpha}$ x και y = - $\frac{\beta}{\alpha}$ x. Εφόσον η y = $\frac{3}{4}$ x είναι ασύμπτωτη και α,β > 0, έχουμε ότι $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{3}{4}$ δηλαδή 4β = 3α ή β = $\frac{3}{4}$α. (1)

Η απόσταση των κορυφών της ΑΑ’ είναι ίση με 2α, οπότε 2α = 8, άρα α = 4. (2)

Από (1) και (2) έχουμε ότι β = $\frac{3}{4}\cdot 4$ = 3.

Επομένως η εξίσωση της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}$=1 γίνεται $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}$ = 1 ή $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}$ = 1.

ii. $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$ και από το αi) ερώτημα έχουμε ότι α = 4 και β = 3. Επομένως $4^2+3^2=\gamma^2$ ή $\gamma^2=25$ ή γ = 5.

Οι εστίες είναι της μορφής Ε(γ,0) και Ε’(-γ,0), επομένως Ε(5,0) και Ε’(-5,0).

β) Η εφαπτόμενη της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}$ = 1 στο σημείο της (x_1,y_1) δίνεται από τον τύπο

$\frac{xx_1}{\alpha^2}-\frac{yy_1}{\beta^2}$ = 1 ή $\frac{xx_1}{16}-\frac{yy_1}{9}$ = 1. Στο σημείο (5,$\frac{9}{4}$) θα έχουμε $\frac{5x}{16}-\frac{\frac{9}{4}y}{9}$ = 1 ή $\frac{5x}{16}-\frac{y}{4}$ = 1.

168 Θέμα 2 – 22269

α) Η υπερβολή με εξίσωση : $\frac{x^2}{4}$ - y^2 = 1 (1) έχει $\alpha^2 = 4$ και $\beta^2 = 1$. Οι εστίες της βρίσκονται στον άξονα x'x και έχουν συντεταγμένες Ε(γ, 0) και Ε'(-γ, 0), όπου γ = $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ = $\sqrt{5}$.

i. Οι εστίες της υπερβολής έχουν συντεταγμένες Ε($\sqrt{5}$, 0) και Ε'(- $\sqrt{5}$, 0).

ii. Η εκκεντρότητα της υπερβολής είναι ε = $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

iii. Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι y = $\frac{\beta}{\alpha}$ x = $\frac{1}{2}$ x και y = – $\frac{\beta}{\alpha}$ x = - $\frac{1}{2}$ x.

β) Η εξίσωση της εφαπτόμενης της υπερβολής στο σημείο της με συντεταγμένες (x_1, y_1) θα έχει τη μορφή ε : $\frac{x\,x_1}{4}$ - $y\,y_1$ = 1 ⇔ xx_1 - 4 yy_1 = 4. Οπότε για $x_1 = \sqrt{5}$ και $y_1 = \frac{1}{2}$ στην εξίσωση της ευθείας ε θα έχουμε $\varepsilon : \sqrt{5}\cdot x - 4\cdot\frac{1}{2}y = 4$ ή $\varepsilon : \sqrt{5}\cdot x - 2y = 4$.

169 Θέμα 2 – 22561

α) i) Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ είναι οι ευθείες $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ και $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$.

Επειδή $C: x^2 - y^2 = 9$ είναι $\alpha^2 = \beta^2 = 9$, άρα $\alpha = \beta = 3$, οπότε οι ασύμπτωτες της C είναι οι ευθείες $\delta_1: y = \frac{3}{3}x$ ή $\delta_1: y = x$ και $\delta_2: y = -\frac{3}{3}x$ ή $\delta_2: y = -x$.

ii) Η εφαπτομένη ε της υπερβολής $C: x^2 - y^2 = 9$ στο σημείο της $M(5\,,4)$, έχει εξίσωση $\varepsilon: xx_1 - yy_1 = 9$ ή $\varepsilon: 5x - 4y = 9$.

β) Τα σημεία τομής της $\varepsilon: 5x - 4y = 9$ με τις $\delta_1: y = x$ και $\delta_2: y = -x$, προκύπτουν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεών τους. Επομένως θα έχουμε

$$\begin{cases} 5x - 4y = 9 \\ y = x \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 5x - 4x = 9 \\ y = x \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = 9 \\ y = 9 \end{cases}$$

και

$$\begin{cases} 5x - 4y = 9 \\ y = -x \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 5x + 4x = 9 \\ y = -x \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 9x = 9 \\ y = -x \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} .$$

Επομένως το σημείο τομής των ε και δ_1 έχει συντεταγμένες $(9\,,9)$ και το σημείο τομής των ε και δ_2 έχει συντεταγμένες $(1\,,-1)$.

170 Θέμα 2 – 22196

α) Η εξίσωση (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{25} = 1$$

Επομένως, είναι $\alpha^2 = 25 \Leftrightarrow \alpha = 5$, $\beta^2 = 25 \Leftrightarrow \beta = 5$ και $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 25 + 25 = 50$.

Άρα, $\gamma = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία Ε(γ,0), Ε΄(-γ,0), δηλαδή:

$$E\left(5\sqrt{2},0\right),\ E'\left(-5\sqrt{2},0\right)$$

β) Οι ασύμπτωτες της υπερβολής

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

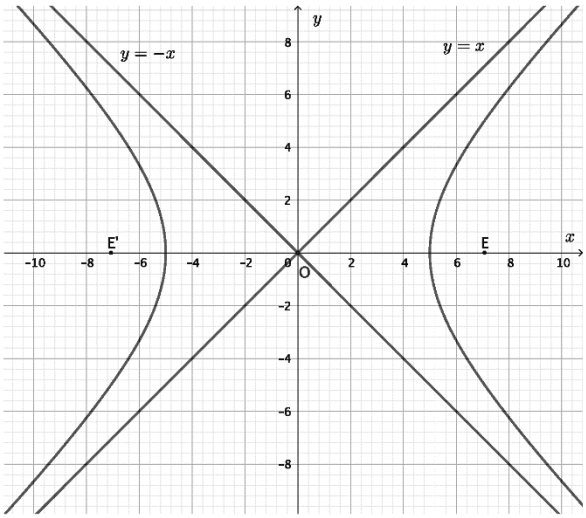
είναι οι ευθείες

$$(\varepsilon_1): y=\frac{\beta}{\alpha}x \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2): y=-\frac{\beta}{\alpha}x$$

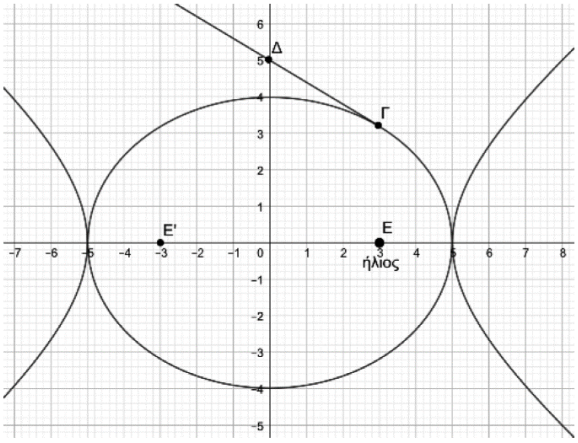
δηλαδή

$$(\varepsilon_1): y=x \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2): y=-x$$

γ) Οι ευθείες (ε_1), (ε_2) έχουν συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1=1$ και $\lambda_2=-1$ αντίστοιχα. Αφού $\lambda_1\lambda_2=-1$, συμπεραίνουμε ότι οι ασύμπτωτες (ε_1), (ε_2) είναι κάθετες. Η καμπύλη της υπερβολής, οι εστίες Ε, Ε΄ της και οι ασύμπτωτες απεικονίζονται στο ακόλουθο σχήμα:



171 Θέμα 4 – 22174



α) Ο μεγάλος άξονας της έλλειψης είναι 2α, οπότε 2α =10, άρα α = 5.

Η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι ε = $\frac{\gamma}{\alpha}$, οπότε $\frac{\gamma}{\alpha}=0,6$ ή $\frac{\gamma}{5}=0,6$ ή γ = 3.

Όμως $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$.

Η εξίσωση της έλλειψης δίνεται από τον τύπο $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, άρα $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

β)

i. Η εφαπτομένη της έλλειψης σε σημείο (x_1, y_1) δίνεται από τον τύπο $\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1$.

Εφόσον το σημείο επαφής είναι το $\Gamma\left(3,\frac{16}{5}\right)$ η εξίσωση της εφαπτομένης θα γίνει

$\frac{x3}{25}+\frac{y\frac{16}{5}}{16}=1$ ή $\frac{3x}{25}+\frac{y}{5}=1$. Για να διέρχεται από το σημείο Δ(0,5) θα πρέπει οι συντεταγμένες του σημείου να την επαληθεύουν. Πράγματι $\frac{3\cdot 0}{25}+\frac{5}{5}=1$ ή 1 = 1 που σημαίνει ότι η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο Δ.

ii. Σημεία συνάντησης των τροχιών είναι οι λύσεις του συστήματος των εξισώσεών τους εφόσον υπάρχουν. Οι εξισώσεις είναι $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ και $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$. Προσθέτοντας κατά μέλη $2\frac{x^2}{25}=2$ ή $x^2=25$ ή x = 5 επειδή x > 0. Η $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ για x = 5 μας δίνει

$\frac{5^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ ή $1+\frac{y^2}{16}=1$ ή $\frac{y^2}{16}=0$

172 Θέμα 2 - 22055

α) Από την υπόθεση έχουμε $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B'A'}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{A'\Gamma'}$. Όμως, ίσα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα, άρα

(i) το μήκος της πλευράς ΒΑ είναι ίσο με το μήκος της πλευράς Β΄Α΄ και

(ii) το μήκος της πλευράς ΑΓ είναι ίσο με το μήκος της πλευράς Α΄Γ΄.

β) i. Από την υπόθεση έχουμε $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B'A'}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{A'\Gamma'}$. Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{B'A'}+\overrightarrow{A'\Gamma'}$ δηλαδή $\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{B'\Gamma'}$.

ii. Από το β)i ερώτημα έχουμε $\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{B'\Gamma'}$. Όμως, ίσα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα, άρα το μήκος της πλευράς ΒΓ είναι ίσο με το μήκος της πλευράς Β΄Γ΄.

γ) Ναι, αφού, από τα ερωτήματα α) και β), τα δύο τρίγωνα έχουν και τις τρεις πλευρές τους μία προς μία ίσες (τα μήκη τους) και συνεπώς, από το κριτήριο ΠΠΠ, τα τρίγωνα θα είναι ίσα.

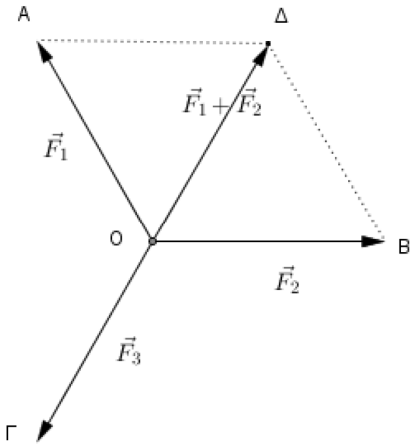
173 Θέμα 4 - 22068

α) Η συνθήκη ισορροπίας εκφράζεται από την διανυσματική ισότητα: $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\vec{0}$.

β) Από το α) ερώτημα έχουμε $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\vec{0}$, οπότε $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=-\overrightarrow{F_3}$. Άρα, τα διανύσματα $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}$ και $\overrightarrow{F_3}$ είναι αντίθετα.

γ)

i. Από το β) ερώτημα, τα σημεία Γ, O, Δ είναι συνευθειακά. Οπότε, οι γωνίες $\widehat{AO\Delta}$ και $\widehat{BO\Delta}$ είναι 60°, ως παραπληρωματικές των γωνιών $\widehat{AO\Gamma}$, $\widehat{BO\Gamma}$, αντίστοιχα, που εξ υποθέσεως είναι ίσες με 120° η κάθε μία.

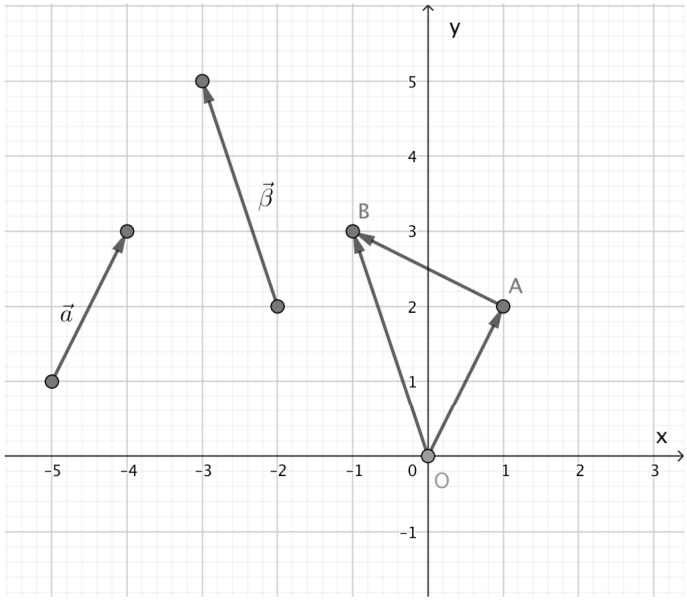


ii. Από τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος δύο διανυσμάτων, το τετράπλευρο ΟΑΔΒ είναι παραλληλόγραμμο, άρα οι γωνίες $\widehat{AO\Delta}$ και $\widehat{O\Delta B}$ είναι ίσες, ως εντός εναλλάξ και άρα, από το γi ερώτημα, έχουμε $\widehat{O\Delta B}=60^o$.

δ) Από το ερώτημα γ), έπεται ότι το τρίγωνο ΟΒΔ είναι ισόπλευρο, καθώς $\widehat{BO\Delta}=\widehat{O\Delta B}=60^o$, οπότε και η τρίτη του γωνία $\widehat{OB\Delta}$ αναγκαστικά θα είναι 60° (μια και το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με 180°). Συνεπώς, $|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{B\Delta}|=|\overrightarrow{O\Delta}|$, δηλαδή $|\overrightarrow{F_2}|=|\overrightarrow{F_1}|=|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}|$. Όμως, από το β) ερώτημα, $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=-\overrightarrow{F_3}$. Επομένως, $|\overrightarrow{F_1}|=|\overrightarrow{F_2}|=|-\overrightarrow{F_3}|$, ή ισοδύναμα $|\overrightarrow{F_1}|=|\overrightarrow{F_2}|=|\overrightarrow{F_3}|$.

174 Θέμα 2 - 20914

α)



β) Από το παραπάνω σχήμα έχουμε:

$\vec{\alpha} = \overrightarrow{OA} = (1,2)$, $\vec{\beta} = \overrightarrow{OB} = (-1,3)$ και $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-1,3) - (1,2) = (-2,1)$.

γ) Έχουμε: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = (1,2) \cdot (-2,1) = 0$, επομένως $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB}$.

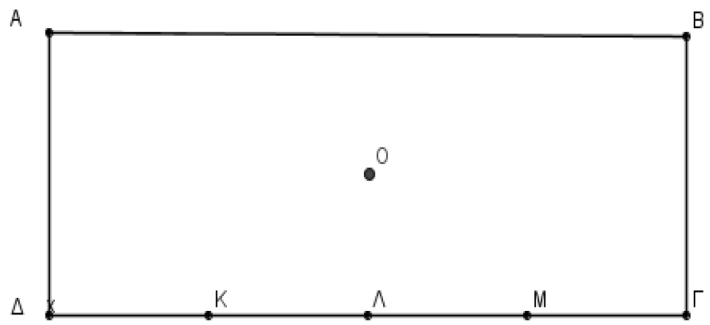
Επομένως το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο.

175 Θέμα 2 - 22042

α) $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = 4\overrightarrow{\Delta K} = 4\vec{\alpha}$.

β) $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{M\Delta} + \overrightarrow{\Delta A} = -3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

γ) $\overrightarrow{O\Delta} = \overrightarrow{O\Lambda} + \overrightarrow{\Lambda\Delta} = -\frac{1}{2}\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}$.



176 Θέμα 2 - 18878

α) Τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BT}$ είναι διαδοχικά, επομένως ισχύει:

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT} = (1,1) + (2,4) + \left(2, 5\sqrt{3} - 5\right) = \left(5, 5\sqrt{3}\right)$$

β) Η απόσταση (OT) του εξερευνητή από την κατασκήνωση στο τέλος της τρίτης ημέρας δίνεται από το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{OT}$. Έτσι είναι:

$$\left|\overrightarrow{OT}\right| = \sqrt{5^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{25 + 75} = \sqrt{100} = 10$$

Επομένως, η απόσταση από την κατασκήνωση είναι 10 km.

177 Θέμα 2 - 22060

α) $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{O\Delta} - \overrightarrow{OA} = (3,4) - (0,2) = (3 - 0, 4 - 2) = (3,2)$.

$\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OB} = (6,2) - (3,0) = (6 - 3, 2 - 0) = (3,2)$.

Άρα, $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$.

Επίσης, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (0,2) - (3,0) = (-3,2)$.

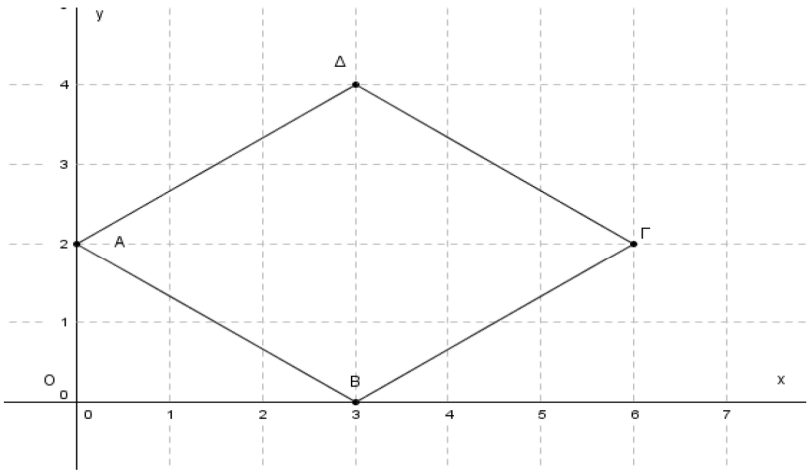
β) Από το α) ερώτημα έχουμε ότι $\overrightarrow{BA} = (-3,2)$. Οπότε $\left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.

Επίσης,

$\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OB} = (6,2) - (3,0) = (3,2)$, οπότε $\left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.

Άρα, $\left|\overrightarrow{BA}\right| = \left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|$.

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος καθώς η συνθήκη $\overrightarrow{AΔ} = \overrightarrow{BΓ}$ συνεπάγει ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, ενώ η συνθήκη $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BΓ}|$ βεβαιώνει ότι το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος (τα μήκη δύο διαδοχικών πλευρών είναι ίσα).



178 Θέμα 2 - 22052

α) Τα διανύσματα $\vec{α}$, $\vec{β}$ δεν είναι παράλληλα, αφού $\det(\vec{α}, \vec{β}) = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1 \neq 0$.

β) Το διάνυσμα $\vec{v} = (8, -21)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{α}$ και $\vec{β}$ αν και μόνον αν υπάρχουν αριθμοί λ, μ ώστε $\vec{v} = λ\vec{α} + μ\vec{β}$ ή ισοδύναμα,

$(8, -21) = λ(-2,5) + μ(1, -3)$, δηλαδή

$$\begin{cases} 8 = -2λ + μ \\ -21 = 5λ - 3μ \end{cases}$$

το οποίο είναι 2x2 γραμμικό σύστημα με αγνώστους τα λ, μ.

Το σύστημα, με την μέθοδο των οριζουσών, έχει μοναδική λύση:

$$λ = \frac{D_λ}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ -21 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{1} = -3 \text{ και}$$

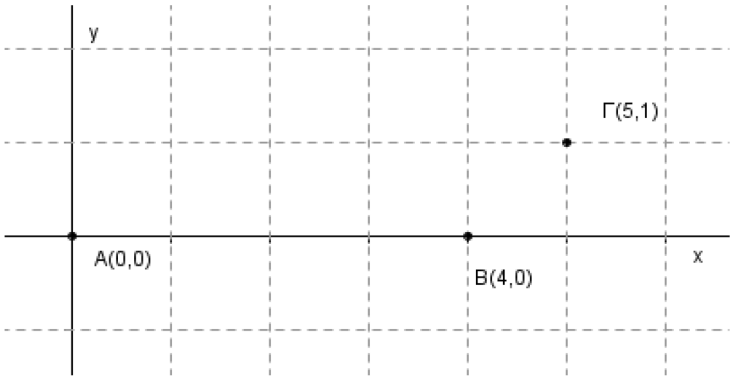
$$μ = \frac{D_μ}{D} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 5 & -21 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{2}{1} = 2.$$

Άρα,

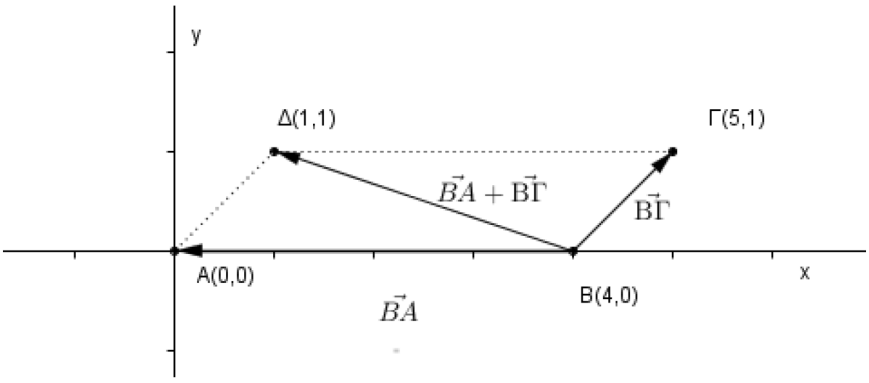
$(8, -21) = -3(-2,5) + 2(1, -3)$.

179 Θέμα 2 - 22044

α) Τα σημεία Α, Β, Γ σημειώνονται στο ακόλουθο σύστημα αξόνων:



β) Το ζητούμενο τέταρτο σημείο Δ ορίζεται από τον κανόνα του παραλληλογράμμου, ως το πέρας του διανύσματος $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{B\Gamma}$ (βλέπε ακόλουθο σχήμα).



Όμως,

$\overrightarrow{BA}=(0-4,0-0)=(-4,0)$ και

$\overrightarrow{B\Gamma}=(5-4,1-0)=(1,1)$,

Άρα,

$\overrightarrow{B\Delta}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{B\Gamma}=(-4,0)+(1,1)=(-3,\ 1)$.

Συνεπώς,

$\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Delta}=(4,0)+(-3,1)=(1,1)$.

Επομένως, το ζητούμενο σημείο είναι το σημείο $\Delta(1,1)$.

180 Θέμα 2 - 22038

α) Το διάνυσμα $\frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}$ είναι: i) ομόρροπο του $\vec{\alpha}$ (αφού $\frac{1}{|\vec{\alpha}|}>0$) και ii) μέτρου 1 (αφού $\left|\frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}\right|=\frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\alpha}|}=1$). Οπότε:

$\vec{\beta}=\frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}=\frac{(5,-12)}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{(5,-12)}{\sqrt{169}}=\frac{(5,-12)}{13}=\left(\frac{5}{13},\frac{-12}{13}\right)$.

β) Αρκεί να πολλαπλασιάσουμε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ του α) ερωτήματος με -7.

Δηλαδή, $\vec{\gamma}=-7\vec{\beta}=-7\left(\frac{5}{13},\frac{-12}{13}\right)=\left(\frac{-35}{13},\frac{84}{13}\right)$. Το πρόσημο «-» δίνει το αντίρροπο και ο παράγοντας 7 το επιθυμητό μέτρο, αφού $|\vec{\gamma}|=\left|-7\vec{\beta}\right|=|-7|\left|\vec{\beta}\right|=7\cdot 1=7$.

181 Θέμα 2 - 21681

α) Αν υποθέσουμε ότι το σημείο Δ έχει συντεταγμένες (x,y), τότε είναι $\overrightarrow{\Delta\Gamma}=(2-x,5-y)$ και $\overrightarrow{AB}=(-3-1,4-2)=(-4,2)$, οπότε

$$\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow(2-x,5-y)=(-4,2)\Leftrightarrow\begin{cases}2-x=-4\\5-y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\y=3\end{cases}$$

β) Από την ισότητα $\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{AB}$, προκύπτει ότι στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ οι απέναντι πλευρές ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες και έχουν ίδιο μήκος, οπότε το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Το κέντρο Ο του παραλληλογράμμου είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του και είναι το μέσο κάθε διαγωνίου. Το μέσο της ΑΓ έχει συντεταγμένες $\left(\frac{1+2}{2}, \frac{2+5}{2}\right)$ οπότε το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι το σημείο $O\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

182 Θέμα 2 - 15043

α)

i. Είναι $\overrightarrow{AB} = (4-0, 1-5) = (4, -4)$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = (6-4, -1-1) = (2, -2)$.

ii. Είναι $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}) = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 8 = 0$.

Επομένως $\overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{B\Gamma}$ και αφού υπάρχει κοινό σημείο το *Β*, τότε τα σημεία *Α, Β, Γ* είναι συνευθειακά.

β) Είναι:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{2 \cdot 16} = 4\sqrt{2}$ και $|\overrightarrow{B\Gamma}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{2 \cdot 4} = 2\sqrt{2}$.

Επομένως έχουμε ότι $|\overrightarrow{AB}| = 2\,|\overrightarrow{B\Gamma}|$.

<u>$2^{ος}$ τρόπος</u>:

Επειδή $\overrightarrow{AB} = (4, -4) = 2 \cdot (2, -2) = 2\,\overrightarrow{B\Gamma} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 2\,|\overrightarrow{B\Gamma}|$.

183 Θέμα 2 - 15854

α) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι παράλληλα τότε $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$.

Άρα, $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -8 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (-4) - (-8) \cdot 1 = -8 + 8 = 0$, ισχύει.

β) Το διάνυσμα $\vec{\beta}$ γίνεται

$\vec{\beta} = (-8, -4) = -4(2, 1) = -4\vec{\alpha}$.

γ) Παίρνουμε τα μέτρα στη σχέση του ερωτήματος β).

Άρα, $|\vec{\beta}| = |-4||\vec{\alpha}| = 4|\vec{\alpha}|$.

184 Θέμα 2 - 15002

α) Αν $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ τότε:

$$\overrightarrow{A\Gamma} = (3,1) \Leftrightarrow (x_\Gamma - 0, y_\Gamma - 5) = (3,1) \Leftrightarrow$$
$$x_\Gamma = 3 \text{ και } y_\Gamma - 5 = 1 \Leftrightarrow y_\Gamma = 6.$$

Άρα, $\Gamma(3,6)$.

β)

i. Είναι

$$\overrightarrow{\Gamma\Delta} = (4-3, 5-6) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta} = (1, -1).$$

ii. Έχουμε ότι:

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{\Gamma\Delta}\right)=\begin{vmatrix}3 & -3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=3(-1)-(-3)\cdot 1=-3+3=0.$$

(Εναλλακτικά: $\overrightarrow{AB}=(3,-3)=3(1,-1)=3\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.)

Άρα, τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι παράλληλα.

185 Θέμα 4 - 20938

α) Έχουμε: $|\vec{\alpha}|^2=(|\vec{\alpha}|-4)^2+(|\vec{\alpha}|-2)^2 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2-12|\vec{\alpha}|+20=0 \Leftrightarrow$

$|\vec{\alpha}|=2$ ή $|\vec{\alpha}|=10$.

Αν $|\vec{\alpha}|=2$ τότε $\vec{\alpha}=(-2,0)$ και τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}=(-2,0)$ και $\overrightarrow{OB}=(6,8)$ δεν είναι παράλληλα (σχηματίζουν τρίγωνο), αφού $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 6 & 8\end{vmatrix}=-16\neq 0$

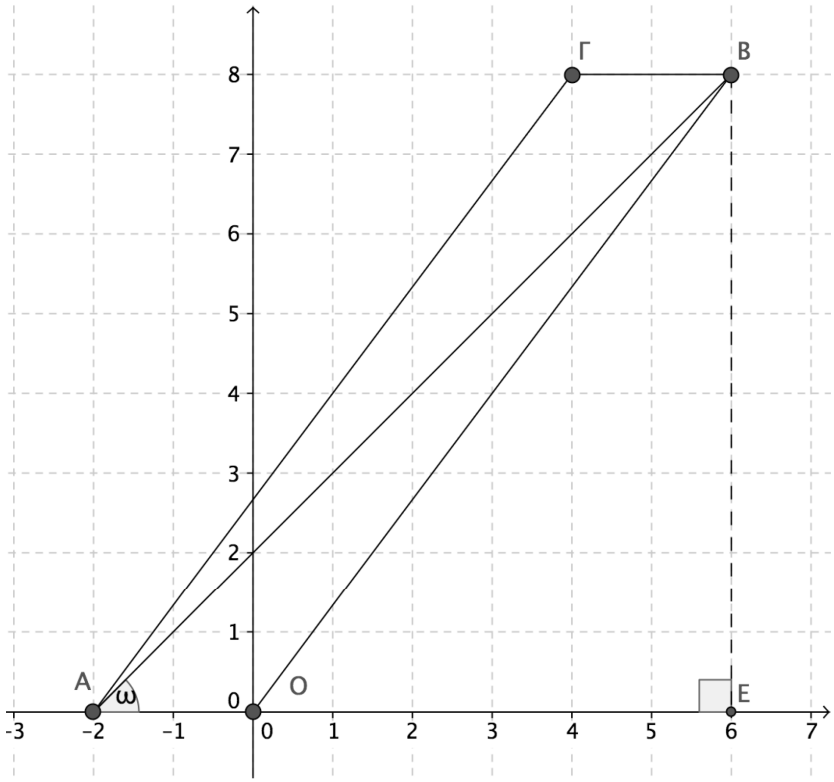
επομένως η λύση είναι δεκτή.

Αν $|\vec{\alpha}|=10$, τότε $\vec{\alpha}=(6,8)=\overrightarrow{OB}$ επομένως τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ δεν σχηματίζουν τρίγωνο. Έτσι, η λύση αυτή απορρίπτεται.

β) Για να είναι το τετράπλευρο ΟΑΓΒ παραλληλόγραμμο πρέπει και αρκεί $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{B\Gamma}$ (1). Αν $\Gamma(x,y)$ τότε η σχέση (1) γράφεται:

$(-2,0)=(x-6,y-8)\Leftrightarrow x-6=-2$ και $y-8=0\Leftrightarrow x=4$ και $y=8$, δηλαδή $\Gamma(4,8)$.

γ) Αρκεί να βρούμε την γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{AO}$ και $\overrightarrow{AB}$.



Α΄ τρόπος:

Το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ είναι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (8,8)$. Επίσης $\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA} = (2,0)$.

Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\overrightarrow{AO}$ και $\overrightarrow{AB}$, τότε:

$$\text{συν}\omega = \frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AO}|\cdot|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AO}|\cdot|\overrightarrow{AB}|} = \frac{16}{2\cdot 8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \text{συν}\frac{\pi}{4} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{4}$$

Β΄ τρόπος:

Από το παραπάνω σχήμα παρατηρούμε ότι, αν $E(6,0)$ είναι η προβολή του σημείου Β πάνω στον άξονα x΄x τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε:

$$\text{εφ}\omega = \frac{BE}{EA} = \frac{8}{8} = 1 = \text{εφ}\frac{\pi}{4} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{4}.$$

186 Θέμα 2 - 20733

α) Το διάνυσμα $\overrightarrow{B\Gamma}$ μπορεί να γραφεί ως διαφορά των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$, δηλαδή

$\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB}$ τότε $\overrightarrow{B\Gamma} = (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) - (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 2\cdot\vec{\beta}$.

β) Για να υπολογίσουμε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ αρκεί να αντικαταστήσουμε αντίστοιχα τα διανύσματα και να κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = (\vec{\alpha} - \vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \vec{\alpha}^2 - \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 - |\vec{\beta}|^2 = 0.$

γ) Επειδή το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων είναι μηδέν τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετα.

187 Θέμα 2 - 20732

α) $\vec{\alpha} = (2,1)$, $\vec{\beta} = (-8,-4) = -4\vec{\alpha}$. Άρα, $\vec{\beta} = -4\,\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$.

Επειδή $\vec{\beta} = -4\,\vec{\alpha}$ τότε $|\vec{\beta}| = |-4\,\vec{\alpha}| = 4|\vec{\alpha}|$.

β) Επειδή, $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ η μεταξύ τους γωνία θα είναι $180°$.

γ) Το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\alpha}\cdot(-4\vec{\alpha}) = -4\cdot\vec{\alpha}^2 = -4\cdot|\vec{\alpha}^2| < 0$ αφού $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$.

188 Θέμα 2 - 20773

α) Έχουμε $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta} = 2\cdot(1,-2) + (2,3) = (2,-4) + (2,3) = (4,-1)$

β) Για να είναι κάθετα τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ πρέπει και αρκεί να ισχύει

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow (4,-1)\cdot(1,\kappa) = 0 \Leftrightarrow 4\cdot 1 + (-1)\cdot\kappa = 0 \Leftrightarrow 4 - \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 4$

γ) Για $\kappa = 4$ έχουμε $\vec{v} = (1,4)$ και το μέτρο του είναι $|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$.

189 Θέμα 2 - 22040

α) Παίρνουμε $\vec{\beta} = (3,4)$.

$\vec{\beta} \perp \vec{\alpha}$ καθώς $\vec{\beta} \cdot \vec{\alpha} = (3,4) \cdot (-4,3) = 3 \cdot (-4) + 4 \cdot 3 = -12 + 12 = 0$.

β) Αν $\vec{\beta}$ είναι το διάνυσμα του α) ερωτήματος, τότε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = \frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}$ είναι:

i. κάθετο στο $\vec{\alpha}$, αφού $\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|} \cdot \vec{\alpha} = \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}}{|\vec{\beta}|} = 0$ και

ii. μέτρου 1 (αφού $\left|\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}\right| = \frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\beta}|} = 1$).

Οπότε:

$\vec{\gamma} = \frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|} = \frac{(3,4)}{\sqrt{3^2+4^2}} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

190 Θέμα 2 - 21682

α) Αν προσθέσουμε τις δοσμένες διανυσματικές ισότητες, παίρνουμε

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\alpha} - \vec{\beta} = (11, 2) + (-5, -10)$$

δηλαδή $2\vec{\alpha} = (6, -8)$, οπότε $\vec{\alpha} = (3, -4)$.

Με $\vec{\alpha} = (3, -4)$ η πρώτη ισότητα δίνει

$$\vec{\beta} = (11, 2) - (3, -4) = (8, 6)$$

β) Για τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, -4)$ και $\vec{\beta} = (8, 6)$ έχουμε

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = (3, -4)(8, 6) = 24 - 24 = 0$$

οπότε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$. Επιπλέον,

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5, |\vec{\beta}| = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$$

οπότε $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|$.

191 Θέμα 2 - 15252

α) Είναι $\overrightarrow{\text{ΒΓ}} = \overrightarrow{\text{ΑΓ}} - \overrightarrow{\text{ΑΒ}} = (3,-1) - (2,1) = (1,-2)$.

β) Είναι $\overrightarrow{\text{ΑΒ}} \cdot \overrightarrow{\text{ΒΓ}} = (2,1) \cdot (1,-2) = 2 - 2 = 0$ οπότε $\overrightarrow{\text{ΑΒ}} \perp \overrightarrow{\text{ΒΓ}}$.

Επίσης $\left|\overrightarrow{\text{ΒΓ}}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$ και $\left|\overrightarrow{\text{ΑΒ}}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

Αφού $\overrightarrow{\text{ΑΒ}} \perp \overrightarrow{\text{ΒΓ}}$ και $\left|\overrightarrow{\text{ΑΒ}}\right| = \left|\overrightarrow{\text{ΒΓ}}\right|$ το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με υποτείνουσα την ΑΓ.

γ) Είναι $(\text{ΑΒΓ}) = \frac{(\text{ΑΒ}) \cdot (\text{ΒΓ})}{2} = \frac{\left|\overrightarrow{\text{ΑΒ}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\text{ΒΓ}}\right|}{2} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{2} = \frac{5}{2}$.

192 Θέμα 2 - 15852

α) Δίνονται οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, τότε

$$\vec{v} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = 2(3,2) + 3(-2,1) = (0,7).$$

β) Υπολογίσουμε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

- $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = -6 + 2 = -4.$
- $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$

γ) Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{v}$ υπολογίζεται

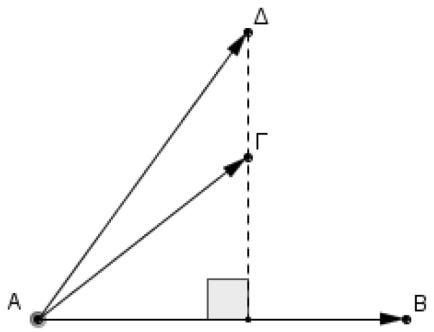
$$\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \left(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}\right) = 2|\vec{\alpha}|^2 + 3\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2 \cdot 13 + 3(-4) = 26 - 12 = 14.$$

193 Θέμα 4 - 22064

α) i) Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων, εξ ορισμού, είναι αριθμός. Άρα, οι ποσότητες $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$ είναι αριθμοί.

ii) Ως αριθμοί, οι ποσότητες $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$ μπορούν να συγκριθούν και μάλιστα υπάρχουν τρεις περιπτώσεις: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} > \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$ ή $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} < \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$ ή $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$.

β) Στην περίπτωση αυτή ισχύει: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$



αφού:

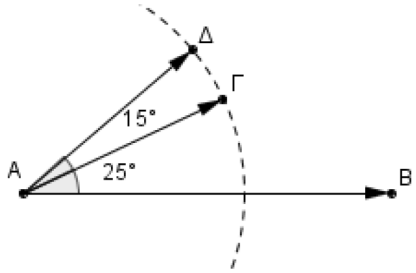
$\overrightarrow{\Gamma\Delta} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow (\overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{A\Gamma}) \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \left(\overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{A\Gamma}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

Άρα,

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta}.$

γ) Εδώ, τα Γ, Δ είναι σημεία κύκλου με κέντρο Α και ακτίνα, ας πούμε, ρ.

Οπότε, $\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right| = \left|\overrightarrow{A\Delta}\right| = \rho.$



Έχουμε λοιπόν,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{A\Gamma}|\sigma\upsilon\nu 25^o=|\overrightarrow{AB}|\rho\sigma\upsilon\nu 25^o$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{A\Delta}|\sigma\upsilon\nu(25^o+15^o)=|\overrightarrow{AB}|\rho\sigma\upsilon\nu 40^o$

Όμως, $\sigma\upsilon\nu 25^o>\sigma\upsilon\nu 40^o$.

Άρα, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}>\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$.

194 Θέμα 4 - 22063

α) Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα που σχηματίζουν γωνία θ, με $0^o\le\theta\le 180^o$.

i) Οι ποσότητες $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$, $|\vec{\alpha}|$, $|\vec{\beta}|$ είναι μη αρνητικές, οπότε:

$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|\Leftrightarrow|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=(|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2+2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\Leftrightarrow|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\theta=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\theta=1\Leftrightarrow\theta=0^o\Leftrightarrow\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$.

ii) Οι ποσότητες $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$, $\big||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\big|$ είναι μη αρνητικές, οπότε:

$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=\big||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\big|\Leftrightarrow|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=\big||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\big|^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2-2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\Leftrightarrow|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\theta=-|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\theta=-1\Leftrightarrow\theta=180^o\Leftrightarrow\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$.

β) Από υπόθεση έχουμε: $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$, $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$, $|\vec{\gamma}|=1$.

i) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}\Rightarrow\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=-\vec{\beta}$

Άρα,

$|\vec{\alpha}+\vec{\gamma}|=|-\vec{\beta}|=2=1+1=|\vec{\alpha}|+|\vec{\gamma}|$

Συνεπώς, από το α)i ερώτημα, $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\gamma}$.

ii) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}\Rightarrow\vec{\alpha}+\vec{\beta}=-\vec{\gamma}$

Άρα,

$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|-\vec{\gamma}|=1=|1-2|=\big||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\big|$

Συνεπώς, από το α)ii ερώτημα, $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$.

ii) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0} \Rightarrow \vec{\alpha}+\vec{\beta}=-\vec{\gamma}$

Άρα,

$$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right| = \left|-\vec{\gamma}\right| = 1 = |1-2| = \left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right|$$

Συνεπώς, από το α)ii ερώτημα, $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$.

iii) Αφού $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$, υπάρχει $\lambda > 0$ και $\mu < 0$ τέτοια ώστε $\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta} = \mu\vec{\alpha}$.

Στις δύο τελευταίες σχέσεις παίρνουμε μέτρα και έχουμε:

$|\vec{\gamma}| = \lambda|\vec{\alpha}|$ και $|\vec{\beta}| = -\mu|\vec{\alpha}|$, αφού $|\lambda| = \lambda$ και $|\mu| = -\mu$.

Όμως, : $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$, $|\vec{\gamma}| = 1$, οπότε αντικαθιστώντας στις παραπάνω σχέσεις έχουμε $\lambda = 1$ και $\mu = -2$.

Άρα, $\vec{\alpha} = \vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} = -2\vec{\alpha}$.

195 Θέμα 2 - 18520

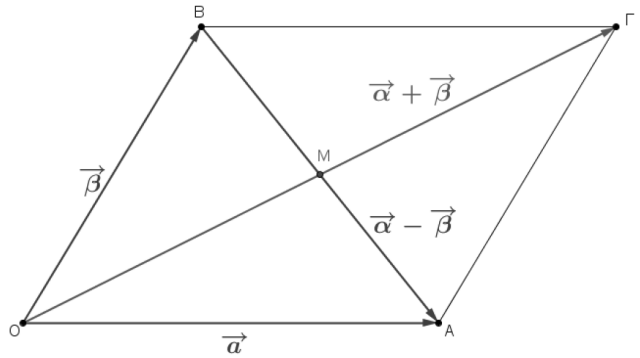
α) Ισχύει:

$$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2 + \left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2 = \left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2 + \left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2 + 2\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 + \vec{\alpha}^2 - 2\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 =$$

$$2\vec{\alpha}^2 + 2\vec{\beta}^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 + 2\left|\vec{\beta}\right|^2.$$

β)

i. Σε κάθε παραλληλόγραμμο $OA\Gamma B$, αν οι δύο πλευρές του συμβολισθούν με $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$, τότε η μία διαγώνιος εκφράζει το άθροισμα τους, δηλαδή $\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και η άλλη διαγώνιος εκφράζει τη διαφορά τους, δηλαδή $\overrightarrow{BA} = \vec{\alpha}-\vec{\beta}$.



ii. Επομένως, σε κάθε παραλληλόγραμμο $OA\Gamma B$ ισχύει:

$$(O\Gamma)^2 + (AB)^2 = 2(OA)^2 + 2(OB)^2 \text{ ή}$$

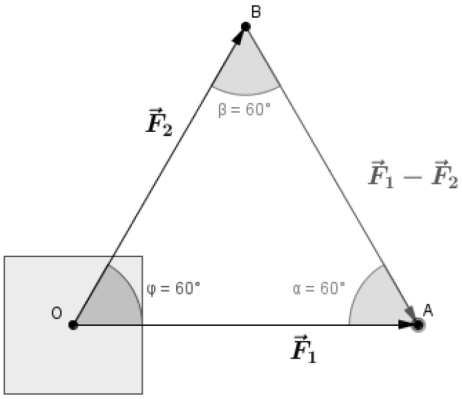
$$(O\Gamma)^2 + (AB)^2 = 2[(OA)^2 + (OB)^2]$$

Δηλαδή, το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου ισούται με το διπλάσιο του αθροίσματος των τετραγώνων δύο διαδοχικών πλευρών του.

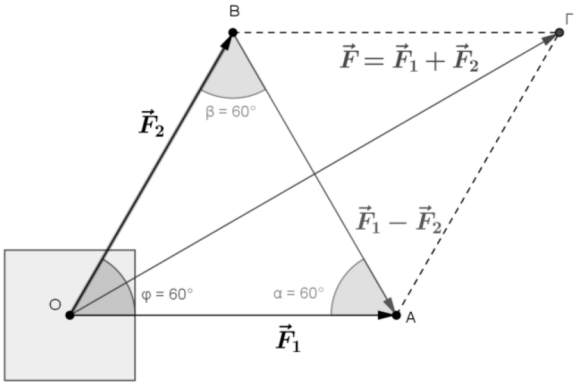
γ) Η συνισταμένη των δύο δυνάμεων είναι το διανυσματικό τους άθροισμα, δηλαδή

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$$

Είναι $|\vec{F_1}| = |\vec{F_2}| = 10\ N$. Επομένως $(OA) = (OB) = 10$.



Αφού η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{F_1}$ και $\vec{F_2}$ είναι 60°, το τρίγωνο OAB που σχηματίζεται είναι ισόπλευρο με πλευρά 10 και $(AB) = |\vec{F_1} - \vec{F_2}| = 10$. Σχεδιάζοντας το παραλληλόγραμμο με πλευρές τα δύο διανύσματα, προκύπτει το παρακάτω σχήμα.



Από τη σχέση (1) λοιπόν είναι:

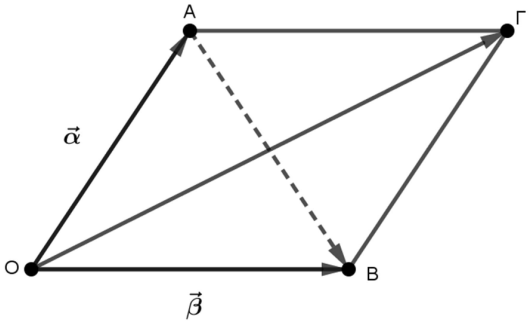
$$|\vec{F_1} + \vec{F_2}|^2 + |\vec{F_1} - \vec{F_2}|^2 = 2|\vec{F_1}|^2 + 2|\vec{F_2}|^2 \Leftrightarrow |\vec{F}|^2 = 2|\vec{F_1}|^2 + 2|\vec{F_2}|^2 - |\vec{F_1} - \vec{F_2}|^2 \Leftrightarrow$$

$$|\vec{F}|^2 = 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^2 - 10^2 \Leftrightarrow |\vec{F}|^2 = 3 \cdot 10^2 \Leftrightarrow |\vec{F}| = 10\sqrt{3}$$

Επομένως, η συνισταμένη $\vec{F}$ των δύο δυνάμεων έχει μέτρο $|\vec{F}| = 10\sqrt{3}\ N$ και την κατεύθυνση της διαγωνίου $O\Gamma$, όπως φαίνεται στο ανωτέρω σχήμα.

196 Θέμα 4 - 15320

α) Το παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Οπότε από τον λεγόμενο «κανόνα του παραλληλογράμμου» προκύπτει: $\overrightarrow{\text{ΟΓ}} = \overrightarrow{\text{ΟΑ}} + \overrightarrow{\text{ΟΒ}} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Επίσης $\overrightarrow{\text{ΑΒ}} = \overrightarrow{\text{ΟΒ}} - \overrightarrow{\text{ΟΑ}} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$.

i. Έχουμε:

$$\left|\overrightarrow{\text{ΟΓ}}\right|^2 = \left(\overrightarrow{\text{ΟΓ}}\right)^2 = \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = \left|\vec{\alpha}\right|^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \left|\vec{\beta}\right|^2.$$

ii. Έχουμε:

$$\left|\overrightarrow{\text{ΑΒ}}\right|^2 = \left(\overrightarrow{\text{ΑΒ}}\right)^2 = \left(\vec{\beta} - \vec{\alpha}\right)^2 = \vec{\beta}^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\alpha}^2 = \left|\vec{\beta}\right|^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \left|\vec{\alpha}\right|^2 = \left|\vec{\alpha}\right|^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \left|\vec{\beta}\right|^2.$$

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned}
&\left|\overrightarrow{\text{ΟΓ}}\right| = \left|\overrightarrow{\text{ΑΒ}}\right| \Leftrightarrow \\
&\left|\overrightarrow{\text{ΟΓ}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\text{ΑΒ}}\right|^2 \Leftrightarrow \\
&\left|\vec{\alpha}\right|^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \left|\vec{\beta}\right|^2 = \left|\vec{\alpha}\right|^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \left|\vec{\beta}\right|^2 \Leftrightarrow \\
&4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \\
&\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \overset{\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq\vec{0}}{\Leftrightarrow} \\
&\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}.
\end{aligned}$$

Άρα το παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ είναι ορθογώνιο γιατί η γωνία $\widehat{\text{Ο}}$ είναι ορθή.

Εναλλακτικά, με δεδομένο ότι $\left|\overrightarrow{\text{ΟΓ}}\right| = \left|\overrightarrow{\text{ΑΒ}}\right|$, το παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ είναι ορθογώνιο γιατί οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

197 Θέμα 2 - 20868

α) Αφού η ευθεία (ε) διέρχεται από τα σημεία A, B έχει κλίση $\lambda = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-1}{3-1} = \frac{1}{2}$.

β) Ως γνωστόν, η εξίσωση ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M(x_0, y_0)$ και έχει κλίση λ είναι η $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

Επομένως, η εξίσωση της ευθείας (ε), η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$ και έχει κλίση $\lambda = \frac{1}{2}$, είναι: $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

γ) Επειδή το σημείο Γ της ευθείας (ε) ανήκει και στον άξονα $x'x$, είναι της μορφής $\Gamma(x, 0)$.

Έτσι έχουμε:

$$0 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Επομένως, το ζητούμενο σημείο είναι το $\Gamma(-1,0)$.

198 Θέμα 2 - 22049

α) Τα ζεύγη των πλευρών του τετραγώνου που είναι κάθετες μεταξύ τους είναι τέσσερα:

(i) $A_1A_2 \perp A_2A_3$, με αντίστοιχες κλίσεις λ_1, λ_2 και $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$.

(ii) $A_2A_3 \perp A_3A_4$, με αντίστοιχες κλίσεις λ_2, λ_3 και $\lambda_2 \cdot \lambda_3 = -1$.

(iii) $A_3A_4 \perp A_4A_1$, με αντίστοιχες κλίσεις λ_3, λ_4 και $\lambda_3 \cdot \lambda_4 = -1$.

(iv) $A_4A_1 \perp A_1A_2$, με αντίστοιχες κλίσεις λ_4, λ_1 και $\lambda_4 \cdot \lambda_1 = -1$.

β) Από το α) ερώτημα, κάθε προσθετέος του αθροίσματος: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_3 \cdot \lambda_4 + \lambda_4 \cdot \lambda_1$ είναι ίσος με -1, επομένως το άθροισμα ισούται με -4.

199 Θέμα 2 - 22047

α) Τα ζεύγη των παράλληλων πλευρών του τετραγώνου είναι δύο:

(i) $A_1A_2 \parallel A_3A_4$, με αντίστοιχες κλίσεις $\lambda_1 = \lambda_3$ και

(ii) $A_2A_3 \parallel A_4A_1$, με αντίστοιχες κλίσεις $\lambda_2 = \lambda_4$.

β) Αφού, από το α) ερώτημα, είναι $\lambda_1 = \lambda_3$ και $\lambda_2 = \lambda_4$, έχουμε :

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_2}{\lambda_4} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2} = 1 + 1 = 2 .$$

200 Θέμα 4 - 22065

α) Το σημείο $A(0,0)$ είναι η αρχή των αξόνων. Επομένως,

$\overrightarrow{A\Delta} = (2,4)$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB} = (10,4) - (8,0) = (2,4)$, οπότε $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$, άρα $A\Delta = \parallel B\Gamma$,

συνεπώς το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα, τότε

$M(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2})$ ή ισοδύναμα $M(\frac{0+8}{2}, \frac{0+0}{2})$, δηλαδή $M(4,0)$.

$N(\frac{x_B+x_\Gamma}{2}, \frac{y_B+y_\Gamma}{2})$ ή ισοδύναμα $N(\frac{8+10}{2}, \frac{0+4}{2})$, δηλαδή $N(9,2)$.

γ) Εξίσωση της ευθείας ΑΓ: $\frac{y-y_A}{x-x_A} = \frac{y_\Gamma-y_A}{x_\Gamma-x_A} \Leftrightarrow \frac{y-0}{x-0} = \frac{4-0}{10-0} \Leftrightarrow y = \frac{2}{5}x$ (1).

Εξίσωση της ευθείας ΔΜ: $\frac{y-y_M}{x-x_M} = \frac{y_\Delta-y_M}{x_\Delta-x_M} \Leftrightarrow \frac{y-0}{x-4} = \frac{4-0}{2-4} \Leftrightarrow y = -2x + 8$ (2).

Εξίσωση της ευθείας ΔΝ: $\frac{y-y_N}{x-x_N} = \frac{y_\Delta-y_N}{x_\Delta-x_N} \Leftrightarrow \frac{y-2}{x-9} = \frac{4-2}{2-9} \Leftrightarrow y - 2 = \frac{-2}{7}(x-9) \Leftrightarrow y = \frac{-2}{7}x + \frac{32}{7}$ (3).

Το σημείο Κ είναι σημείο τομής των ευθεών ΑΓ και ΔΜ, συνεπώς οι συντεταγμένες του είναι λύση του συστήματος των εξισώσεων (1) και (2): $y = \frac{2}{5}x$ και $y = -2x + 8$.

Εξισώνοντας τα δεξιά μέλη έχουμε $\frac{2}{5}x = -2x + 8$ δηλαδή $x = \frac{10}{3}$, άρα $K(\frac{10}{3}, \frac{4}{3})$.

Το σημείο Λ είναι σημείο τομής των ευθεών ΑΓ και ΔΝ, συνεπώς οι συντεταγμένες του είναι λύση του συστήματος των εξισώσεων (1) και (3): $y = \frac{2}{5}x$ και $y = \frac{-2}{7}x + \frac{32}{7}$.

Εξισώνοντας τα δεξιά μέλη έχουμε $\frac{2}{5}x = \frac{-2}{7}x + \frac{32}{7}$ δηλαδή $x = \frac{20}{3}$, άρα $\Lambda(\frac{20}{3}, \frac{8}{3})$.

δ) Το σημείο $A(0,0)$ είναι η αρχή των αξόνων και έχουμε:

Από την εκφώνηση: $\overrightarrow{A\Gamma} = (10,4)$

Από την απάντηση του γ) ερωτήματος: $\overrightarrow{AK} = (\frac{10}{3}, \frac{4}{3})$ και $\overrightarrow{A\Lambda} = (\frac{20}{3}, \frac{8}{3})$.

Άρα, $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{A\Lambda} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A\Gamma}$.

Συνεπώς, τα σημεία Κ και Λ τριχοτομούν τη διαγώνιο ΑΓ.

201 Θέμα 4 - 14970

α) Με $\lambda = 1$ έχουμε

$$y = x - 2 + 1 - 2 \Rightarrow y = x - 3$$

ενώ με $\lambda = 2$ έχουμε $y = 2x - 4$.

Οι συντεταγμένες του Μ προκύπτουν από τη λύση του αντίστοιχου συστήματος. Είναι:

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ x - 3 = 2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Επομένως το κοινό σημείο των δυο ευθειών είναι το $M(1, -2)$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι συντεταγμένες του Μ επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Με $x = 1$ η εξίσωση γράφεται

$$y = \lambda(1 - 2) + \lambda - 2 \Leftrightarrow y = -\lambda + \lambda - 2 \Leftrightarrow y = -2$$

οπότε πραγματικά κάθε ευθεία που προκύπτει από την δοσμένη εξίσωση διέρχεται από το Μ.

γ) i. Με $y = 0$ στην δοσμένη εξίσωση παίρνουμε:

$$\lambda(x - 2) + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda x - \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda x = \lambda + 2 \Leftrightarrow x = \frac{\lambda + 2}{\lambda}$$

Προφανώς $\lambda \neq 0$, αφού με $\lambda = 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

Με $x = 0$ στη δοσμένη εξίσωση παίρνουμε:

$$y = -2\lambda + \lambda - 2 \Leftrightarrow y = -\lambda - 2$$

Επομένως η ευθεία τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο $A(0,-\lambda-2)$ και τον x'x στο σημείο $B\left(\frac{\lambda+2}{\lambda},0\right)$.

ii. Ισχύει: $(OA)=|-\lambda-2|=|\lambda+2|$, $(OB)=\left|\frac{\lambda+2}{\lambda}\right|=\frac{|\lambda+2|}{|\lambda|}$ και το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι $(OAB)=\frac{1}{2}(OA)(OB)=\frac{1}{2}\frac{|\lambda+2|^2}{|\lambda|}$. Έτσι, έχουμε:

$$(OAB)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\frac{|\lambda+2|^2}{|\lambda|}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow(\lambda+2)^2=|\lambda|$$

- Αν $\lambda>0$, τότε έχουμε:

$$\lambda^2+4\lambda+4=\lambda\Leftrightarrow\lambda^2+3\lambda+4=0$$, που δεν έχει πραγματικές ρίζες.

- Αν $\lambda<0$, τότε έχουμε:

$$\lambda^2+4\lambda+4=-\lambda\Leftrightarrow\lambda^2+5\lambda+4=0\Leftrightarrow\lambda=-1 \text{ ή } \lambda=-4$$

202 Θέμα 2 - 22059

α) Το $A(1,-3)$ δεν είναι σημείο της ευθείας ε: $4x+6y=1$, καθώς οι συντεταγμένες του σημείου δεν επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας μια και: $4\cdot1+6\cdot(-3)=-14\neq1$.

β) $4x+6y=1\Rightarrow y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}$ άρα, λόγω παραλληλίας, η κλίση της ευθείας ε είναι $\lambda=-\frac{2}{3}$. Οπότε, η ζητούμενη ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(1,-3)$ και έχει κλίση $\lambda=-\frac{2}{3}$, συνεπώς έχει εξίσωση: $y-(-3)=-\frac{2}{3}(x-1)$ ή ισοδύναμα $2x+3y+7=0$.

203 Θέμα 4 - 21652

α) Η εξίσωση $\lambda x+y=2\lambda$ είναι της μορφής $Ax+By=\Gamma$ με $B=1\neq0$ οπότε παριστάνει ευθεία ε_λ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. Ομοίως η εξίσωση $x+\lambda y=\lambda+1$ είναι της μορφής $Ax+By=\Gamma$ με $A=1\neq0$ οπότε παριστάνει ευθεία ε_λ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Οι ευθείες ε_λ και η_λ τέμνονται αν και μόνο αν το σύστημά τους έχει μοναδική λύση. Το σύστημά τους $\begin{cases}\lambda x+y=2\lambda\\x+\lambda y=\lambda+1\end{cases}$ είναι γραμμικό με ορίζουσα

$$D=\begin{vmatrix}\lambda & 1\\1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-1=(\lambda+1)(\lambda-1).$$

Για να έχει μοναδική λύση πρέπει και αρκεί $D\neq0\Leftrightarrow\lambda^2-1\neq0\Leftrightarrow\lambda^2\neq1\Leftrightarrow\lambda\neq\pm1$.

γ) Για $\lambda\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$

i. Το σημείο τομής M των ε_λ και η_λ προσδιορίζεται από τη λύση του συστήματος $\begin{cases}\lambda x+y=2\lambda\\x+\lambda y=\lambda+1\end{cases}$ και είναι το σημείο με συντεταγμένες $\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)$, όπου

$$D_x = \begin{vmatrix} 2\lambda & 1 \\ \lambda+1 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda^2 - \lambda - 1 = 2(\lambda-1)(\lambda+\frac{1}{2})$$ και

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 2\lambda \\ 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2\lambda = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda-1).$$

Είναι $\frac{D_x}{D} = \frac{2(\lambda-1)(\lambda+\frac{1}{2})}{(\lambda+1)(\lambda-1)} = \frac{2\lambda+1}{\lambda+1}$ και $\frac{D_y}{D} = \frac{\lambda(\lambda-1)}{(\lambda+1)(\lambda-1)} = \frac{\lambda}{\lambda+1}$

Συνεπώς $\mathrm{M}\left(\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}, \frac{\lambda}{\lambda+1}\right)$ με $\lambda \neq \pm 1$.

ii. Το M κινείται στην ευθεία $\zeta : x - y = 1$ αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ζ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Πράγματι $\frac{2\lambda+1}{\lambda+1} - \frac{\lambda}{\lambda+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda+1}{\lambda+1} = 1$ που ισχύει.

204 Θέμα 4 - 15004

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε_1 είναι

$$\lambda_1 = \frac{5-2}{8-4} = \frac{3}{4}.$$

Άρα, η ε_1 έχει εξίσωση:

$$\varepsilon_1 : y - 2 = \frac{3}{4}(x-4) \Leftrightarrow$$
$$\varepsilon_1 : 4y - 8 = 3x - 12 \Leftrightarrow$$
$$\varepsilon_1 : 3x - 4y - 4 = 0.$$

β) Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-4, -3)$ και $\vec{\beta} = (-1, -7)$ είναι παράλληλα στις ευθείες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα. Άρα, η οξεία γωνία $\hat{\varphi}$ των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι ίση ή παραπληρωματική της γωνίας $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$. Έχουμε ότι:

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$
$$|\vec{\beta}| = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

και

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = (-4)(-1) + (-3)(-7) = 25.$$

Οπότε,

$$\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} = \frac{25}{5 \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sigma\upsilon\nu 45^o.$$

Άρα $\hat{\varphi} = (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 45^o$.

γ) Για να βρούμε το σημείο τομής των ε_1 και ε_2, λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} 3x - 4y - 4 = 0 \\ 7x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4(7x-1) - 4 = 0 \\ y = 7x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -25x = 0 \\ 7x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Άρα, το σημείο τομής είναι το $(0,-1)$.

δ) Για να είναι η ε_2 διχοτόμος της γωνίας που σχηματίζουν οι ε_1 και ε_3, πρέπει για τη γωνία θ που σχηματίζουν οι ε_1 και ε_3 να ισχύει $\hat{\theta} = 2 \cdot 45^o = 90^o$, δηλαδή πρέπει $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_3$. Άρα, αν λ_1 και λ_3 οι συντελεστές διεύθυνσης των ε_1 και ε_3, ισχύει $\lambda_1 \cdot \lambda_3 = -1$.

Είναι $\lambda_1 = \frac{3}{4}$, οπότε:

$$\frac{3}{4}\lambda_3 = -1 \Leftrightarrow \lambda_3 = -\frac{4}{3}.$$

Επίσης, η ευθεία ε_3 πρέπει να διέρχεται από το σημείο τομής των ε_1 και ε_2, το οποίο από το ερώτημα γ) είναι το $(0,-1)$.

Άρα, η ε_3 έχει εξίσωση:

$$\varepsilon_3: y-(-1) = -\frac{4}{3}(x-0) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon_3: 3y+3 = -4x \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon_3: 4x+3y+3 = 0.$$

205 Θέμα 2 - 21260

α) Ένα σημείο ανήκει στην γραφική παράσταση μιας ευθείας αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Είναι $y-2x=0 \underset{y=10}{\overset{x=5}{\Leftrightarrow}} 10-2\cdot 5=0 \Leftrightarrow 0=0$.

β) Έχουμε $A(5,10)$.

Οπότε $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A, y_B-y_A)=(1-5,1-10)=(-4,-9)$ (1) και

$\overrightarrow{A\Gamma}=(x_\Gamma-x_A, y_\Gamma-y_A)=(-1-5,3-10)=(-6,-7)$ (2).

γ) Από το τύπο του εμβαδού έχουμε

$$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right| \underset{(2)}{\overset{(1)}{=}} \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}-4 & -9\\ -6 & -7\end{matrix}\right\| =$$

$$\frac{1}{2}|28-54|=13\ \tau\mu.$$

206 Θέμα 2 - 20926

α) Για να αποδείξουμε ότι το σημείο $B(1,0)$ ανήκει στην ε, αρκεί να δείξουμε ότι

$1-2\cdot 0 = 1$ ή $1=1$, που ισχύει.

Για το σημείο $A(0,2)$ έχουμε: $0-2\cdot 2=-4 \neq 1$, επομένως το σημείο A δεν είναι σημείο της ε, αφού οι συντεταγμένες του δεν επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

β) Έχουμε: $d(A,\varepsilon) = \dfrac{|0-2\cdot 2-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

γ) Έχουμε: $(AB) = \sqrt{(1-0)^2+(0-2)^2} = \sqrt{5}$.

Επομένως $(AB) = d(A,\varepsilon)$, δηλαδή η προβολή του A στην ευθεία ε είναι το B.

207 Θέμα 2 - 20864

α) Η ευθεία $\varepsilon_1 : 2x + y - 6 = 0$ γράφεται και $\varepsilon_1 : y = -2x + 6$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = -2$.

Η ευθεία $\varepsilon_2 : 2x + y + 2 = 0$ γράφεται και $\varepsilon_2 : y = -2x - 2$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2 = -2$.

Επειδή $\lambda_1 = \lambda_2$, οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.

β)

i. Το σημείο $\mathrm{A}(0,6)$ είναι σημείο της ε_1, αφού $2 \cdot 0 + 6 - 6 = 0$.

ii. Η απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι ίση με την απόσταση του σημείου A από την ευθεία $\varepsilon_2 : 2x + y + 2 = 0$. Άρα:

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d\left(\mathrm{A}, \varepsilon_2\right) = \frac{\left|2 \cdot 0 + 1 \cdot 6 + 2\right|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}.$$

208 Θέμα 2 - 18733

α) Είναι $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1-4, 1-3) = (-3, -2)$ και

$\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = (6-4, 0-3) = (2, -3)$.

β) Έχουμε $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = -3 \cdot 2 + (-2)(-3) = 0$, άρα τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ είναι κάθετα.

γ) Είναι $(\mathrm{MA}) = \sqrt{\left(4 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(3 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{26}}{2}$ και

$(\mathrm{MB}) = \sqrt{\left(1 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{26}}{2}$. Άρα $(\mathrm{MA}) = (\mathrm{MB})$.

Εναλλακτική Λύση

Παρατηρούμε για τις συντεταγμένες του σημείου M ότι ισχύει $\begin{cases} \frac{7}{2} = \frac{1+6}{2} = \frac{x_{\mathrm{B}} + x_{\Gamma}}{2} \\ \frac{1}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{y_{\mathrm{B}} + y_{\Gamma}}{2} \end{cases}$,

δηλαδή το σημείο M είναι το μέσον της υποτείνουσας $\mathrm{B\Gamma}$. Από το β) ερώτημα η γωνία $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$ είναι ορθή και από την Ευκλείδεια γεωμετρία γνωρίζουμε ότι το μέσον υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου ισαπέχει από τις κορυφές του, άρα $(\mathrm{MA}) = (\mathrm{MB})$.

209 Θέμα 4 - 20939

α) Η εξίσωση: $(\lambda + 1)\mathrm{x} + (\lambda - 1)\mathrm{y} + 2 = 0$ είναι της μορφής $\mathrm{Ax} + \mathrm{By} + \Gamma = 0$, με

$\mathrm{A} = \lambda + 1$ και $\mathrm{B} = \lambda - 1$.

Επειδή $\lambda \in \{0,1,2,3,4,5\}$ έχουμε: $\mathrm{A} = \lambda + 1 \neq 0$.

Έτσι, όλες αυτές οι γραμμές είναι ευθείες.

β) Για $\lambda = 1$, προκύπτει η ευθεία ε_1: $x = -1$, ενώ για $\lambda = 2$, προκύπτει η ευθεία ε_2: $3x + y = -2$.

Οι ε_1, ε_2 τέμνονται στο σημείο $(-1,1)$. Γνωρίζοντας ότι όλες οι γραμμές σύνδεσης διέρχονται από την πηγή Π, συμπεραίνουμε ότι η πηγή του νερού αντιστοιχεί στο σημείο $\Pi(-1,1)$.

γ) Για $x = 0$ και $y = 0$, προκύπτει: $(\lambda + 1) \cdot 0 + (\lambda - 1) \cdot 0 + 2 \neq 0$.

Επομένως το $O(0,0)$ δεν ανήκει σε κάποια από τις ευθείες.

δ)

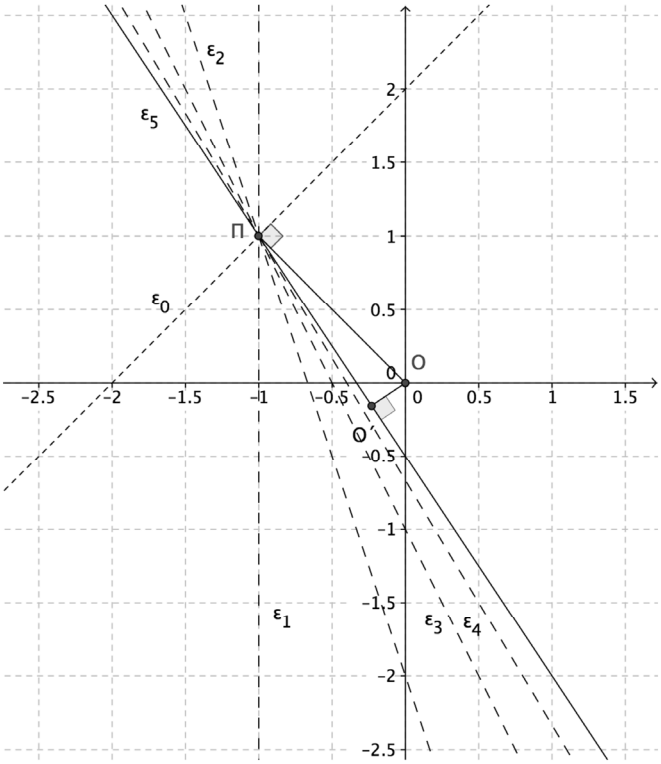
i. Η απόσταση του Ο από το Π είναι $(O\Pi) = \sqrt{(-1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$, ενώ αν ε_λ: $(\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y + 2 = 0$, τότε

$$d(O, \varepsilon_\lambda) = \frac{|(\lambda-1)0 + (\lambda+1)0 + 2|}{\sqrt{(\lambda-1)^2 + (\lambda+1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2\lambda^2 + 2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}, \quad \lambda \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

Έχουμε: $d(O, \varepsilon_\lambda) = (O\Pi) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda^2+1}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2+1} = 1 \Leftrightarrow \lambda = 0.$

Δηλαδή οι δύο επιλογές οδηγούν στο ίδιο κόστος κατασκευής για λ=0 και ο αγωγός με τον οποίο θα μπορούσε να συνδεθεί το χωριό Ο είναι αυτός που διέρχεται από την ευθεία ε_0: $x - y + 2 = 0$.

ii. Από την ισότητα $d(O, \varepsilon_0) = (O\Pi)$ προκύπτει ότι η προβολή του σημείου Ο πάνω στην ευθεία ε_0 είναι το σημείο Π, επομένως $O\Pi \perp \varepsilon_0$.



210 Θέμα 4 - 20861

α) Για την εύρεση των εξισώσεων των ευθειών (ε) που διέρχονται από το σημείο $M(-2,2)$ διακρίνονται δύο περιπτώσεις:

1η: Αν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε (ε): $y-2=\lambda\,(x+2)$

2η: Αν δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης, τότε (ε): $x=-2$.

β)

i. Η ευθεία με εξίσωση $x=-2$ είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και ως εκ τούτου δεν σχηματίζει τρίγωνο με τους δύο άξονες.

Αν $\lambda=0$, προκύπτει η οριζόντια ευθεία με εξίσωση $y=2$, η οποία δεν σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες.

Τέλος, για να τέμνει η (ε) τον αρνητικό ημιάξονα Ox' και τον θετικό ημιάξονα Oy, πρέπει να έχει κλίση θετική, δηλαδή $\lambda>0$.

Επομένως, οι ζητούμενες ευθείες έχουν εξίσωση $y-2=\lambda\,(x+2)$, με $\lambda>0$ (1).

ii. Αρχικά υπολογίζουμε ως συνάρτηση του $\lambda \in \mathbb{R}$, τις συντεταγμένες των σημείων τομής της (1) με τους δύο ημιάξονες. Έτσι είναι:

$(1) \overset{x=0}{\Longrightarrow} y=2\lambda+2.$

Επομένως το σημείο τομής των ευθειών με τον θετικό ημιάξονα Oy, είναι το $A(0,2\lambda+2)$.

$(1) \overset{y=0}{\Longrightarrow} \lambda\cdot x=-2\lambda-2 \overset{\lambda>0}{\Longrightarrow} x=\frac{-2\lambda-2}{\lambda}.$

Επομένως το σημείο τομής των ευθειών με τον αρνητικό ημιάξονα Ox', είναι το $B\left(\frac{-2\lambda-2}{\lambda},0\right)$.

Το τρίγωνο που σχηματίζεται είναι το OAB, με εμβαδόν:

$E=(OAB)=\frac{1}{2}\cdot(OA)\cdot(OB)=\frac{1}{2}\left|\frac{-2\lambda-2}{\lambda}\right|\cdot|2\lambda+2|=2\left|\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda}\right|=2\,\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda}$

Αλλά ισχύει:

$$E=8 \Leftrightarrow 2\,\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda}=8 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2=4\lambda \Leftrightarrow \lambda^2-2\lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda=1$$

Επομένως από την (1) προκύπτει ότι η ζητούμενη ευθεία είναι η (ε_1): $y=x+4$.

γ) Για να βρούμε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος, που εκφράζει το ύψος του τριγώνου που φέρεται απο την κορυφή O, αρκεί να βρούμε την απόσταση του σημείου O απο την ευθεία (ε_1): $y=x+4 \Leftrightarrow x-y+4=0$.

Είναι: $d(O,\varepsilon_1)=\frac{|1\cdot 0-1\cdot 0+4|}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}.$

211 Θέμα 4 - 20728

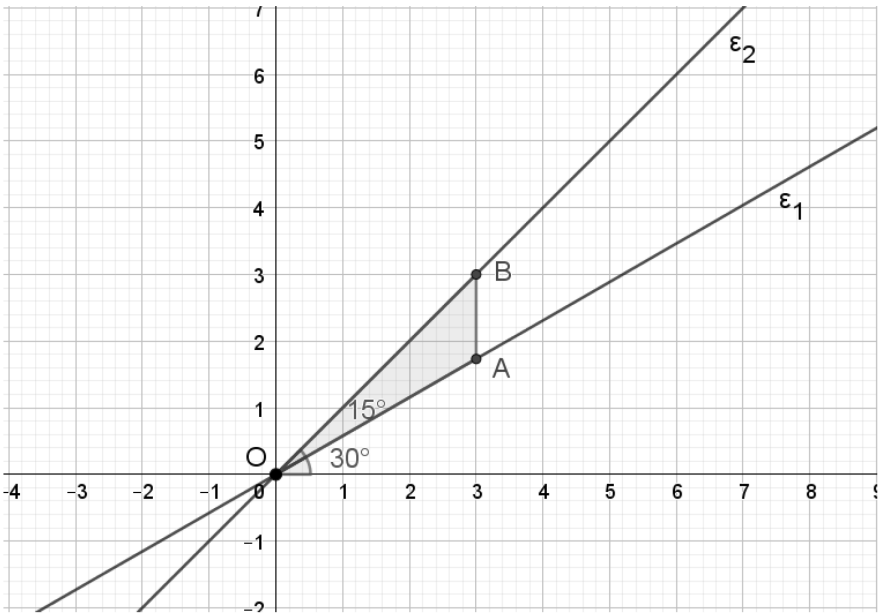
α) Η ε_1 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $A(3,\sqrt{3})$ ενώ η ε_2 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $B(3,3)$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

β) Η ε_1 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{\sqrt{3}}{3}$ οπότε σχηματίζει με τον xx΄ γωνία 30°, ενώ η ε_2 έχει συντελεστή διεύθυνσης 1, οπότε σχηματίζει με τον xx΄ γωνία 45°.

γ) Είναι $\overrightarrow{OA}=(3,\sqrt{3}),\overrightarrow{OB}=(3,3)$ οπότε $(OAB)=\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}3 & \sqrt{3}\\ 3 & 3\end{matrix}\right\|=\frac{9-3\sqrt{3}}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

δ) Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα η οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι η διαφορά των γωνιών που σχηματίζει η κάθε μία από τις $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ με τον xx', δηλαδή $45^\circ-30^\circ=15^\circ$. Γνωρίζουμε από τη γεωμετρία ότι $(OAB)=\frac{1}{2}\cdot(OA)\cdot(OB)\cdot\eta\mu 15^\circ$, οπότε

$$(OAB)=\frac{1}{2}\cdot(OA)\cdot(OB)\cdot\eta\mu 15^\circ \Leftrightarrow$$
$$\frac{9-3\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\cdot\sqrt{3^2+3^2}\cdot\eta\mu 15^\circ \Leftrightarrow$$
$$9-3\sqrt{3}=\sqrt{12}\cdot\sqrt{18}\cdot\eta\mu 15^\circ \Leftrightarrow$$
$$3(3-\sqrt{3})=2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\eta\mu 15^\circ \Leftrightarrow$$
$$\eta\mu 15^\circ=\frac{3-\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$
$$\eta\mu 15^\circ=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$
$$\eta\mu 15^\circ=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$



212 Θέμα 4 - 20724

α) Είναι $d(\mathrm{A},\varepsilon)=\frac{|8+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}$ και $d(\mathrm{B},\varepsilon)=\frac{|-7+4-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}$ οπότε η πόλη B είναι πλησιέστερα στη γραμμή του τραίνου.

β) Το πλησιέστερο σημείο Π της πόλης B στην ευθεία (ε), είναι η προβολή του σημείου B στην ευθεία (ε). Η ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon=-1$, οπότε η κάθετή της ευθεία η θα έχει $\lambda_\eta=1$. Η ευθεία (η) θα έχει εξίσωση

$y-y_{\mathrm{B}}=\lambda_\eta(x-x_{\mathrm{B}})\Leftrightarrow y-4=1\cdot(x+7)\Leftrightarrow y=x+11$.

Οι συντεταγμένες του σημείου Π είναι η λύση του συστήματος $\begin{cases} x+y=1 \\ y=x+11 \end{cases}$.

Με αντικατάσταση της 2ης εξίσωσης στην 1η έχουμε:

$x+x+11=1\Leftrightarrow 2x=-10\Leftrightarrow x=-5$ και στη συνέχεια βρίσκουμε $y=6$. Συνεπώς το σημείο Π έχει συντεταγμένες $\Pi(-5,6)$.

γ)

i. ο σταθμός Σ θα ισαπέχει από τις πόλεις A,B αν και μόνο αν ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος ΑΒ. Η ευθεία ΑΒ έχει $\lambda_{\mathrm{AB}}=\frac{4-1}{-7-8}=\frac{3}{-15}=-\frac{1}{5}$ οπότε η μεσοκάθετος (ζ) του ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης λ_ζ για τον οποίο ισχύει

$\lambda_\zeta\cdot\lambda_{\mathrm{AB}}=-1\Leftrightarrow\lambda_\zeta\cdot(-\frac{1}{5})=-1\Leftrightarrow\lambda_\zeta=5$.

Το μέσο Ε του τμήματος ΑΒ έχει συντεταγμένες $\mathrm{E}(\frac{-7+8}{2},\frac{4+1}{2})$, δηλαδή $\mathrm{E}(\frac{1}{2},\frac{5}{2})$.

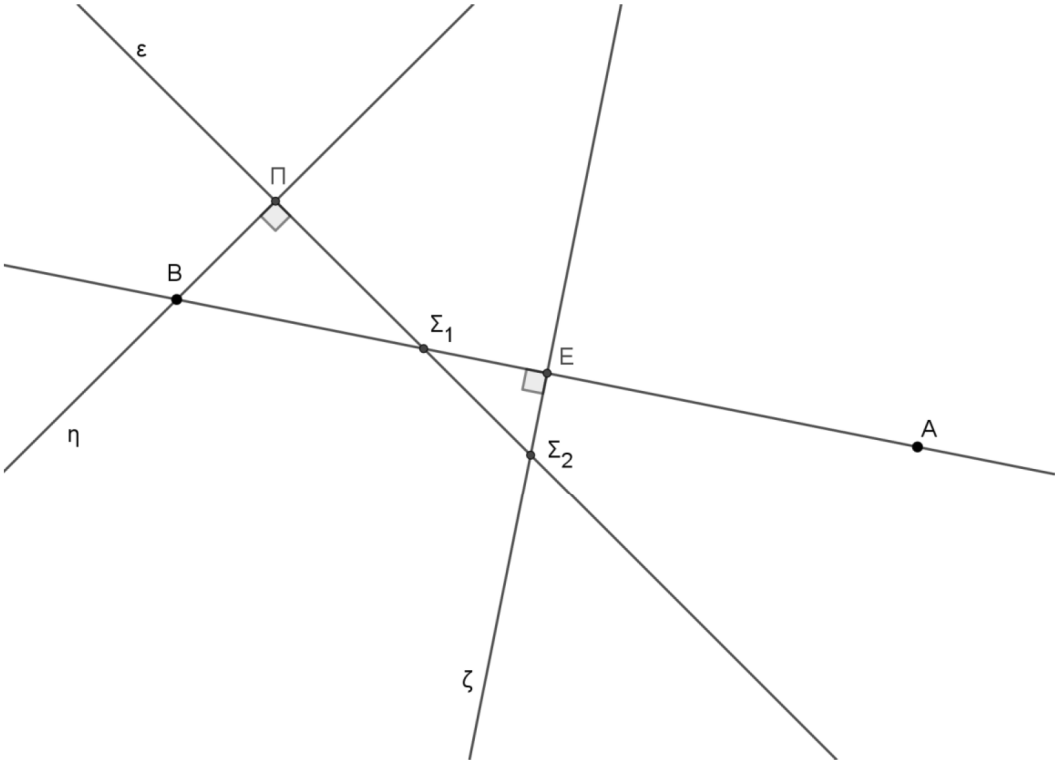
Η ευθεία (ζ) θα έχει εξίσωση $y-y_{\mathrm{E}}=\lambda_\zeta(x-x_{\mathrm{E}})\Leftrightarrow y-\frac{5}{2}=5\cdot(x-\frac{1}{2})\Leftrightarrow y=5x$.

Οι συντεταγμένες του σημείου Σ είναι η λύση του συστήματος $\begin{cases} x+y=1 \\ y=5x \end{cases}$. Με αντικατάσταση της 2ης εξίσωσης στην 1η έχουμε $x+5x=1\Leftrightarrow 6x=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{6}$ και κατόπιν $y=\frac{5}{6}$. Συνεπώς το σημείο Σ έχει συντεταγμένες $\Sigma(\frac{1}{6},\frac{5}{6})$ (το Σ_2 στο σχήμα).

ii. Το οδικό δίκτυο που θα συνδέει το σταθμό Σ με τις πόλεις A, B θα έχει το μικρότερο δυνατό μήκος αν και μόνο αν το Σ ανήκει στην ευθεία ΑΒ. Η ευθεία ΑΒ έχει $\lambda_{\mathrm{AB}} = \frac{4-1}{-7-8} = \frac{3}{-15} = -\frac{1}{5}$ και εξίσωση

$$y - y_{\mathrm{A}} = \lambda_{\mathrm{AB}}(x - x_{\mathrm{A}}) \Leftrightarrow y - 1 = -\frac{1}{5}\cdot(x-8) \Leftrightarrow 5y - 5 = -x + 8 \Leftrightarrow 5y + x = 13 .$$

Οι συντεταγμένες του σημείου Σ είναι η λύση του συστήματος $\begin{cases} x + y = 1 \\ 5y + x = 13 \end{cases}$. Με αντικατάσταση της 2ης εξίσωσης στην 1η έχουμε $13 - 5y + y = 1 \Leftrightarrow -4y = -12 \Leftrightarrow y = 3$ και στη συνέχεια $x = -2$. Συνεπώς το σημείο Σ έχει συντεταγμένες $\Sigma(-2,3)$ (το Σ_1 στο σχήμα).



213 Θέμα 4 - 20655

α)

i. Για να αποδείξουμε ότι τα σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά αρκεί να δείξουμε ότι $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \not\parallel \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$.

Είναι

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}}) = (3-2, -1-1) = (1, -2)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = (x_{\Gamma} - x_{\mathrm{A}}, y_{\Gamma} - y_{\mathrm{A}}) = (-2-2, 0-1) = (-4, -1)$$

και

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -4 & -1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)-(-2)\cdot(-4)=-1-8=-9$$

Επειδή $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\neq 0$ είναι $\overrightarrow{AB}\not\parallel\overrightarrow{A\Gamma}$ και έπεται το ζητούμενο.

ii. Είναι $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|=\frac{1}{2}\cdot|-9|=\frac{9}{2}$ τ.μ.

β) Το εμβαδό του τριγώνου $\Delta A\Gamma$ ισούται με

$$(\Delta A\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{A\Gamma},\overrightarrow{A\Delta}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-4 & -1\\ x-2 & y-1\end{vmatrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|-4(y-1)-(-1)(x-2)\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|-4y+4+x-2\right|=\frac{1}{2}\left|x-4y+2\right|$$

Επομένως, το $\Delta(x,y)$ είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου, αν και μόνο αν ισχύει

$$(\Delta A\Gamma)=(AB\Gamma)\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left|x-4y+2\right|=\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left|x-4y+2\right|=9$$

$$\Leftrightarrow x-4y+2=9 \text{ ή } x-4y+2=-9$$

$$\Leftrightarrow x-4y-7=0 \text{ ή } x-4y+11=0$$

Άρα, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος αποτελείται από τις ευθείες $x-4y-7=0$ και $x-4y+11=0$.

γ) Είναι $\varepsilon_1: x-4y-7=0$ και $\varepsilon_2: x-4y+11=0$.

i. Είναι $\lambda_{A\Gamma}=\frac{y_\Gamma-y_A}{x_\Gamma-x_A}=\frac{0-1}{-2-2}=\frac{1}{4}$ και $\lambda_{\varepsilon_1}=\lambda_{\varepsilon_2}=-\frac{1}{(-4)}=\frac{1}{4}$. Επειδή οι ευθείες ε_1, ε_2 και $A\Gamma$ έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης είναι μεταξύ τους παράλληλες.

ii. **<u>α τρόπος</u>**

Είναι

$$d(\Gamma,\varepsilon_1)=\frac{\left|x_\Gamma-4y_\Gamma-7\right|}{\sqrt{1^2+(-4)^2}}=\frac{\left|-2-4\cdot 0-7\right|}{\sqrt{1+16}}=\frac{9}{\sqrt{17}}=\frac{9\sqrt{17}}{17}$$ μονάδες μήκους,

$$d(\Gamma,\varepsilon_2)=\frac{\left|x_\Gamma-4y_\Gamma+11\right|}{\sqrt{1^2+(-4)^2}}=\frac{\left|-2-4\cdot 0+11\right|}{\sqrt{1+16}}=\frac{9}{\sqrt{17}}=\frac{9\sqrt{17}}{17}$$ μονάδες μήκους

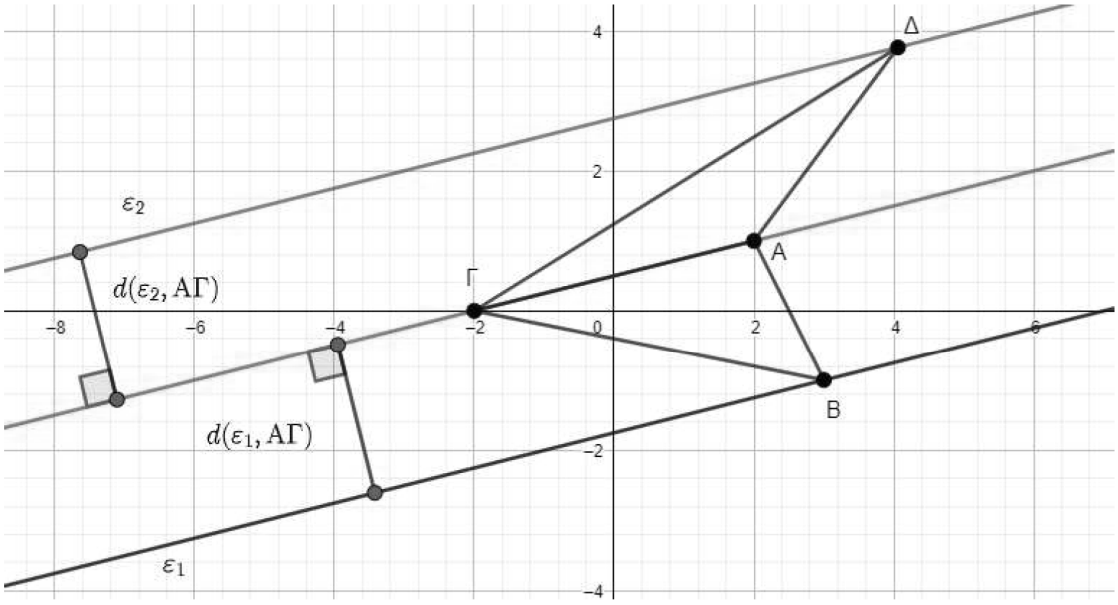
και επειδή οι ευθείες ε_1, ε_2 και $A\Gamma$ είναι μεταξύ τους παράλληλες συμπεραίνουμε ότι ο ισχυρισμός « οι ευθείες $x-4y-16=0$ και $x-4y+20=0$ έχουν ως μεσοπαράλληλο την ευθεία $A\Gamma$ » είναι αληθής.

β τρόπος

Από το ερώτημα (β) γνωρίζουμε ότι ισχύει $(\Delta\text{ΑΓ})=(\text{ΑΒΓ})$ μόνο όταν το Δ ανήκει στην ευθεία ε_1 ή στην ευθεία ε_2. Αν επιλέξουμε το Δ να ανήκει στην ευθεία ε_1, τότε έχουμε:

$$(\Delta\text{ΑΓ})=(\text{ΑΒΓ})\Leftrightarrow\frac{1}{2}\text{ΑΓ}\cdot d(\Delta,\text{ΑΓ})=\frac{1}{2}\text{ΑΓ}\cdot d(\text{Β},\text{ΑΓ})$$
$$\Leftrightarrow d(\Delta,\text{ΑΓ})=d(\text{Β},\text{ΑΓ})$$
$$\Leftrightarrow d(\varepsilon_1,\text{ΑΓ})=d(\varepsilon_2,\text{ΑΓ})$$

Οπότε, ο ισχυρισμός « οι ευθείες $x-4y-16=0$ και $x-4y+20=0$ έχουν ως μεσοπαράλληλο την ευθεία ΑΓ » είναι αληθής.



214 Θέμα 4 - 18732

α)

i. Οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{\text{ΑΓ}}$ δίνονται από την σχέση $\overrightarrow{\text{ΑΓ}}=(x_\Gamma-x_\text{Α},y_\Gamma-y_\text{Α})$, οπότε αντικαθιστώντας παίρνουμε $\overrightarrow{\text{ΑΓ}}=\left(-1,-\frac{4}{3}\right)$. Όμοια παίρνουμε $\overrightarrow{\text{ΑΟ}}=(-3,-4)$, δηλαδή έχουμε $\overrightarrow{\text{ΑΓ}}=\left(-1,-\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{3}(-3,-4)=\frac{1}{3}\overrightarrow{\text{ΑΟ}}$.

Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι $\overrightarrow{\text{ΑΔ}}=\left(\frac{4}{3},-1\right)$ και $\overrightarrow{\text{ΑΒ}}=(4,-3)$, δηλαδή έχουμε $\overrightarrow{\text{ΑΔ}}=\left(\frac{4}{3},-1\right)=\frac{1}{3}(4,-3)=\frac{1}{3}\overrightarrow{\text{ΑΒ}}$.

ii. Είναι $\lambda_{\Gamma\Delta}=\dfrac{3-\frac{8}{3}}{\frac{13}{3}-2}=\frac{1}{7}$ και $\lambda_{\text{ΟΒ}}=\frac{1-0}{7-0}=\frac{1}{7}$, επομένως $\Gamma\Delta//\text{ΟΒ}$.

iii. Είναι $(\mathrm{A\Gamma\Delta})=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}},\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}\right)\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}-1 & -\frac{4}{3}\\ \frac{4}{3} & -1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|1+\frac{16}{9}\right|=\frac{25}{18}$ τ.μ.

Ακόμα $(\mathrm{ABO})=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AO}},\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}4 & -3\\ -3 & -4\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|-16-9\right|=\frac{25}{2}$ τ.μ. Επομένως έχουμε

$$(\mathrm{A\Gamma\Delta})=\frac{25}{18}=\frac{1}{9}\cdot\frac{25}{2}=\frac{1}{9}\cdot(\mathrm{ABO})\Leftrightarrow$$

$$(\mathrm{A\Gamma\Delta})=\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot(\mathrm{ABO})$$

β) Έχουμε

$$\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\frac{1}{\nu}\overrightarrow{\mathrm{AO}}\Rightarrow\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\frac{1}{\nu}\left(x_{\mathrm{O}}-x_{\mathrm{A}},y_{\mathrm{O}}-y_{\mathrm{A}}\right)\Rightarrow\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\frac{1}{\nu}(0-3,0-4)\Rightarrow\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\left(-\frac{3}{\nu},-\frac{4}{\nu}\right).$$

Όμοια,

$$\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=\frac{1}{\nu}\overrightarrow{\mathrm{A}B}\Rightarrow\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=\frac{1}{\nu}\left(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}},y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}}\right)\Rightarrow\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=\frac{1}{\nu}(7-3,1-4)\Rightarrow\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=\left(\frac{4}{\nu},-\frac{3}{\nu}\right).$$

Επομένως $(\mathrm{A\Gamma\Delta})=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}},\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}\right)\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}-\frac{3}{\nu} & -\frac{4}{\nu}\\ \frac{4}{\nu} & -\frac{3}{\nu}\end{matrix}\right\|=\frac{25}{2\nu^2}$ τ.μ.

Από το α)iii. έχουμε $(\mathrm{ABO})=\frac{25}{2}$ τ.μ., οπότε τελικά,

$$(\mathrm{A\Gamma\Delta})=\frac{25}{2\nu^2}=\frac{1}{\nu^2}\cdot\frac{25}{2}=\left(\frac{1}{\nu}\right)^2\cdot(\mathrm{ABO}).$$

215 Θέμα 4 - 15692

α) i. Είναι:

$$x^2+y^2+y=x+2xy+6\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy-x+y-6=0\Leftrightarrow(x-y)^2-(x-y)-6=0$$

που είναι το ζητούμενο.

ii. Αν θέσουμε $x-y=u$ τότε η τελευταία εξίσωση γράφεται $u^2-u-6=0$ και έχει ρίζες τους αριθμούς $-2, 3$ οπότε έχουμε:

- $u=-2: x-y=-2\Leftrightarrow x-y+2=0$
- $u=3: x-y=3\Leftrightarrow x-y-3=0$

Επομένως η εξίσωση παριστάνει το ζεύγος των ευθειών

$$\varepsilon_1: x-y-3=0 \text{ και } \varepsilon_2: x-y+2=0$$

που έχουν το ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, $\lambda_1=\lambda_2=1$ και είναι παράλληλες μεταξύ τους.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $d(M,\varepsilon_1)=d(M,\varepsilon_2)$.

Είναι:

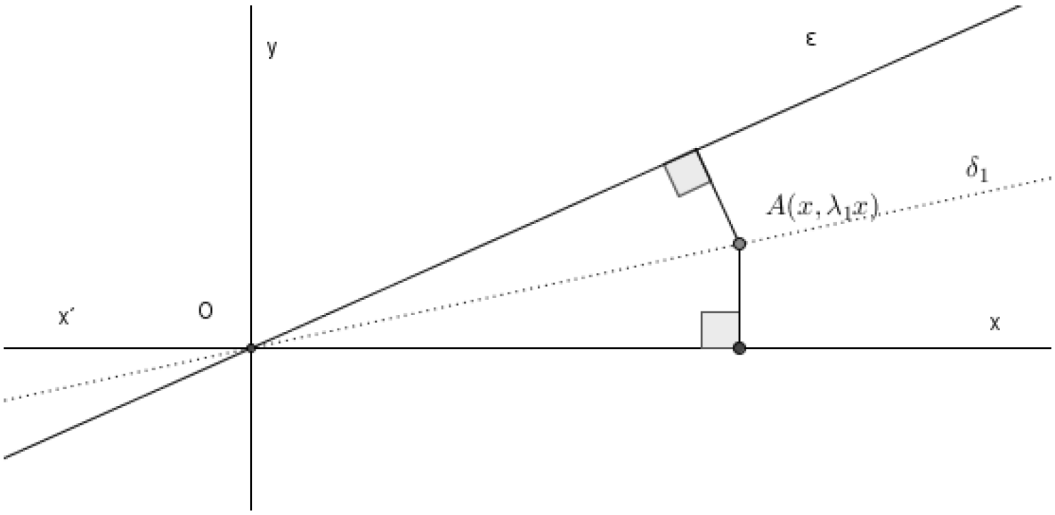
$$d(M,\varepsilon_1)=\frac{\left|\alpha-\alpha+\frac{1}{2}-3\right|}{\sqrt{1+1}}=\frac{5}{2\sqrt{2}} \text{ και } d(M,\varepsilon_2)=\frac{\left|\alpha-\alpha+\frac{1}{2}+2\right|}{\sqrt{1+1}}=\frac{5}{2\sqrt{2}}$$

οπότε $d(M,\varepsilon_1)=d(M,\varepsilon_2)$.

γ) Το σημείο Μ ισαπέχει από τις ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ οπότε βρίσκεται πάνω στην μεσοπαράλληλη τους. Επιπλέον καθεμιά από τις $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=1$, οπότε η μεσοπαράλληλη διέρχεται από το Μ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=1$. Άρα η εξίσωση της είναι:

$$y-\alpha+\frac{1}{2}=1(x-\alpha)\Leftrightarrow y=x-\frac{1}{2}$$

216 Θέμα 4 - 22067



α) Εξ ορισμού της διχοτόμου γωνίας, η διχοτόμος διέρχεται από το σημείο τομής των δύο πλευρών της γωνίας. Εδώ, οι δύο πλευρές έχουν εξισώσεις: $y=0$ και $y=\lambda x$ οι οποίες έχουν μοναδική κοινή λύση το $(x,y)=(0,0)$, αφού $\lambda\neq 0$. Επίσης, όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα, η διχοτόμος δ_1 έχει κλίση θετική και μικρότερη από την κλίση της ευθείας ε. Συνεπώς, η διχοτόμος δ_1 είναι μη κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και άρα έχει εξίσωση της μορφής:

$$y=\lambda_1 x \quad \text{με } 0<\lambda_1<\lambda.$$

Ένα τυχαίο σημείο της διχοτόμου δ_1 έχει συντεταγμένες $(x,\lambda_1 x)$, όπου $x\in\mathbb{R}$. Επιλέγω το σημείο $A(1,\lambda_1)$, που αντιστοιχεί στο $x=1$. Επίσης, οι εξισώσεις των πλευρών της γωνίας είναι:

$x'x$ άξονας: $0\cdot x+1\cdot y+0=0$.

ευθεία ε : $\lambda\cdot x-1\cdot y+0=0$.

Όμως στο σημείο Α,, ως σημείο της διχοτόμου, όσο απέχει από τον x΄x άξονα απέχει και από την ευθεία ε, δηλαδή:

$d(A,\ x'x\ \text{άξονας}) = d(A,\ \varepsilon) \Leftrightarrow$

$$\frac{|0\cdot 1+1\cdot\lambda_1+0|}{\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{|\lambda\cdot 1-1\cdot\lambda_1+0|}{\sqrt{\lambda^2+(-1)^2}} \overset{\lambda_1>0,\lambda>\lambda_1}{\Longleftrightarrow}$$

$$\lambda_1 = \frac{\lambda-\lambda_1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \Leftrightarrow$$

$$\left(1+\sqrt{1+\lambda^2}\right)\lambda_1 = \lambda$$

Άρα, $\lambda_1 = \frac{\lambda}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}$.

β) Η διχοτόμος δ_2 (που βρίσκεται στο 2° και 4° τεταρτημόριο) είναι και αυτή ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, οπότε έχει εξίσωση της μορφής $y = \lambda_2 x$, και είναι κάθετη στη διχοτόμο δ_1, επομένως το γινόμενο των αντίστοιχων κλίσεων είναι ίσο με -1, δηλαδή $\lambda_1\cdot\lambda_2 = -1$, οπότε, από το α ερώτημα, έχουμε διαδοχικά:

$$\lambda_2 = \frac{-1}{\lambda_1} = \frac{-1}{\frac{\lambda}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}} = \frac{1+\sqrt{1+\lambda^2}}{-\lambda} = \frac{\left(1+\sqrt{1+\lambda^2}\right)\cdot\left(1-\sqrt{1+\lambda^2}\right)}{(-\lambda)\cdot\left(1-\sqrt{1+\lambda^2}\right)} =$$

$$= \frac{1-(1+\lambda^2)}{(-\lambda)\cdot\left(1-\sqrt{1+\lambda^2}\right)} = \frac{-\lambda^2}{(-\lambda)\cdot\left(1-\sqrt{1+\lambda^2}\right)} = \frac{\lambda}{1-\sqrt{1+\lambda^2}}$$

Άρα, $\lambda_2 = \frac{\lambda}{1-\sqrt{1+\lambda^2}}$.

γ) Έστω $\lambda = 1$. Τότε η ευθεία $\varepsilon: y = x$ σχηματίζει γωνία 45° με τον θετικό ημιάξονα Ox, και επομένως, η διχοτόμος δ_1 σχηματίζει γωνία 22,5° με τον θετικό ημιάξονα Ox. Άρα, από τον ορισμό της κλίσης και το α) ερώτημα, έχουμε διαδοχικά:

$$\varepsilon\varphi 22{,}5^o = \lambda_1 = \frac{\lambda}{1+\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{1}{1+\sqrt{1+1^2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})\cdot(1-\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = \sqrt{2}-1\ .$$

217 Θέμα 4 - 21696

α. Είναι:

$$(1) \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+4y+4=5 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=5$$

Επομένως η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(1,-2)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$.

β. Υπολογίσουμε την απόσταση του κέντρου Κ του κύκλου από την ευθεία (ε). Είναι:

$$d(K,\varepsilon) = \frac{|1+4+3|}{\sqrt{1+4}} = \frac{8}{\sqrt{5}} > \sqrt{5}$$

οπότε η ευθεία δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο.

γ. Η ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = \frac{1}{2}$, οπότε οι ζητούμενες εφαπτόμενες που είναι κάθετες σ' αυτήν έχουν συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -2$, είναι δηλαδή της μορφής $y = -2x + \beta$. Η εξίσωση αυτή γράφεται $2x + y - \beta = 0$ και η ευθεία που παριστάνει απέχει από το κέντρο του κύκλου απόσταση ίση με την ακτίνα του.

Έτσι, έχουμε:

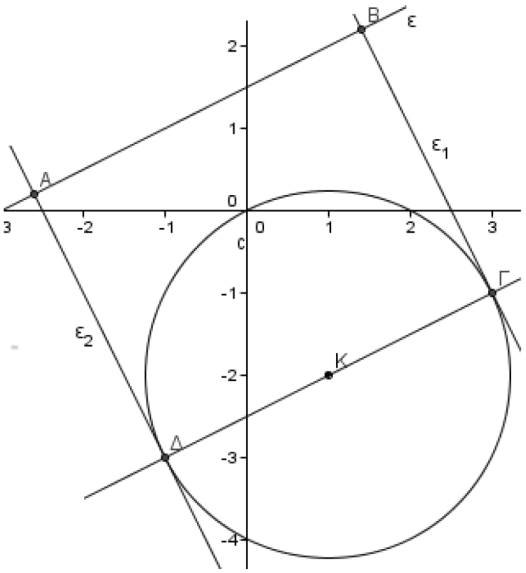
$$\frac{|2\cdot 1 - 2 - \beta|}{\sqrt{1+4}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |\beta| = 5 \Leftrightarrow \beta = \pm 5$$

Επομένως οι ζητούμενες εφαπτόμενες είναι οι

$$\varepsilon_1 : y = -2x + 5 \text{ και } \varepsilon_2 : y = -2x - 5$$

δ. Ένα σημείο πάνω στην ευθεία ε_1 είναι το $M(0, 5)$ και ισχύει:

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d(M, \varepsilon_2) = \frac{|0+5+5|}{\sqrt{1+4}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} = 2\rho$$



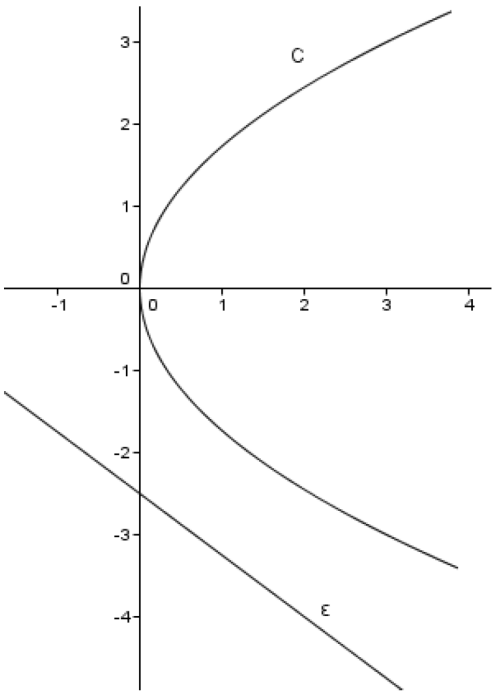
Γεωμετρικά, αν από το κέντρο Κ του κύκλου φέρουμε τις ακτίνες ΚΓ και ΚΔ τότε αυτές είναι παράλληλες στην ευθεία ε . Αλλά από το Κ διέρχεται μια μόνο παράλληλη στην ε, οπότε τα σημεία Γ, Κ, Δ είναι συνευθειακά και συνεπώς τα Γ, Δ είναι αντιδιαμετρικά οπότε $(\Gamma\Delta) = 2\rho$.

218 Θέμα 4 - 21690

α) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της παραβολής με την ευθεία, αν υπάρχουν, προσδιορίζονται από τη λύση του αντίστοιχου συστήματος. Είναι:

$$\begin{cases} y^2 = 3x \\ 3x + 4y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{10+4y}{3} \\ y^2 = -10 - 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{10+4y}{3} \\ y^2 + 4y + 10 = 0 \end{cases}$$

Η εξίσωση $y^2+4y+10=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=-24<0$, οπότε είναι αδύνατη. Άρα η παραβολή και η ευθεία δεν έχουν κοινά σημεία. Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται η συγκεκριμένη κατάσταση.



β) Αν $M(x_o, y_o)$ είναι ένα σημείο της παραβολής $C: y^2=3x$, τότε ισχύει $y_o^2=3x_o$, οπότε $M\left(\frac{y_o^2}{3}, y_o\right)$. Η απόσταση του Μ από την ευθεία (ε) είναι:

$$d(M,\varepsilon)=\frac{\left|3\frac{y_o^2}{3}+4y_o+10\right|}{\sqrt{9+16}}$$

$$=\frac{|y_o^2+4y_o+10|}{5}=\frac{(y_o+2)^2+6}{5}$$

που είναι το ζητούμενο.

γ) Είναι φανερό ότι $d(M,\varepsilon)\geq\frac{6}{5}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $y_o=-2$. Έτσι, το πλησιέστερο στην ευθεία σημείο της παραβολής έχει τεταγμένη $y_o=-2$, οπότε

$$3x_o=y_o^2 \Leftrightarrow 3x_o=4 \Leftrightarrow x_o=\frac{4}{3}$$

Επομένως, το πλησιέστερο στην ευθεία σημείο της παραβολής είναι το $M\left(\frac{4}{3},-2\right)$.

δ) Η παραβολή έχει παράμετρο $p=\frac{3}{2}$, οπότε η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο Μ έχει εξίσωση

$$-2y=\frac{3}{2}\left(x+\frac{4}{3}\right) \Leftrightarrow -2y=\frac{3}{2}x+2 \Leftrightarrow y=-\frac{3}{4}x-1$$

Ο συντελεστής της εφαπτομένης είναι $\lambda=-\frac{3}{4}$ και της δοσμένης εξίσωσης (ε) είναι $\lambda_\varepsilon=-\frac{3}{4}$, οπότε η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην (ε).

219 Θέμα 2 - 18968

α) Η εξίσωση (1) γράφεται:

$$x^2+y^2-6x-8y=0 \Leftrightarrow \left(x^2-6x\right)+\left(y^2-8y\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2-2\cdot 3\cdot x+3^2\right)+\left(y^2-2\cdot 4\cdot y+4^2\right)=3^2+4^2$$
$$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-4)^2=25.$$

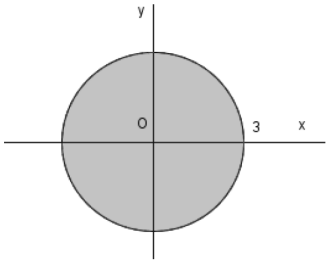
Άρα ο κύκλος έχει κέντρο $K(3,4)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{25}=5$.

β) Έχουμε $d(K,\varepsilon)=\dfrac{|3x_K+4y_K|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|3\cdot 3+4\cdot 4|}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{|9+16|}{\sqrt{25}}=\dfrac{|25|}{5}=\dfrac{25}{5}=5$ μονάδες μήκους.

γ) Από τα προηγούμενα ερωτήματα παρατηρούμε ότι η απόσταση $d(K,\varepsilon)$ ισούται με την ακτίνα ρ του κύκλου C, οπότε ο ισχυρισμός «Ο κύκλος C και η ευθεία ε εφάπτονται» είναι αληθής.

220 Θέμα 2 - 22056

α) Η συνθήκη $x^2+y^2\le 9$ είναι ισοδύναμη με: $\sqrt{x^2+y^2}\le 3$, οπότε το σύνολο Ω αποτελείται από όλα τα σημεία του επιπέδου που απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση μικρότερη ή ίση του 3. Δηλαδή, πρόκειται για τον κυκλικό δίσκο (συμπεριλαμβανομένης της περιφέρειας) που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 3.



β) Όχι, καθώς: (i) $|\overrightarrow{OA}|=4$, (ii) το μέτρο $|\overrightarrow{OA}|$ δηλώνει την απόσταση του σημείου Α από την αρχή των αξόνων Ο και (iii) όλες αυτές οι αποστάσεις για τα σημεία του συνόλου Ω είναι μικρότερες ή ίσες του 3, όπως εξηγήσαμε στην απάντηση του α) ερωτήματος.

221 Θέμα 2 - 18749

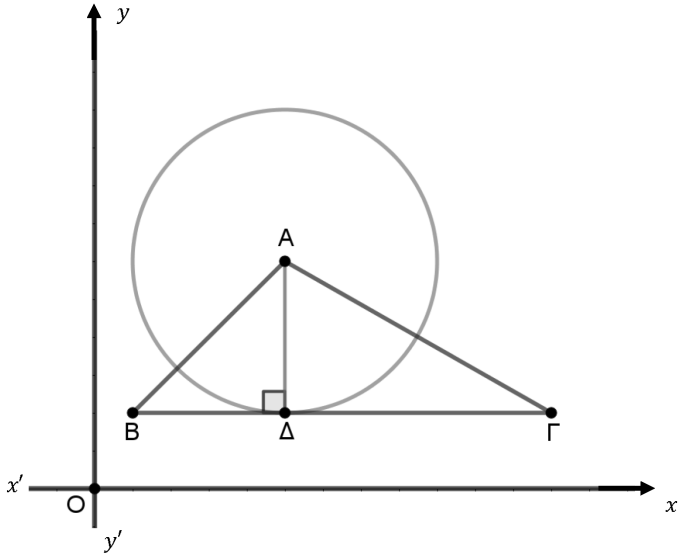
α) Παρατηρούμε ότι τα σημεία Β και Γ έχουν την ίδια τεταγμένη 2, άρα κάθε σημείο της ευθείας $B\Gamma$ έχει τεταγμένη 2 και επομένως η ευθεία ΒΓ είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, άρα $B\Gamma: y=2$.

Η ευθεία ΑΔ είναι κάθετη στην ΒΓ, άρα παράλληλη προς τον άξονα $y'y$ και καθώς το σημείο Α έχει τετμημένη 5, θα είναι $A\Delta: x=5$.

β) Αφού το σημείο Δ είναι η τομή των ευθειών με εξισώσεις $A\Delta: x=5$ και $B\Gamma: y=2$, άρα θα είναι $\Delta(5,2)$.

γ) Η ακτίνα του κύκλου θα είναι το μήκος $ΑΔ = y_A - y_Δ = 6 - 2 = 4$.

Άρα ο κύκλος έχει εξίσωση $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 16$.



222 Θέμα 4 - 18781

α) i. Στην εξίσωση $C_1: x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ προσθέτουμε και αφαιρούμε το 9 έτσι ώστε να προκύψει το ανάλογο ανάπτυγμα τετραγώνου για το x,

$x^2 + y^2 - 6x + 9 - 9 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x + 9 = 4 \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 4.$

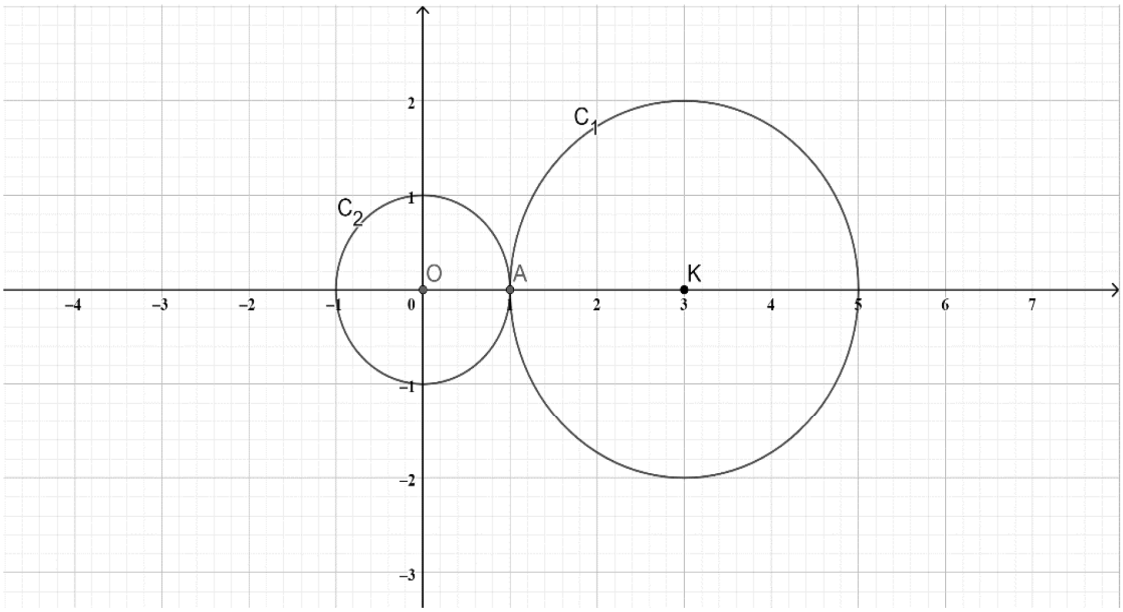
ii. Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K(3,0)$ και ακτίνα $\rho_1 = 2$.

Ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho_2 = 1$.

Επειδή, η διάκεντρος (ΚΟ)=3=$\rho_1 + \rho_2$ τότε οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

Εναλλακτική λύση:

Τη σχετική θέση των δύο κύκλων μπορούμε να τη βρούμε σχεδιάζοντας τους δύο κύκλους C_1 και C_2 στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Παρατηρούμε πως, οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α(1,0).



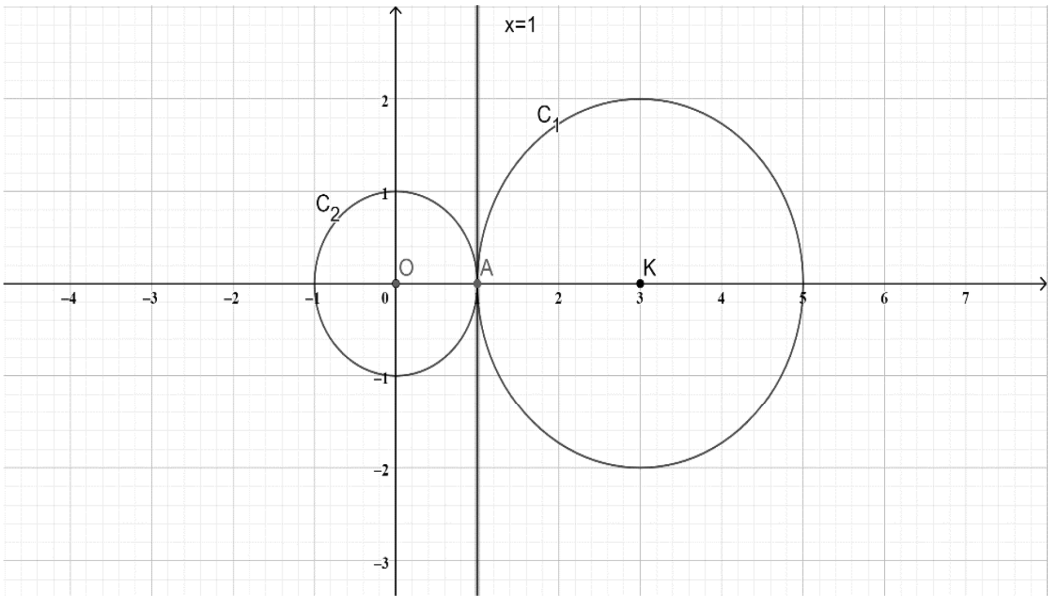
β) i. Για να βρούμε το σημείο επαφής αρκεί να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων των δύο κύκλων.

$$\begin{cases} x^2+y^2-6x+5=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-6x+5=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}.$$

Άρα, το σημείο επαφής των δύο κύκλων είναι το $A(1,0)$.

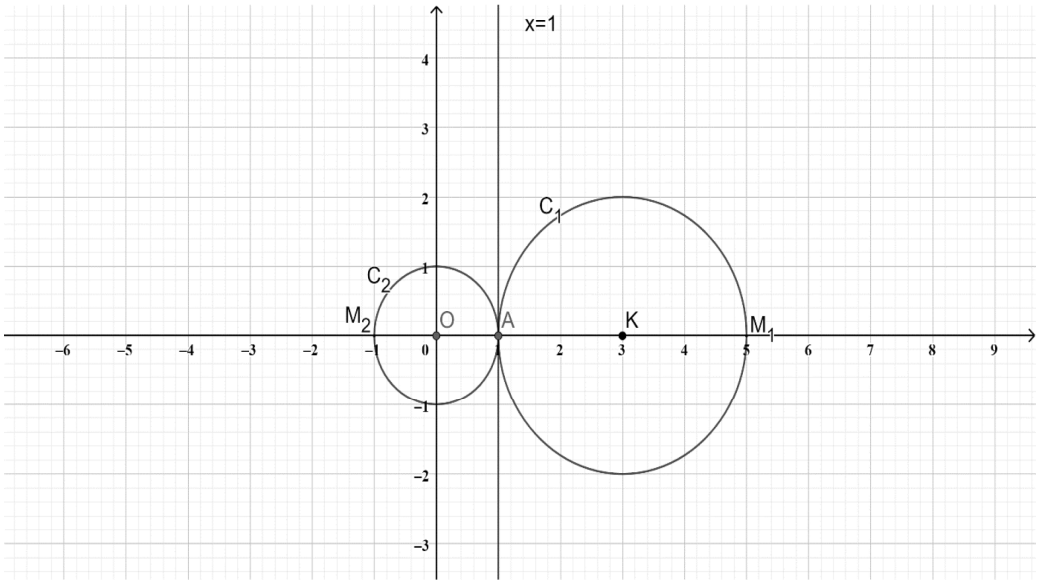
Εναλλακτικά, το σημείο επαφής Α προκύπτει και από το σχήμα στο ερώτημα α). Παρατηρούμε πως οι δύο κύκλοι εφάπτονται πάνω στον άξονα $x'x$, στο σημείο (1,0).

ii. Η εσωτερική κοινή εφαπτομένη είναι η εφαπτομένη των δύο κύκλων στο σημείο επαφής $A(1,0)$. Αφού θα είναι εφαπτομένη του κύκλου C_2 θα έχει τη μορφή $x_1 \cdot x + y_1 \cdot y = \rho^2$. Επομένως, η εσωτερική κοινή εφαπτομένη είναι κάθετη στη διάκεντρο και με εξίσωση $x = 1$, όπως φαίνεται στο σχήμα.



γ) Η μεγαλύτερη χορδή ενός κύκλου είναι η διάμετρός του. Άρα, καθώς τα M_1, M_2 διατρέχουν τους κύκλους C_1, C_2 αντίστοιχα, η μεγαλύτερη απόσταση τους είναι ίση με το άθροισμα των δύο διαμέτρων, δηλαδή,

$$(M_1M_2) = (M_1A) + (AM_2) = 2\rho_1 + 2\rho_2 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 6.$$



223 Θέμα 4 - 20651

α) Έστω $M(0, y)$ ένα τέτοιο σημείο. Ισχύει:

$$\overrightarrow{MA}=(1, 1-y), \overrightarrow{MB}=(2, 4-y)$$

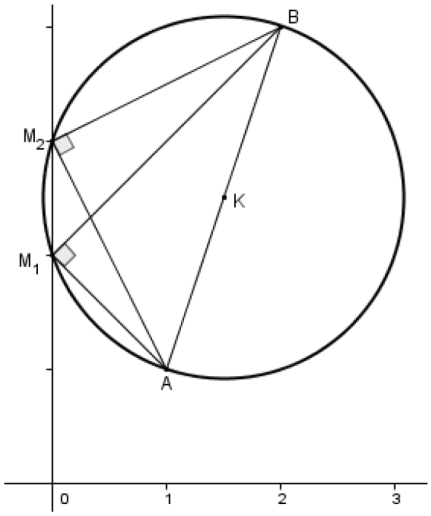
και το τρίγωνο ΜΑΒ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα ΑΒ μόνο όταν ισχύει:

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow (1, 1-y)\cdot(2, 4-y)=0 \Leftrightarrow 2+4-4y-y+y^2=0$$

$$\Leftrightarrow y^2-5y+6=0 \Leftrightarrow y=2 \text{ ή } y=3$$

Επομένως υπάρχουν δυο τέτοια σημεία, τα $M_1(0, 2)$ και $M_2(0, 3)$.

β) Ο κύκλος με διάμετρο ΑΒ έχει κέντρο το μέσο Κ του τμήματος ΑΒ δηλαδή το σημείο $K\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ και η ακτίνα του ρ είναι



$$\rho=\frac{1}{2}(AB)=\frac{1}{2}\sqrt{(2-1)^2+(4-1)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{10}.$$

Άρα η εξίσωση του είναι:

$$C:\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

γ) Θα αποδείξουμε, πρώτα αλγεβρικά, ότι ο κύκλος διέρχεται από τα σημεία $M_1(0, 2)$ και $M_2(0, 3)$.

- Με $x=0$ και $y=2$ στην εξίσωση του κύκλου C έχουμε:

$$\left(0-\frac{3}{2}\right)^2+\left(2-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{9}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$$

  οπότε το $M_1(0, 2)$ είναι πάνω στον κύκλο C.

- Με $x=0$ και $y=3$ στην εξίσωση του κύκλου C έχουμε:

$$\left(0-\frac{3}{2}\right)^2+\left(3-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{9}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$$

  οπότε το $M_2(0, 3)$ είναι πάνω στον κύκλο C.

Γεωμετρικά, οι γωνίες $A\hat{M}_1B$ και $A\hat{M}_2B$ βλέπουν το τμήμα ΑΒ με ορθή γωνία, οπότε σύμφωνα με γνωστό θεώρημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας βρίσκονται πάνω στον κύκλο με διάμετρο ΑΒ.

224 Θέμα 4 - 18467

α) Η δοθείσα γράφεται:

$$x^2-2x+1+(y+2)^2=2x+6 \Leftrightarrow$$
$$\left(x^2-4x+1+3\right)+(y+2)^2=3+6 \Leftrightarrow$$
$$(x-2)^2+(y+2)^2=9$$

Άρα η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(2,-2)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{9}=3$.

β) Για να δείξουμε ότι η αρχή Ο των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου αρκεί να δείξουμε ότι η αρχή των αξόνων Ο απέχει από το κέντρο Κ απόσταση μικρότερη από την ακτίνα.

Πράγματι, είναι:

$$(KO)=\sqrt{(0-2)^2+(0+2)^2}=\sqrt{8}<\sqrt{9}=3=\rho$$ και έπεται το ζητούμενο.

γ) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΚΟ είναι:

$$\lambda_{KO}=\frac{y_O-y_K}{x_O-x_K}=\frac{0-(-2)}{0-2}=\frac{2}{-2}=-1.$$

Το τμήμα ΚΟ (απόστημα) είναι κάθετο στην (ε) έτσι, έχουμε:

$$(\varepsilon)\perp KO\Rightarrow \lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{KO}=-1\Rightarrow \lambda_\varepsilon\cdot(-1)=-1\Rightarrow \lambda_\varepsilon=1.$$

Η ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon=1$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων άρα έχει εξίσωση:

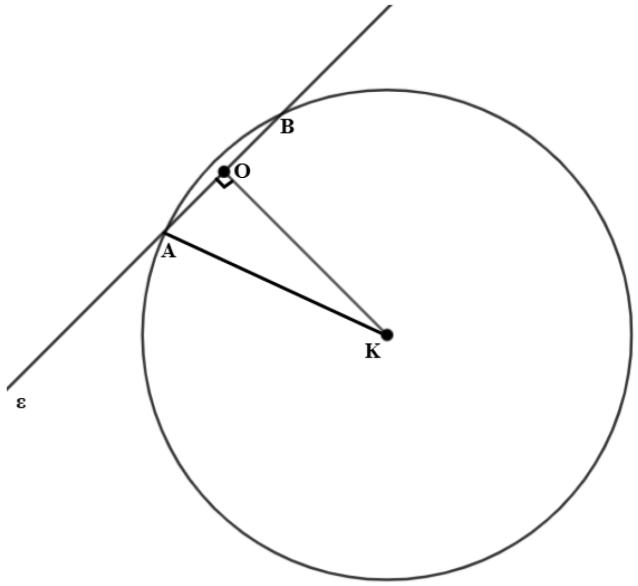
$$y=\lambda_\varepsilon x\Leftrightarrow y=x.$$

δ) Είναι $(KAB)=\frac{1}{2}(KO)(AB)=\frac{1}{2}\sqrt{8}(AB)=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}(AB)=(AB)\sqrt{2}$.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΑΚ έχουμε:

$$(OA)^2=(KA)^2-(KO)^2\Leftrightarrow (OA)^2=3^2-\left(\sqrt{8}\right)^2\Leftrightarrow (OA)^2=9-8=1\Leftrightarrow (OA)=1.$$

Άρα $(AB)=2(OA)=2\cdot 1=2$ οπότε $(KAB)=2\sqrt{2}$ τετραγωνικές μονάδες.



225 Θέμα 2 - 33696

α) Έστω $K(x_K, y_K)$ το κέντρο του κύκλου.

Αφού το Κ είναι σημείο της ευθείας ε: y= 2x – 1 , ισχύει $y_K = 2x_K - 1$. Άρα Κ$(x_K, 2x_K - 1)$.

Ο κύκλος c εφάπτεται της ευθείας ζ: x + y – 2 = 0 άρα ισχύει $d(K, \zeta) = \rho$.

Έχουμε:

$$d(K,\zeta) = \rho \Leftrightarrow \frac{|x_K + 2x_K - 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow |3x_K - 3| = 6$$

$$\Leftrightarrow 3x_K - 3 = 6 \text{ ή } 3x_K - 3 = -6 \Leftrightarrow x_K = 3 \text{ ή } x_K = -1\,.$$

Αφού το Κ είναι σημείο του πρώτου τεταρτημορίου είναι $x_K > 0$ οπότε $x_K = 3$. Επομένως το κέντρο του κύκλου είναι το Κ(3,5) και η εξίσωση του κύκλου είναι :

$$c: (x-3)^2 + (y-5)^2 = 18.$$

β)

i. Η ευθεία ΚΑ είναι κάθετη στην εφαπτομένη ζ του κύκλου c στο Α, άρα ισχύει:

$$\lambda_{KA}\lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow \lambda_{KA} = 1.$$

Επομένως η ευθεία (ΚΑ) έχει εξίσωση :

$y - y_K = \lambda_{KA}(x - x_K) \Leftrightarrow y - 5 = 1(x-3)$

$\Leftrightarrow x - y + 2 = 0$

ii. Το σημείο Α είναι το σημείο τομής της ευθείας ζ με την ευθεία ΚΑ. Για τον προσδιορισμό των συντεταγμένων επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων των ευθειών ζ και ΚΑ.

$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases}$ άρα το Α έχει συντεταγμένες (0,2).

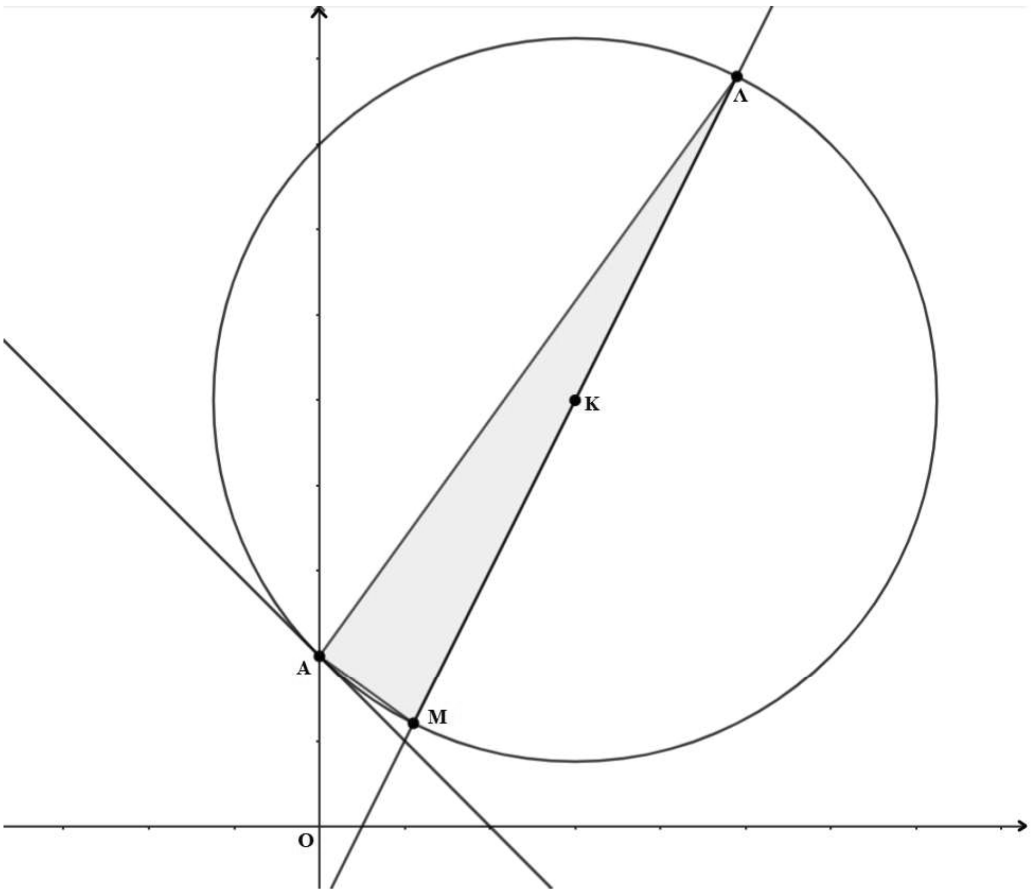
γ) Η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο στα σημεία Μ, Λ που είναι αντιδιαμετρικά. Επομένως ΜΛ=2ρ.

Το ύψος του τριγώνου ΑΛΜ προς την ΛΜ είναι ίσο με την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε.

Είναι ε: $y = 2x - 1 \Leftrightarrow 2x - y - 1 = 0$, άρα $\upsilon = d(A, \varepsilon) = \frac{|0-2-1|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

Οπότε:

$$(\text{ΑΛΜ}) = \frac{\text{ΜΛ}\cdot\upsilon}{2} = \frac{2\rho\cdot\upsilon}{2} = 3\sqrt{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{10}}{5}.$$



226 Θέμα 4 - 20650

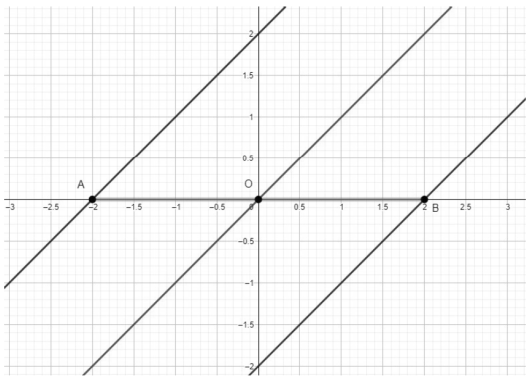
α)

i. Είναι $\varepsilon_1 : y = x + 2$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = 1$ και $\varepsilon_2 : y = x - 2$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2 = 1$. Είναι $\lambda_1 = \lambda_2$ άρα $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

ii. Είναι $\frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2+2}{2} = 0$ και $\frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$ άρα το μέσο του AB είναι η αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

iii. α τρόπος

Είναι γνωστό ότι η μεσοπαράλληλος των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλη προς αυτές και διέρχεται από τα μέσα των τμημάτων που έχουν τα άκρα τους στις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ και διέρχεται από το μέσο $O(0,0)$ του AB. Η ζητούμενη εξίσωση είναι η $\varepsilon : y = \lambda x \Leftrightarrow y = 1 \cdot x \Leftrightarrow y = x$.



β τρόπος

Το σημείο $\mathrm{M}(x,y)$, είναι σημείο της μεσοπαραλλήλου των ευθειών $\varepsilon_1: x-y+2=0, \varepsilon_2: x-y-2=0$ αν και μόνο αν ισχύει $d(M,\varepsilon_1)=d(M,\varepsilon_2)$.

Έτσι, έχουμε:

$$d(M,\varepsilon_1)=d(M,\varepsilon_2) \Leftrightarrow$$
$$\frac{|x-y+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|x-y-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} \Leftrightarrow$$
$$|x-y+2|=|x-y-2| \Leftrightarrow$$
$$x-y+2=x-y-2 \text{ ή } x-y+2=-x+y+2 \Leftrightarrow$$
$$2=-2 \text{ ή } x-y=-x+y \Leftrightarrow$$
$$2x=2y \Leftrightarrow$$
$$y=x$$

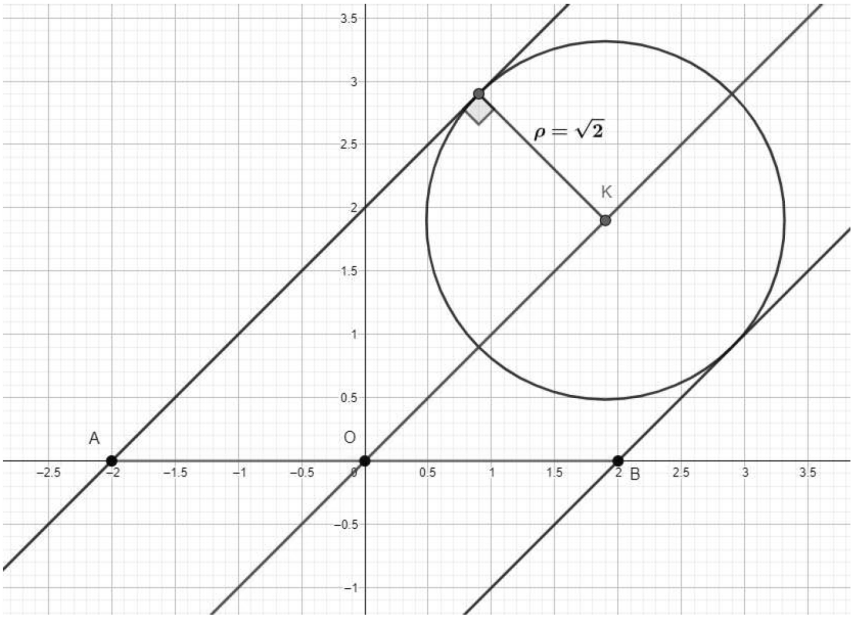
Επομένως, η εξίσωση της μεσοπαραλλήλου των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι η $\varepsilon: y=x$.

β)

i. Αφού το κέντρο $\mathrm{K}(x_\mathrm{K}, y_\mathrm{K})$ του κύκλου (K,ρ) ανήκει στην ευθεία $(\eta): x=\lambda$, θα έχει $x_\mathrm{K}=\lambda$. Επιπλέον το κέντρο K είναι το μέσο της απόστασης των δυο εφαπτομένων του κύκλου $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Οπότε ανήκει στη μεσοπαράλληλο τους. Δηλαδή, είναι $y_\mathrm{K}=x_\mathrm{K} \Leftrightarrow y_\mathrm{K}=\lambda$ με $\mathrm{K}(\lambda,\lambda)$.

ii. Είναι $\varepsilon_1: x-y+2=0$ οπότε η ακτίνα του κύκλου είναι ίση με $\rho=d(\mathrm{K},\varepsilon_1)=\frac{|x_\mathrm{K}-y_\mathrm{K}+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|\lambda-\lambda+2|}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, ανεξάρτητη του λ.

Η ζητούμενη εξίσωση για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, είναι η $(x-x_\mathrm{K})^2+(y-y_\mathrm{K})^2=\rho^2 \Leftrightarrow (x-\lambda)^2+(y-\lambda)^2=2$.



227 Θέμα 4 - 18871

α) Η εξίσωση του κύκλου είναι (c): $x^2 + y^2 = 5$.

Επιπλέον είναι: $(OA) = \sqrt{(3-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{10} > \sqrt{5} = \rho$.

Ως εκ τούτου, το σημείο A είναι εξωτερικό του κύκλου.

β)

i. Η εξίσωση εφαπτομένης κύκλου, με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ, στο σημείο $M(x_1, y_1)$ του κύκλου, είναι η $xx_1 + yy_1 = \rho^2 \Leftrightarrow xx_1 + yy_1 = 5$, (1).

Το σημείο $A(3,1)$ όμως επαληθεύει την (1), δηλαδή $3x_1 + y_1 = 5$.

Επιπλέον το σημείο $M(x_1, y_1)$ ανήκει στον κύκλο, δηλαδή $x_1^2 + y_1^2 = 5$.

Η εύρεση των x_1, y_1 και ως εκ τούτου της εφαπτομένης, προκύπτει από την επίλυση του συστήματος:

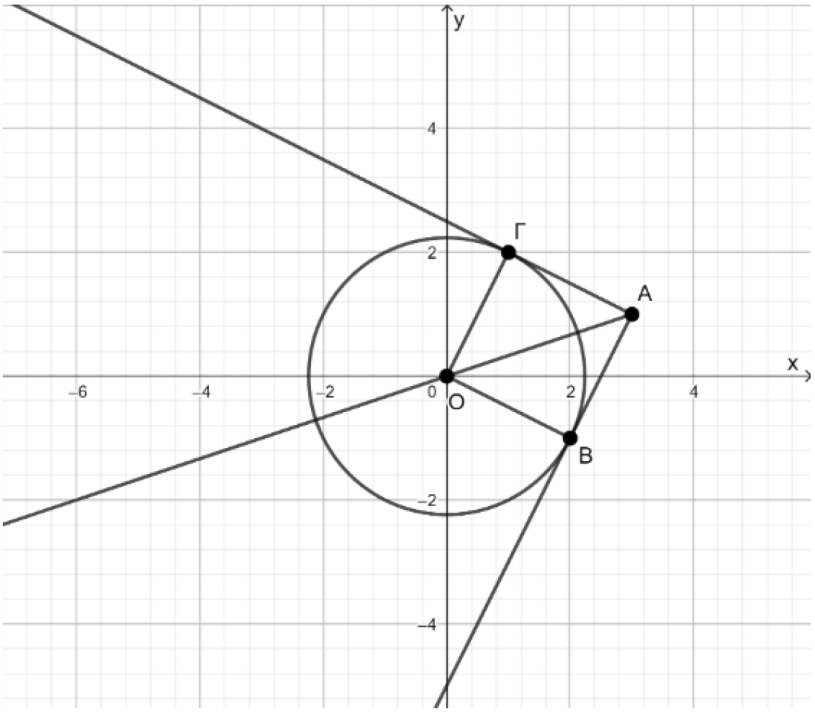
$$\begin{cases} 3x_1 + y_1 = 5 \\ x_1^2 + y_1^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 5 - 3x_1 \\ x_1^2 + (5-3x_1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 5 - 3x_1 \\ x_1^2 - 3x_1 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y_1 = -1 \\ x_1 = 2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y_1 = 2 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

Άρα τα σημεία επαφής είναι το $B(2,-1)$ και το $\Gamma(1,2)$.

Επομένως οι εξισώσεις των δύο εφαπτόμενων, είναι αντίστοιχα:

$$(\varepsilon_1)\colon\ 2x - y = 5 \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2)\colon\ x + 2y = 5$$



ii. Η ζητούμενη διχοτόμος είναι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία O και A, διότι το O απέχει ίση απόσταση από της πλευρές της γωνίας, αφού $(OB) = (O\Gamma) = \rho$.

Ο συντελεστής διεύθυνσής της είναι $\lambda_{OA} = \frac{1-0}{3-0} = \frac{1}{3}$ και ένα σημείο της το $O(0,0)$.

Επομένως η εξίσωσή της είναι η $y - 0 = \frac{1}{3}(x - 0) \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x$.

228 Θέμα 4 - 15177

α) Θεωρούμε σημείο $N(x, y)$ του επιπέδου. Τότε $\overrightarrow{NA} = (1 - x, -y)$, $\overrightarrow{NB} = (-x, -1 - y)$, οπότε ισχύει:

$\overrightarrow{NA}^2 - \overrightarrow{NB}^2 = 4 \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{NA}\right|^2 - \left|\overrightarrow{NB}\right|^2 = 4 \Leftrightarrow (1 - x)^2 + y^2 - x^2 - (1 + y)^2 = 4 \Leftrightarrow$

$x + y + 2 = 0$.

Άρα τα ζητούμενα σημεία N ανήκουν σε ευθεία με εξίσωση (ε): $y = -x - 2$.

β) Έστω σημείο $P(x, y)$ του επιπέδου. Τότε, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου, ισχύει:

$$2x^2 + 2y^2 + 10x + 14y + 21 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 5x + 7y + \frac{21}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2x\frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + y^2 + 2y\frac{7}{2} + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = -\frac{21}{2} + \frac{25}{4} + \frac{49}{4} \Leftrightarrow$$

$$c_2\colon \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{7}{2}\right)^2 = 8$$

Άρα τα σημεία P ανήκουν σε κύκλο c_2, με κέντρο $\Lambda\left(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right)$ και ακτίνα $R = 2\sqrt{2}$.

<u>2ος τρόπος</u>:

$2x^2 + 2y^2 + 10x + 14y + 21 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 5x + 7y + \frac{21}{2} = 0$.

Αλλά $5^2 + 7^2 - 4 \cdot \frac{21}{2} = 32 > 0$, επομένως η εξίσωση παραστάνει κύκλο, με κέντρο $\Lambda\left(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{32}}{2} = 2\sqrt{2}$.

γ)

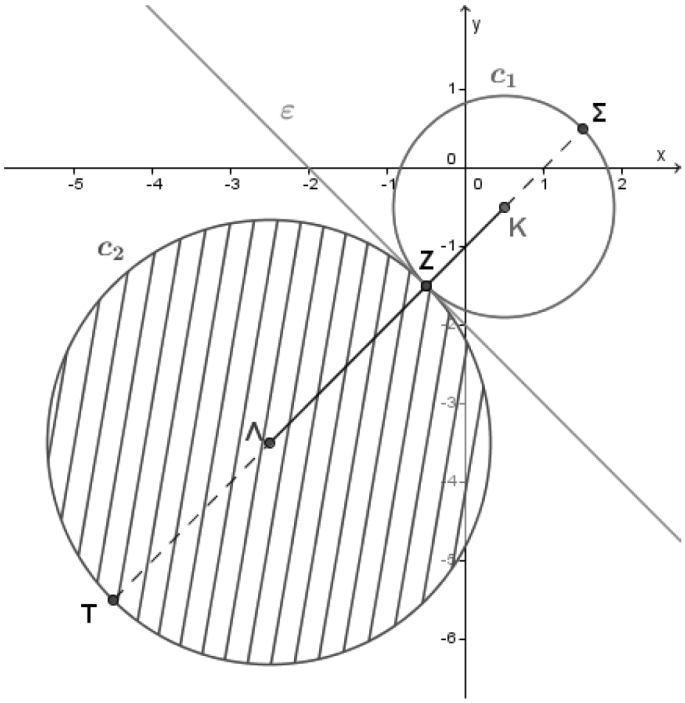
i. Οι κύκλοι c_1 και c_2 εφάπτονται εξωτερικά, διότι έχουν διάκεντρο

$\delta = (K\Lambda) = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2} + \frac{7}{2}\right)^2} = 3\sqrt{2}$ και ισχύει $\delta = \rho + R$.

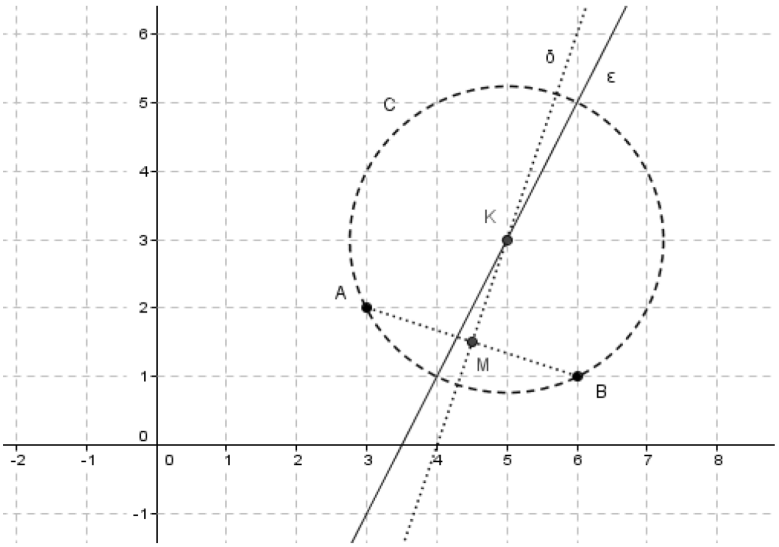
Άρα η ελάχιστη απόσταση των σημείων των δύο κύκλων είναι μηδέν και η μέγιστη απόσταση είναι ίση με $\Sigma T = \Sigma Z + ZT = 2\rho + 2R = 6\sqrt{2}$.

ii. Είναι $d(K, \varepsilon) = \frac{\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 2\right|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = \rho$ και $d(\Lambda, \varepsilon) = \frac{\left|-\frac{5}{2} - \frac{7}{2} + 2\right|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} = R$.

Άρα η ευθεία (ε) είναι η ζητούμενη κοινή εφαπτομένη.



229 Θέμα 4 - 22069



α) Το κέντρο Κ του κύκλου μπορεί να προσδιοριστεί ως το σημείο τομής της δοσμένης ευθείας ε και της μεσοκάθετης ευθείας δ της χορδής ΑΒ.

Θα βρούμε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας δ της χορδής ΑΒ.

Οι συντεταγμένες του μέσου Μ της χορδής ΑΒ είναι το ημιάθροισμα των συντεταγμένων των σημείων $A(3,2)$ και $B(6,\ 1)$, δηλαδή $M\left(\frac{3+6}{2},\frac{2+1}{2}\right)$ ή ισοδύναμα $M\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)$.

Επίσης, $\lambda_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{1-2}{6-3}=-\frac{1}{3}$ και $\lambda_{AB}\cdot\lambda_\delta=-1$, άρα: $\lambda_\delta=3$.

Επομένως, η εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας δ της χορδής ΑΒ είναι :

$y-y_M=\lambda_\delta\cdot(x-x_M)$, δηλαδή $y-\frac{3}{2}=3\cdot\left(x-\frac{9}{2}\right)$, ή ισοδύναμα $y=3x-12$.

Οι συντεταγμένες του κέντρου Κ του κύκλου είναι οι συντεταγμένες του σημείου τομής της δοσμένης ευθείας ε και της μεσοκάθετης ευθείας δ της χορδής ΑΒ, δηλαδή η λύση του συστήματος: $\begin{cases} y = 2x - 7 \\ y = 3x - 12 \end{cases}$ που είναι το ζεύγος $(x, y) = (5, 3)$. Άρα, το κέντρο του κύκλου C είναι το σημείο $K(5, 3)$.

β) Όπως φαίνεται και στο σχήμα, η ακτίνα R είναι:

$R = |AK| = \sqrt{(x_K - x_A)^2 + (y_K - y_A)^2} = \sqrt{(5-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{5}$.

γ) Η εξίσωση κύκλου με κέντρο Κ και ακτίνα R είναι: $(x - x_K)^2 + (y - y_K)^2 = R^2$.

Οπότε, από το α) και β) ερώτημα, έχουμε: $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 5$.

230 Θέμα 4 - 22066

α) Για το σημείο Α είναι: $x = \text{συν}\theta$ και $y = \text{ημ}\theta$, οπότε $x^2 + y^2 = \text{συν}^2\theta + \text{ημ}^2\theta = 1$. Άρα, το Α ανήκει στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και ακτίνα $R = 1$.

Για το σημείο Β είναι: $x = \text{συν}\theta - \text{ημ}\theta$ και $y = \text{ημ}\theta + \text{συν}\theta$, οπότε

$x^2 + y^2 = (\text{συν}\theta - \text{ημ}\theta)^2 + (\text{ημ}\theta + \text{συν}\theta)^2 =$

$= [\text{συν}^2\theta - 2\text{συν}\theta\text{ημ}\theta + \text{ημ}^2\theta] + [\text{ημ}^2\theta + 2\text{ημ}\theta\text{συν}\theta + \text{συν}^2\theta] =$

$= 2[\text{συν}^2\theta + \text{ημ}^2\theta] = 2 \cdot 1 = 2$.

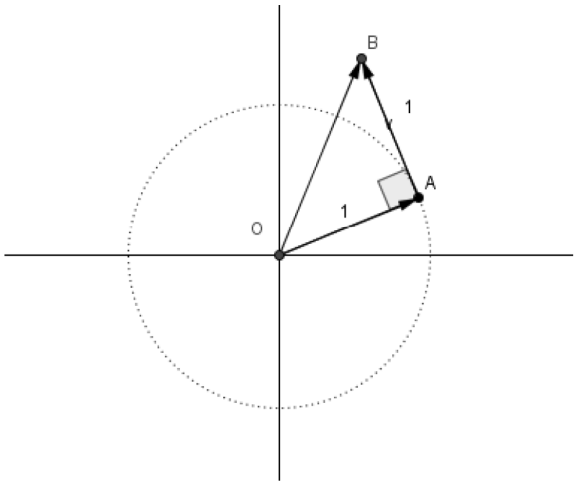
Άρα, το Β ανήκει στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και ακτίνα $R = \sqrt{2}$.

β) $\overrightarrow{OA} = (\text{συν}\theta, \text{ημ}\theta)$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (\text{συν}\theta - \text{ημ}\theta, \text{ημ}\theta + \text{συν}\theta) - (\text{συν}\theta, \text{ημ}\theta) = (-\text{ημ}\theta, \text{συν}\theta)$.

Οπότε, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = (\text{συν}\theta, \text{ημ}\theta) \cdot (-\text{ημ}\theta, \text{συν}\theta) = -\text{συν}\theta\text{ημ}\theta + \text{ημ}\theta\text{συν}\theta = 0$.

Άρα, $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB}$.



γ) Από το β) ερώτημα, το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο (με την ορθή γωνία στην κορυφή Α). Επιπλέον, από το β) ερώτημα, αφού $\overrightarrow{OA} = (\text{συν}\theta, \text{ημ}\theta)$ και $\overrightarrow{AB} = (-\text{ημ}\theta, \text{συν}\theta)$, έχουμε ότι $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{AB}| = 1$. Επομένως, το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, άρα όλες οι οξείες γωνίες του είναι ίσες με 45°. Επομένως, $\omega = 45^o$.

231 Θέμα 4 - 22062

α) Γενικά, η εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ παριστά κύκλο με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ, αν $\rho > 0$ (ή ακτίνα $|\rho|$, αν $\rho \neq 0$). Συνεπώς, αν $\lambda \neq 0$, η εξίσωση $(x - \lambda)^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2$ παριστά κύκλο με κέντρο $K(\lambda, \lambda)$ και ακτίνα $|\lambda|$.

β) Παρατηρούμε ότι για $x = \lambda$ και $y = \lambda$ επαληθεύεται η εξίσωση $y = x$. Επομένως, για κάθε $\lambda \neq 0$, το κέντρο $K(\lambda, \lambda)$ του κύκλου C_λ είναι σημείο της ευθείας $y = x$.

Για τα ερωτήματα γ), δ), ε) υπενθυμίζουμε ότι μία ευθεία $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$ (με $|A| + |B| \neq 0$) εφάπτεται σε ένα κύκλο με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ αν και μόνο αν $d(K, \varepsilon) = \rho$ ή ισοδύναμα αν

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \rho \quad (1).$$

Επίσης, από το α) ερώτημα, για κάθε $\lambda \neq 0$, η εξίσωση $(x - \lambda)^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2$ παριστά κύκλο C_λ με κέντρο $K(\lambda, \lambda)$ και ακτίνα $|\lambda|$. Οπότε:

$$x_0 = \lambda, \quad y_0 = \lambda, \quad \rho = |\lambda|$$

γ) Θεωρούμε την ευθεία $x = 0$. Εδώ: $A = 1$, $B = 0$, $\Gamma = 0$. Οπότε, η σχέση (1) ικανοποιείται για κάθε $\lambda \neq 0$, αφού: $\frac{|1 \cdot \lambda + 0 \cdot \lambda + 0|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |\lambda|$ (ταυτότητα).

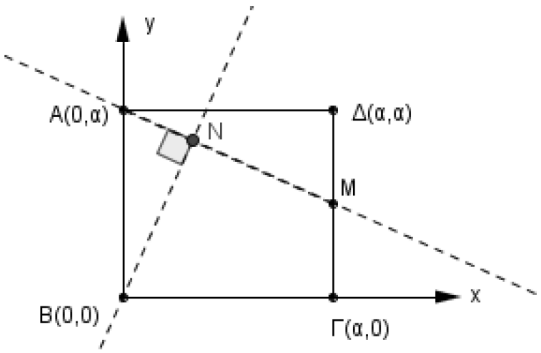
Άρα, η ευθεία $x = 0$ εφάπτεται σε όλους τους κύκλους C_λ, $\lambda \neq 0$.

Για να δείξουμε ότι η ευθεία $y = 0$ εφάπτεται σε όλους τους κύκλους C_λ θα μπορούσαμε να εργαστούμε όμοια με παραπάνω ή να παρατηρήσουμε ότι υπάρχει συμμετρία ως προς την $1^η$ διχοτόμο, καθώς η εξίσωση $(x - \lambda)^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2$ παραμένει αναλλοίωτη αν εναλλάξουμε τους ρόλους των x και y.

δ) Έστω $\alpha \neq 0$. Θεωρούμε την ευθεία $x = \alpha$. Εδώ: $A = 1$, $B = 0$, $\Gamma = -\alpha$. Οπότε, η σχέση (1) γίνεται: $\frac{|1 \cdot \lambda + 0 \cdot \lambda - \alpha|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |\lambda| \Leftrightarrow |\lambda - \alpha| = |\lambda| \Leftrightarrow \lambda - \alpha = \pm\lambda$. Το θετικό πρόσημο δίνει $\alpha = 0$ (πράγμα αδύνατο, αφού έχει υποτεθεί $\alpha \neq 0$), ενώ το αρνητικό πρόσημο δίνει την μοναδική αποδεκτή τιμή του λ που είναι το $\frac{\alpha}{2}$.

Λόγω συμμετρίας, το ίδιο συμβαίνει και για την ευθεία $y = \alpha$.

232 Θέμα 4 - 22061



α) i. Στο τρίγωνο ΑΔΜ έχουμε $(\text{ΑΔ}) = \alpha$ και $(\text{ΜΔ}) = \frac{\alpha}{2}$, άρα $\lambda_{\text{AM}} = -\frac{1}{2}$. Επίσης, από την υπόθεση, οι ευθείες ΑΜ και ΒΝ είναι κάθετες, οπότε $\lambda_{\text{AM}} \cdot \lambda_{\text{BN}} = -1$. Συνεπώς, $\lambda_{\text{BN}} = 2$.

Έτσι, η εξίσωση της ευθείας ΑΜ είναι: $y - y_A = \lambda_{\text{AM}}(x - x_A)$, δηλαδή $y - \alpha = -\frac{1}{2}(x - 0)$ ή ισοδύναμα $y = -\frac{1}{2}x + \alpha$.

ii. Όμοια, η εξίσωση της ευθείας ΒΝ είναι: $y - y_B = \lambda_{\text{BN}}(x - x_B)$, δηλαδή $y - 0 = 2(x - 0)$, ή ισοδύναμα $y = 2x$.

β) Οι συντεταγμένες του σημείου Ν, ως σημείο τομής των ευθειών ΑΜ και ΒΝ, είναι η λύση του συστήματος $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \alpha \\ y = 2x \end{cases}$.

Όμως, $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \alpha \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{1}{2}x + \alpha \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}x = \alpha \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\alpha}{5} \\ y = \frac{4\alpha}{5} \end{cases}$.

Άρα, $N(\frac{2\alpha}{5}, \frac{4\alpha}{5})$.

γ) Η απόσταση του σημείου $N(\frac{2\alpha}{5}, \frac{4\alpha}{5})$ από το σημείο $\Gamma(\alpha, 0)$ είναι ίση με:

$$\sqrt{(x_\Gamma - x_N)^2 + (y_\Gamma - y_N)^2} = \sqrt{(\alpha - \frac{2\alpha}{5})^2 + (0 - \frac{4\alpha}{5})^2} = \sqrt{(\frac{3\alpha}{5})^2 + (\frac{4\alpha}{5})^2} = \sqrt{\frac{25\alpha^2}{25}} = \alpha.$$

Άρα, το σημείο Ν ανήκει σε κύκλο με κέντρο Γ και ακτίνα ίση με α. Αφού ο ζητούμενος κύκλος έχει κέντρο το σημείο $\Gamma(\alpha, 0)$ και ακτίνα α, έπεται ότι έχει εξίσωση: $(x - \alpha)^2 + y^2 = \alpha^2$.

233 Θέμα 4 – 21683

α) Η εξίσωση της εφαπτομένης του τεταρτοκυκλίου στο σημείο Μ είναι: $xx_1 + yy_1 = 4$.

- Αν $y = 0$, τότε έχουμε $x = \frac{4}{x_1}$, οπότε $K\left(\frac{4}{x_1}, 0\right)$.

- Αν $x=0$, τότε έχουμε $y=\frac{4}{y_1}$ (προφανώς $y_1 \neq 0$), οπότε $\Lambda\left(0, \frac{4}{y_1}\right)$.

β) Το μήκος του τμήματος ΚΛ, δεδομένου ότι $x_1^2+y_1^2=4$, είναι:

$$d=\sqrt{\frac{16}{x_1^2}+\frac{16}{y_1^2}}=4\sqrt{\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{y_1^2}}=4\sqrt{\frac{x_1^2+y_1^2}{x_1^2y_1^2}}=4\frac{\sqrt{4}}{x_1y_1}=\frac{8}{x_1y_1}$$

που είναι το ζητούμενο.

γ) Όταν $x_1=\sqrt{2}$, τότε από την ισότητα $x_1^2+y_1^2=4$ με $y_1>0$ έχουμε :

$$y_1^2=4-x_1^2 \Leftrightarrow y_1^2=4-2 \Leftrightarrow y_1^2=2 \Leftrightarrow y_1=\sqrt{2}$$

οπότε $d_o=\frac{8}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{8}{2}=4$.

δ) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{8}{x_1y_1}\geq 4$, ή αρκεί, $\frac{4}{x_1y_1}\geq 2$, για την απόδειξη της οποίας αρκεί να δείξουμε ότι $x_1^2+y_1^2\geq 2x_1y_1$, που ισχύει, αφού προκύπτει άμεσα από την προφανή ανισότητα $(x_1-y_1)^2\geq 0$.

234 Θέμα 4 - 20863

α) Το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος AB είναι το σημείο $M\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$, δηλαδή το $M(2,0)$. Επιπλέον, το ευθύγραμμο τμήμα AB βρίσκεται πάνω στον άξονα x΄x. Επομένως, η μεσοκάθετη ευθεία του ευθύγραμμου τμήματος AB είναι η κατακόρυφη ευθεία (ζ) που διέρχεται από το σημείο M και έχει εξίσωση $x=2$.

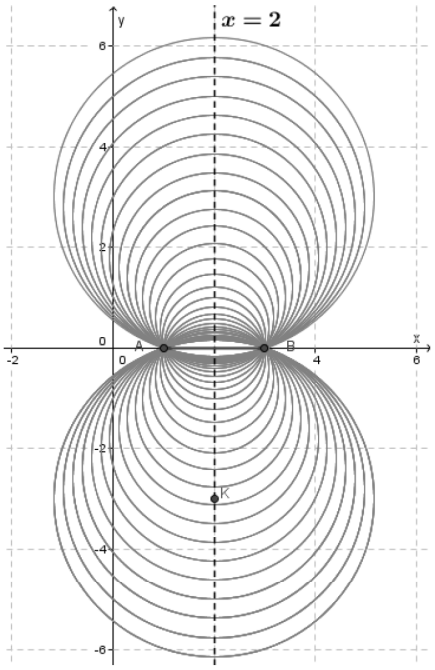
β) Η εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ είναι η $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$.

Αφού το σημείο K ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $x=2$, τότε θα είναι της μορφής $K(2,\lambda)$, με $\lambda\epsilon\mathbb{R}$. Το κέντρο των κύκλων λοιπόν είναι το σημείο $K(2,\lambda)$.

Αφού οι κύκλοι διέρχονται από τα σημεία A και B, τότε η ακτίνα τους είναι:

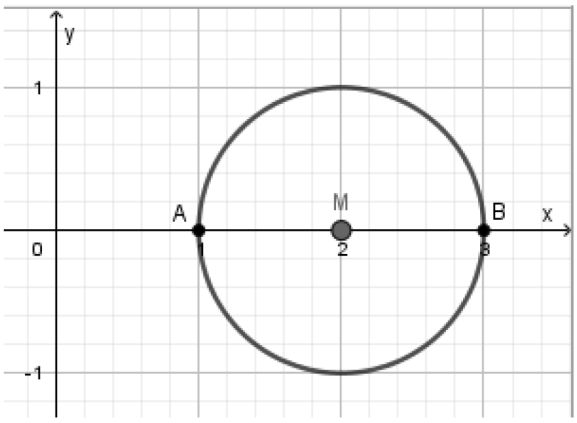
$$\rho=(KB)=(KA)=\sqrt{(2-1)^2+(\lambda-0)^2}=\sqrt{1+\lambda^2}.$$

Επομένως, η εξίσωσή τους είναι η $(x-2)^2+(y-\lambda)^2=\lambda^2+1,\ \lambda\in\mathbb{R}$ (1).



γ)

i. Ο ζητούμενος κύκλος έχει κέντρο το μέσον $M(2,0)$ της διαμέτρου AB, επομένως το $\lambda = 0$. Έτσι η εξίσωσή του είναι η $(x-2)^2 + y^2 = 1$.



ii. Το σημείο $A(1,0)$ ανήκει στην ευθεία (ε) και σε όλους τους κύκλους.

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $d(K,\varepsilon) = \rho$. Πραγματικά είναι

$$d(K,\varepsilon) = \frac{|1\cdot 2 + \lambda\cdot\lambda - 1|}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{|1+\lambda^2|}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{1+\lambda^2}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{(1+\lambda^2)\sqrt{1+\lambda^2}}{(1+\lambda^2)} = \sqrt{1+\lambda^2}$$

235 Θέμα 4 - 20700

α) Η πλευρά του τετραγώνου είναι $(MM_1) = 4$. Η διαγώνιος OM είναι η διάμετρος του ζητούμενου κύκλου.

Έχουμε $(OM) = \sqrt{(OM_1)^2 + (MM_1)^2} = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, δηλαδή $\rho = 2\sqrt{2}$

Το μέσον της OM έχει συντεταγμένες $K(2,2)$.

Άρα ο κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές του τετραγώνου (περιγεγραμμένος κύκλος) έχει εξίσωση C: $(x-2)^2 + (y-2)^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$.

β) Για να είναι η ευθεία ε εφαπτομένη του κύκλου θα πρέπει η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία να είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου.

Έχουμε:

$$d(K,\varepsilon)=\frac{|Ax_0+By_0+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|2+2-8|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}=\rho.$$

Άρα η ευθεία ε είναι εφαπτομένη του κύκλου.

γ) Έστω $N(x_1,y_1)$ το σημείο επαφής. Τότε οι συντεταγμένες του σημείου θα πρέπει να επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας και του κύκλου.

Έχουμε:

$$\begin{cases} x_1+y_1=8 \\ (x_1-2)^2+(y_1-2)^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

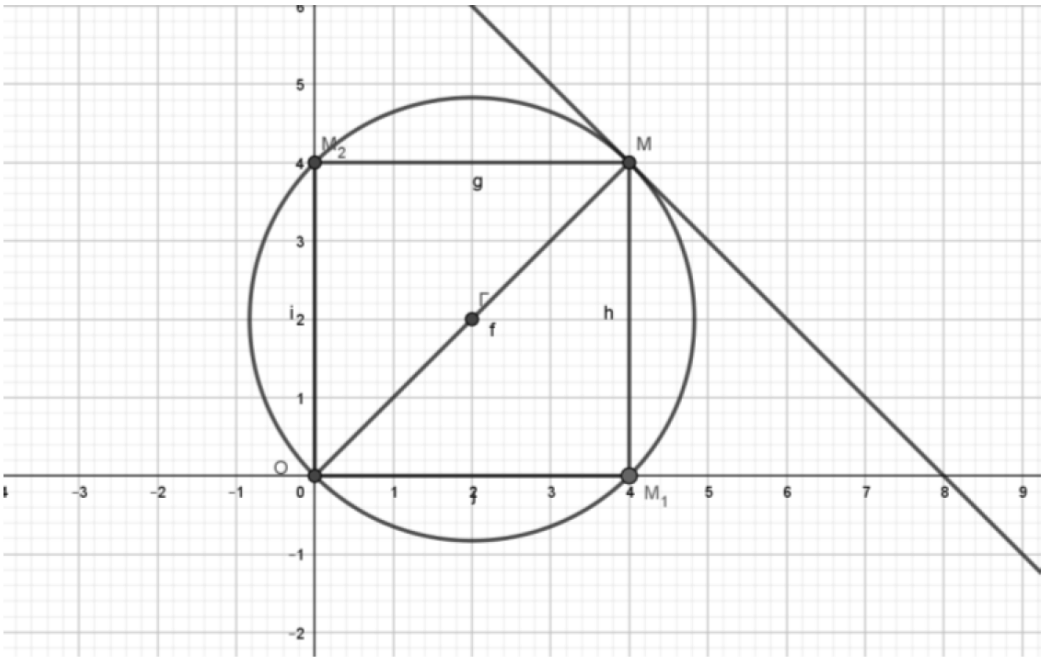
$$\begin{cases} x_1=8-y_1 \\ (8-y_1-2)^2+(y_1-2)^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1=8-y_1 \\ (6-y_1)^2+(y_1-2)^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1=8-y_1 \\ 36-12y_1+{y_1}^2+{y_1}^2-4y_1+4=8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1=8-y_1 \\ 2{y_1}^2-16y_1+32=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1=8-y_1 \\ {y_1}^2-8y_1+16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=8-y_1 \\ (y_1-4)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=4 \\ y_1=4 \end{cases}.$$

Άρα το σημείο επαφής είναι το $M(4,4)$.



236 Θέμα 4 - 18521

α) Είναι $\overrightarrow{AB} = (2-1, 4-2) = (1, 2)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (3-1, 1-2) = (2, -1)$.

Τότε $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0$. Επομένως τα διανύσματα είναι κάθετα και ως εκ τούτου $B\hat{A}\Gamma = 90°$.

Εναλλακτική λύση: $\lambda_{AB} = \frac{4-2}{2-1} = 2$, $\lambda_{A\Gamma} = \frac{1-2}{3-1} = -\frac{1}{2}$ και $\lambda_{AB} \cdot \lambda_{A\Gamma} = -1$.

β) Αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο A, ο κύκλος ο οποίος διέρχεται από τα σημεία A, B και Γ έχει διάμετρο την υποτείνουσα $B\Gamma$ του τριγώνου και κέντρο το μέσο K της $B\Gamma$.

Αλλά $x_K = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$, $y_K = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$, οπότε $K\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Για την ακτίνα του, είναι: $\rho = \frac{(B\Gamma)}{2} = \frac{\sqrt{(3-2)^2+(1-4)^2}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Ως γνωστόν, η εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ είναι η

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

Επομένως, η εξίσωση του κύκλου c είναι η $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$.

γ) Έστω ε: $y = \lambda\, x \Leftrightarrow \lambda x - y = 0$ εξίσωση ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η ευθεία εφάπτεται στον κύκλο αν και μόνο αν η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία ισούται με την ακτίνα του ρ. Είναι λοιπόν:

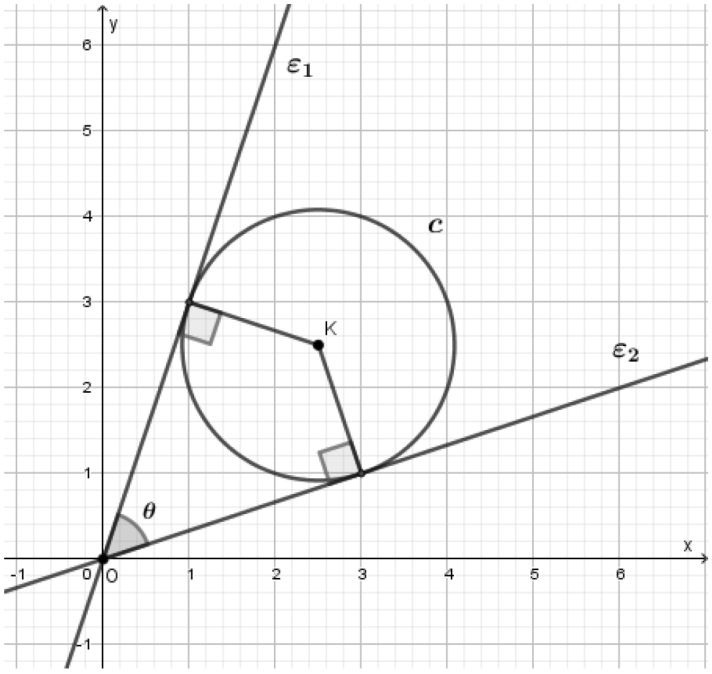
$$d(K, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{\left|\lambda \cdot \frac{5}{2} - 1 \cdot \frac{5}{2} + 0\right|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot |\lambda - 1| = \sqrt{10} \cdot \sqrt{\lambda^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$25\,(\lambda - 1)^2 = 10\,(\lambda^2 + 1) \Leftrightarrow 3\lambda^2 - 10\lambda + 3 = 0$$

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 10^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 64 > 0$ και οι λύσεις της δευτέρου βαθμού εξίσωσης που έχει προκύψει είναι οι $\lambda_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 3} \Leftrightarrow \lambda_1 = 3$ ή $\lambda_2 = \frac{1}{3}$.

Επειδή από ένα σημείο εκτός κύκλου φέρονται δύο ακριβώς εφαπτόμενες προς αυτόν, οι ζητούμενες ευθείες που εφάπτονται στον κύκλο έχουν εξισώσεις:

$$\varepsilon_1: y = 3x \text{ και } \varepsilon_2: y = \frac{1}{3}x$$



237 Θέμα 2 - 18701

α) Η εξίσωση (1) της παραβολής είναι της μορφής $x^2 = 2py$, με εστία $E(0,\frac{p}{2})$ πάνω στον άξονα $y'y$ και διευθετούσα δ: $y = -\frac{p}{2}$, κάθετη στον άξονα $y'y$.

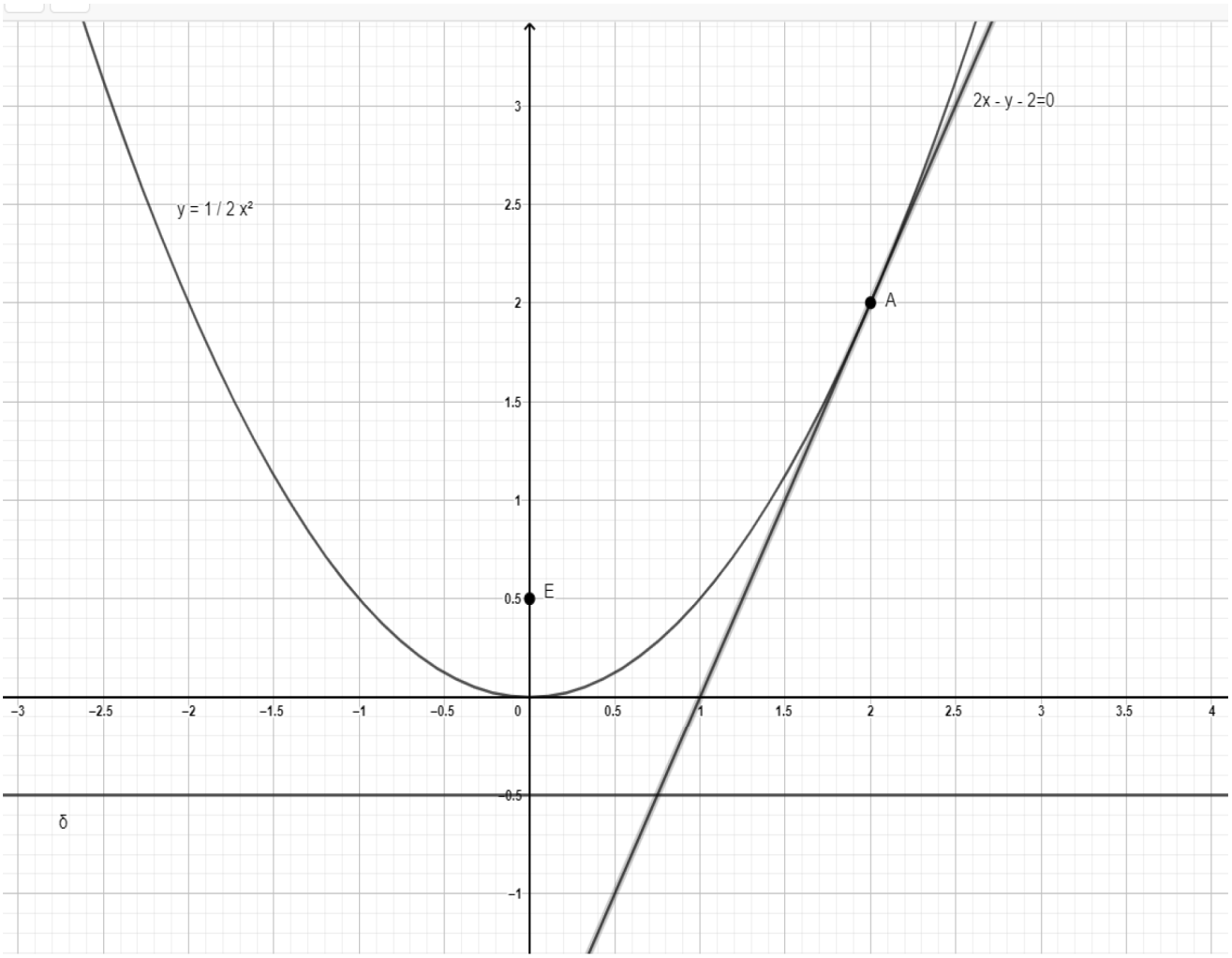
Άρα, από την εξίσωση της παραβολής έχουμε $y = \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow x^2 = 2y$, οπότε $p = 1$, επομένως η εστία θα είναι $E(0,\frac{1}{2})$ και η διευθετούσα δ: $y = -\frac{1}{2}$.

β) Η μορφή της εξίσωσης της εφαπτομένης της παραβολής $x^2 = 2py$ σε ένα σημείο της (x_1, y_1) είναι $x \cdot x_1 = p(y+y_1)$.

Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης της δοσμένης παραβολής στο σημείο $A(2,2)$ είναι

$$2x = y + 2 \Leftrightarrow 2x - y - 2 = 0.$$

γ) Η παραβολή (1), η εστία Ε, η διευθετούσα δ και η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο $A(2,2)$ φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



238 Θέμα 2 - 21248

α)

i. Είναι $(\mathrm{ME})=\sqrt{(x_{\mathrm{E}}-x_{\mathrm{M}})^2+(y_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{M}})^2}=\sqrt{(2-x)^2+(0-y)^2}=\sqrt{x^2-4x+4+y^2}$.

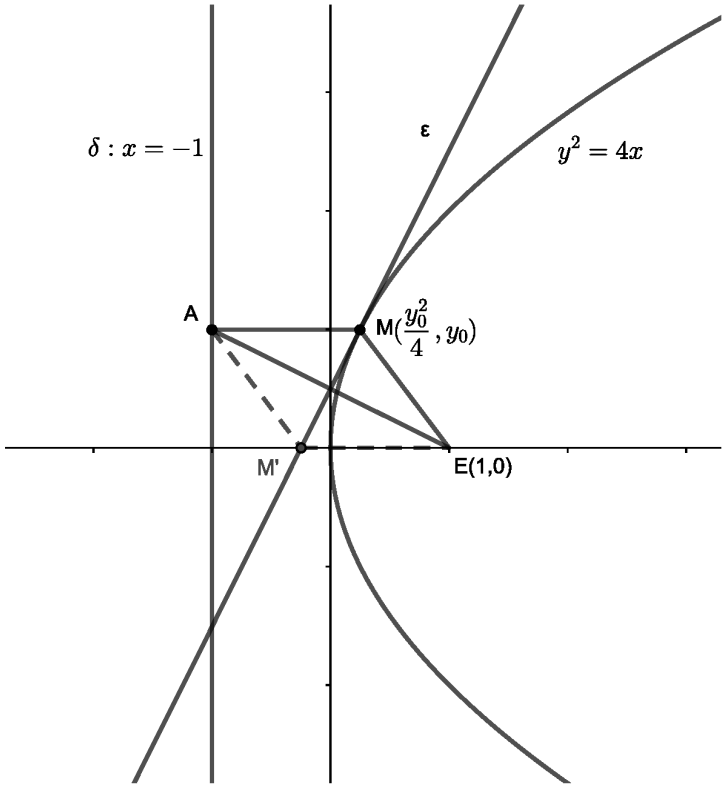
ii. Είναι $d(\mathrm{M},\delta)=\dfrac{|x+2|}{\sqrt{1^2+0^2}}=|x+2|$.

β) Έχουμε, με την βοήθεια των ερωτημάτων α) και β)

$$(\mathrm{ME})=d(\mathrm{M},\delta)\Leftrightarrow\sqrt{x^2-4x+4+y^2}=|x+2|\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2=(x+2)^2\Leftrightarrow y^2=8x.$$

Δηλαδή, το σημείο M ανήκει στην παραβολή $y^2=8x$.

239 Θέμα 4 - 20090



α)

i. Το σημείο $M(x_0, y_0)$ είναι σημείο της παραβολής, άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση της παραβολής. Δηλαδή $y_0{}^2 = 4 \cdot x_0$, άρα $x_o = \frac{y_o^2}{4}$.

Επομένως οι συντεταγμένες του Μ είναι $M(\frac{y_0{}^2}{4}, y_0)$. Το σημείο Α είναι η προβολή του Μ στη διευθετούσα της παραβολής που είναι η ευθεία (δ): $x = -1$. Άρα $A(-1, y_0)$.

ii. Για το εμβαδό του τριγώνου ΜΑΕ έχουμε ότι (ΜΑΕ) = $\frac{1}{2}$ $|\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AE})|$ (1), με

$\overrightarrow{AM} = (\frac{y_0{}^2}{4} + 1, 0)$ και $\overrightarrow{AE} = (1 + 1, 0 - y_0) = (2, -y_0)$.

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AE}) = \begin{vmatrix} \frac{y_0{}^2}{4} + 1 & 0 \\ 2 & -y_0 \end{vmatrix} = -\frac{y_0{}^3}{4} - y_0 = \frac{-y_0{}^3 - 4y_0}{4}.$$

Επειδή (ΜΑΕ) = $\frac{5}{8}$, η σχέση (1) γίνεται: $\frac{5}{8} = \frac{1}{2} \left| \frac{-y_0{}^3 - 4y_0}{4} \right| \Leftrightarrow | y_0{}^3 + 4y_0 | = 5$. Όμως $y_0 > 0$ από την υπόθεση, άρα $y_0{}^3 + 4y_0 = 5 \Leftrightarrow y_0{}^3 + 4y_0 - 5 = 0$ (2). Εφαρμόζοντας σχήμα Horner με το 1, αφού το 1 αποτελεί ρίζα της εξίσωσης (2), η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται: $(y_0 - 1)(y_0{}^2 + y_0 + 5) = 0$. Άρα $y_0 = 1$ η μοναδική λύση της εξίσωσης, αφού το τριώνυμο $y_0{}^2 + y_0 + 5$ έχει Δ = -19<0 και δεν έχει πραγματικές ρίζες. Επομένως το σημείο Μ είναι το $M(\frac{1}{4}, 1)$.

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της παραβολής σε ένα σημείο της (x_1, y_1) είναι: $yy_1 = 2(x + x_1)$. Στο σημείο $M(\frac{1}{4}, 1)$ η παραπάνω εξίσωση γίνεται: $y = 2(x + \frac{1}{4}) \Leftrightarrow 4x - 2y + 1 = 0$. Θέτοντας όπου $y = 0$ έχουμε $x = -\frac{1}{4}$, άρα $M'(-\frac{1}{4}, 0)$.

Για το τμήμα ΑΜ έχουμε: ΑΜ⊥δ, δ⊥x'x, άρα ΑΜ//x'x.

Επίσης (ΑΜ)= $|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{\left(\frac{1}{4}+1\right)^2}=\frac{5}{4}$ και (ΕΜ΄)=$|1+\frac{1}{4}|=\frac{5}{4}$. Δηλαδή τα τμήματα ΑΜ και ΕΜ΄ είναι ίσα και παράλληλα, άρα το τετράπλευρο ΑΜΕΜ΄ είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον το Μ είναι σημείο της παραβολής και ισαπέχει από την εστία και τη διευθετούσα, άρα ΜΕ = ΑΜ. Επομένως, το παραλληλόγραμμο έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες, άρα είναι ρόμβος.

240 Θέμα 4 - 20862

α) Η ευθεία (ε_1) διέρχεται από το σημείο M και έχει κλίση $\lambda = \varepsilon\varphi 45° = 1$. Επομένως, έχει εξίσωση $(\varepsilon_1): \ y - 2 = 1(x + 2) \Leftrightarrow y = x + 4$.

β) Το σύνολο των σημείων του επιπέδου, που απέχουν ίση απόσταση από το σημείο E και την ευθεία (ζ), είναι παραβολή με εστία το σημείο $E\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ και διευθετούσα την ευθεία $(\zeta): y = \frac{1}{2}$.

Η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$ και παράμετρο $p = -1$. Επομένως η εξίσωσή της είναι η $x^2 = 2py \overset{p=-1}{\Longleftrightarrow} x^2 = -2y \Leftrightarrow x^2 + 2y = 0$.

γ)

i. Αν $K(x_1, y_1)$ είναι το σημείο επαφής, τότε η εφαπτομένη (n) της παραβολής έχει εξίσωση $xx_1 = p(y + y_1) \overset{p=-1}{\Longleftrightarrow} y = -x_1x - y_1$. Τότε είναι:

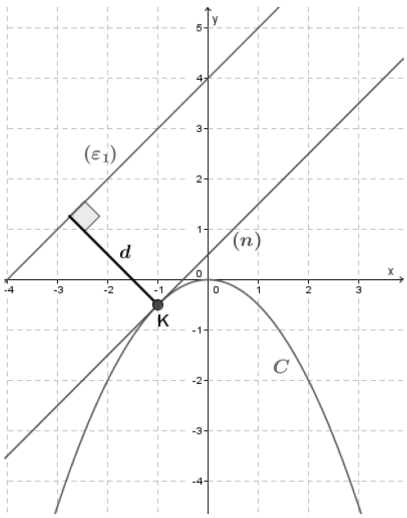
$$(n)//(\varepsilon_1) \Rightarrow \lambda_n = \lambda_{\varepsilon_1} \Rightarrow -x_1 = 1 \Rightarrow x_1 = -1$$

Επιπλέον το $K(x_1, y_1)$ ανήκει στην παραβολή, επομένως ισχύει:

$x_1^2 + 2y_1 = 0 \overset{x_1=-1}{\Longrightarrow} y_1 = -\frac{1}{2}$.

Έτσι η εφαπτομένη έχει εξίσωση (n): $y = x + \frac{1}{2}$.

ii. 1ος τρόπος: Με τη βοήθεια της παρακάτω γραφικής παράστασης:



Όπως φαίνεται στην γραφική παράσταση, η εφαπτομένη (n) και η παραβολή C έχουν μοναδικό κοινό σημείο το K. Επιπλέον ισχύει $(n)//(\varepsilon_1)$, με την (ε_1) να βρίσκεται "πάνω" από την (n).

Έτσι, η ελάχιστη απόσταση των σημείων της C από την ευθεία (ε_1) είναι η απόσταση του σημείου $K\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ από την ευθεία (ε_1): $x - y + 4 = 0$.

Έτσι είναι:

$$d\big(K, (\varepsilon_1)\big) = \frac{\left|1\cdot(-1) - 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 4\right|}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{4}.$$

2ος τρόπος: Η αλγεβρική προσέγγιση

Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο της παραβολής C , το $\Lambda\left(x_0, \frac{-x_0^2}{2}\right)$ με $x_0 \in \mathbb{R}$.

Η απόσταση του Λ από την ευθεία (ε_1) είναι:

$$d = d(x_0) = \frac{\left|1\cdot x_0 - 1\cdot\left(\frac{-x_0^2}{2}\right) + 4\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\left|x_0^2 + 2x_0 + 8\right|}{2\sqrt{2}}$$

Αλλά $x_0^2 + 2x_0 + 8 > 0$ για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$,

διότι έχει διακρίνουσα $\Delta = -28 < 0$ και $\alpha = 1 > 0$.

Επομένως

$$d(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(x_0^2 + 2x_0 + 8),\ x_0 \in \mathbb{R}.$$

Η παραπάνω αποτελεί μία παραβολή που παρουσιάζει ελάχιστο για $x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha} = -1$ και ελάχιστη τιμή την $d(-1) = \frac{7}{2\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{4}$.

241 Θέμα 4 - 20684

α) Από τον ορισμό της παραβολής, έχουμε ότι ΑΒ = ΑΕ. Αλλά η ΒΕ είναι διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα είναι $BE = \frac{A\Gamma}{2} = EA$.

Ώστε το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισόπλευρο.

β) Γνωρίζουμε ότι η εστία Ε έχει συντεταγμένες $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, άρα είναι $E(1,0)$, αφού $2p = 4$, άρα $p = 2$. Η διευθετούσα έχει εξίσωση $(\delta): x = -\frac{p}{2} = -1$, άρα η τετμημένη του σημείου Γ θα είναι -1, δηλαδή $x_\Gamma = -1$. Αλλά $x_E = \frac{x_A + x_\Gamma}{2} \Leftrightarrow 1 = \frac{x_A + (-1)}{2}$, άρα $x_A = 3$.

Εναλλακτικά, θα είναι $B(-1, y_A)$, οπότε $AB = |x_A - (-1)| = |x_A + 1|$.

Ακόμα $BE = \sqrt{[1-(-1)]^2 + (0 - y_A)^2} = \sqrt{4 + {y_A}^2}$.

Όμως $AB^2 = BE^2 \Leftrightarrow (x_A + 1)^2 = 4 + {y_A}^2 \Leftrightarrow {x_A}^2 + 2x_A + 1 = 4 + 4x_A \Leftrightarrow$

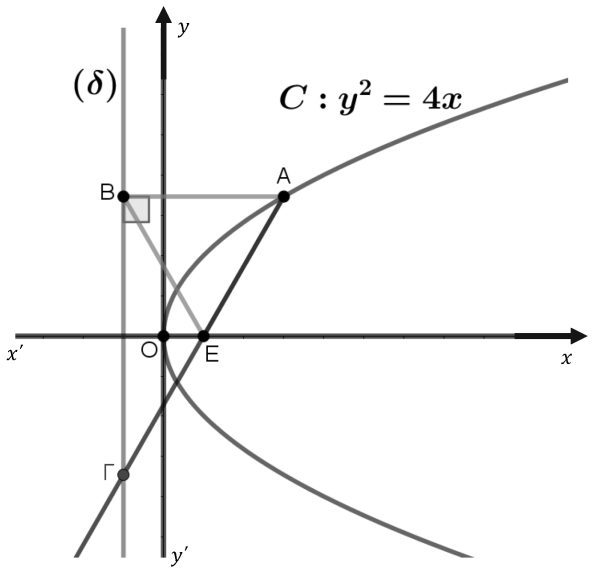
${x_A}^2 - 2x_A - 3 = 0$, εξίσωση που έχει ως ρίζες τους αριθμούς 3 και -1.

Ώστε $x_A = 3$, αφού $x_A > 0$.

Τότε ${y_A}^2 = 12$, άρα $y_A = 2\sqrt{3}$, αφού $y_A > 0$.

γ) Ζητάμε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ, το οποίο όμως είναι ορθογώνιο. Από το α) ερώτημα έχουμε ότι $EA = EB = E\Gamma$, άρα το Ε θα είναι το κέντρο του ζητούμενου κύκλου, ενώ η ακτίνα του θα είναι $AE = AB = |3 - (-1)| = 4$.

Έτσι, ο κύκλος έχει εξίσωση $(x-1)^2 + y^2 = 16$.



242 Θέμα 4 - 19047

α) Αν θεωρήσουμε ότι το σημείο A είναι η βάση του δεξιού πυλώνα πάνω στη γέφυρα, τότε $(OA) = 640$, οπότε το σημείο B έχει συντεταγμένες $B(640,160)$.

Η εξίσωση της παραβολής είναι στη μορφή $x^2 = 2py$.

Άρα ισχύει $640^2 = 2p \cdot 160$, έτσι $2p = \frac{640 \cdot 640}{160} = 4 \cdot 640 = 2560$.

Άρα το παραβολικό καλώδιο έχει εξίσωση $x^2 = 2560y$.

β) Η εστία έχει συντεταγμένες $E\left(0,\frac{p}{2}\right)$, δηλαδή $E\left(0,\frac{2560}{4}\right)$, άρα $E(0,640)$.

Η διευθετούσα έχει εξίσωση $(\delta): y = -\frac{p}{2} = -640$.

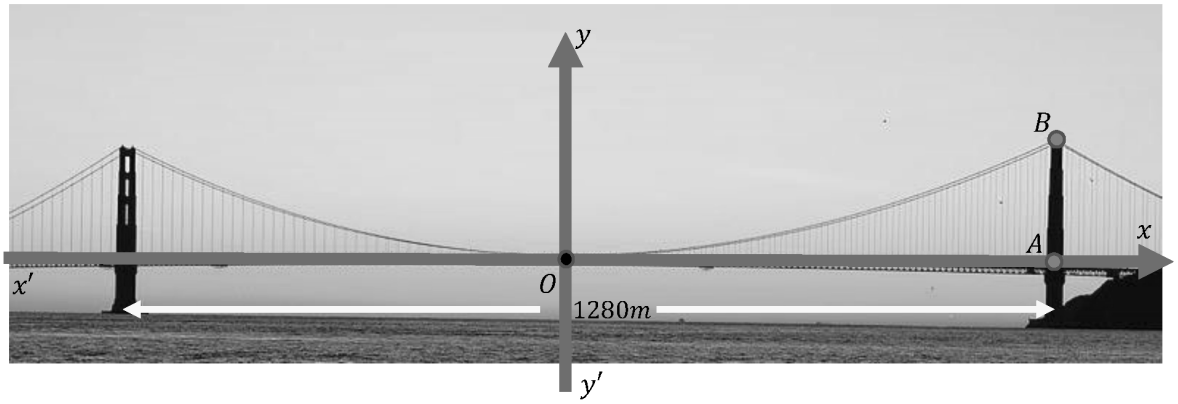
γ) Η εφαπτομένη έχει εξίσωση $(\varepsilon): x_1 x = p(y_1 + y)$, άρα $640x = 1280(160 + y)$.

Τελικά $(\varepsilon): y = \frac{1}{2}x - 160$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Delta(0,-160)$.

Ώστε $(E\Delta) = |640 - (-160)| = 800$.

Από τον ορισμό της παραβολής, η απόσταση του σημείου B της παραβολής από την εστία E ισούται με την απόσταση του B από την διευθετούσα (δ) η οποία έχει εξίσωση $y = -640$.

Έτσι, θα είναι $(EB) = |160 - (-640)| = 800$.



243 Θέμα 4 - 21653

α) Το σημείο $P(-2,\lambda)$ έχει σταθερή τετμημένη -2 και μεταβαλλόμενη τεταγμένη οπότε κινείται στην ευθεία $(\delta): x = -2$.

Σημείωση: Επειδή το πλοίο κινείται στο 1ο τεταρτημόριο είναι $\lambda > 0$, οπότε τελικά το $P(-2,\lambda)$ κινείται στο τμήμα ευθείας $(\delta): x = -2$ που είναι πάνω από το xx'.

β) Τα σημεία $P(-2,\lambda)$ και $\Pi(\kappa,\lambda)$ έχουν ίδια τεταγμένη οπότε $\Pi P // xx'$ και άρα $\Pi P \perp (\delta)$. Συνεπώς $(\Pi P) = d(\Pi,\delta)$.

γ) Αφού κάθε χρονική στιγμή ισχύει $(\Pi E) = (\Pi P) \Leftrightarrow (\Pi E) = d(\Pi,\delta)$ συμπεραίνουμε ότι το σημείο Π κινείται στην παραβολή C με εστία το σημείο Ε(2,0) και διευθετούσα την ευθεία (δ). Η παραβολή αυτή είναι της μορφής $y^2 = 2px$ με $\frac{p}{2} = 2 \Leftrightarrow p = 4$. Τελικά $C: y^2 = 8x$.

γ) Η ευθεία ΕΡ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{EP} = \frac{0-\lambda}{2+2} = -\frac{\lambda}{4}$ οπότε η μεσοκάθετός της (ε) θα έχει συντελεστή διεύθυνσης λ_ε και ισχύει

$\lambda_{EP}\cdot\lambda_{\varepsilon}=-1\Leftrightarrow\lambda_{\varepsilon}=\frac{4}{\lambda}$ (αφού $\lambda>0$). Το μέσο του EP είναι το $(\frac{-2+2}{2},\frac{\lambda+0}{2})$ δηλαδή το $(0,\frac{\lambda}{2})$.

Έτσι $(\varepsilon): y-\frac{\lambda}{2}=\frac{4}{\lambda}\cdot x\Leftrightarrow y=\frac{4}{\lambda}\cdot x+\frac{\lambda}{2}$.

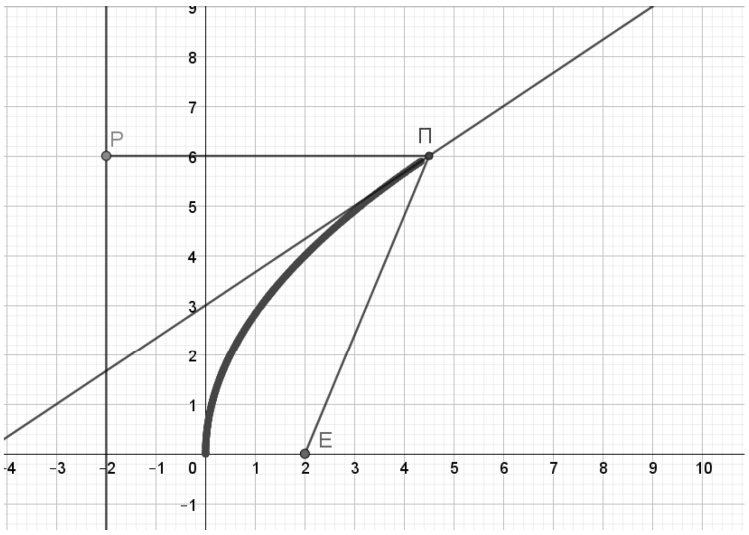
Η (ε) εφάπτεται της C αν και μόνο αν το σύστημά τους καταλήγει σε εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα 0. Πράγματι, με αντικατάσταση της $y=\frac{4}{\lambda}\cdot x+\frac{\lambda}{2}$ στην εξίσωση $y^2=8x$, έχουμε:

$$\left(\frac{4}{\lambda}\cdot x+\frac{\lambda}{2}\right)^2=8x\Leftrightarrow$$
$$\frac{16}{\lambda^2}x^2+4x+\frac{\lambda^2}{4}=8x\Leftrightarrow$$
$$\frac{16}{\lambda^2}x^2-4x+\frac{\lambda^2}{4}=0$$

που έχει διακρίνουσα $\Delta=(-4)^2-4\cdot\frac{16}{\lambda^2}\cdot\frac{\lambda^2}{4}=16-16=0$.

Το σημείο επαφής θα έχει τετμημένη $x=-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{-4}{2\cdot\frac{16}{\lambda^2}}=\frac{\lambda^2}{8}$ και τεταγμένη $y^2=8\cdot\frac{\lambda^2}{8}=\lambda^2$ και επειδή $\lambda>0$ έχουμε ότι $y=\lambda$. Συνεπώς το σημείο επαφής είναι το σημείο Π.

Σημείωση: Το συμπέρασμα του ερωτήματος γ) ισχύει για οποιαδήποτε παραβολή.



244 Θέμα 4 - 18870

α) Η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 2px$ έχει άξονα τον $x'x$, εστία το σημείο $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ και διευθετούσα την ευθεία $\delta: x = -\frac{p}{2}$.

Ως εκ τούτου, η $y^2 = 4x$, (με $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2$) έχει άξονα τον $x'x$, εστία το σημείο $E(1,0)$ και διευθετούσα την ευθεία δ: $x = -1$.

β) Η εφαπτομένη (ε) της παραβολής στο σημείο $A(4,4)$ έχει εξίσωση

$$yy_1 = p(x + x_1) \Leftrightarrow 4y = 2(x + 4) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 2.$$

Θέτοντας στη συνέχεια όπου $y = 0$, έχουμε ότι $\frac{1}{2}x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -4$.

Το σημείο B λοιπόν, στο οποίο η εφαπτομένη (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$ είναι το $B(-4, 0)$.

γ) Αν θ_3 είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\theta_3 = \theta_2$. Πραγματικά είναι:

Οι γωνίες θ_1 και θ_3 είναι ίσες ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ευθειών (ζ) και $x'x$. Από την εκφώνηση του προβλήματος είναι γνωστόν ότι $\theta_1 = \theta_2$. Επομένως $\theta_3 = \theta_2$ και ως εκ τούτου το τρίγωνο MAB είναι ισοσκελές.

δ) Η θέση του σημείου $M(x, 0)$ μπορεί να βρεθεί λύνοντας την εξίσωση:

$$(MA) = (MB) \Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2 + 16} = |x + 4| \Leftrightarrow (x-4)^2 + 16 = (x+4)^2 \Leftrightarrow x = 1$$

Άρα έχουμε $M(1,0)$.

Επομένως το ζητούμενο σημείο M ταυτίζεται με την εστία της παραβολής $E(1,0)$. Άρα η ανακλώμενη φωτεινή ακτίνα διέρχεται από την εστία της παραβολής.

245 Θέμα 4 - 18245

α) Η παραβολή C έχει εξίσωση της μορφής $y^2 = 2px$ όπου $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2$, οπότε η εστία της έχει συντεταγμένες $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ δηλαδή $\mathrm{E}(1,0)$ και διευθετούσα με εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$ δηλαδή $\delta: x = -1$.

β) Η (1) είναι της μορφής $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$ όπου $\mathrm{A} = \lambda^2 - 1, \mathrm{B} = 2\lambda, \Gamma = \lambda^2 + 1$.

Είναι $\mathrm{A} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$ και $\mathrm{B} = 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$. Επειδή δεν υπάρχει τιμή του λ για την οποία να μηδενίζονται ταυτόχρονα τα A και B, η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Επίσης $\Gamma = \lambda^2 + 1 > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οπότε δεν διέρχεται από το $\mathrm{O}(0,0)$.

γ) Για $\lambda \neq 0$ η (1) παριστάνει ευθεία που δεν είναι παράλληλη στον yy' και επομένως δεν μπορεί να είναι η διευθετούσα δ.

Για $\lambda = 0$ η (1) γίνεται $x = 1$ που δεν είναι η διευθετούσα δ.

Συνεπώς η διευθετούσα της παραβολής δεν ανήκει στην οικογένεια ευθειών ε_λ.

δ) Έστω $\mathrm{M}(\alpha,\beta)$ σημείο του επιπέδου το οποίο δεν ανήκει στη δ, δηλαδή $\alpha \neq -1$ και διέρχεται από αυτό μόνο μία ευθεία από την οικογένεια ευθειών ε_λ, δηλαδή οι συντεταγμένες του Μ επαληθεύουν την (1) για μία και μόνο τιμή του λ, συνεπώς ισχύει $\lambda^2\alpha - \alpha + 2\lambda\beta + \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)\lambda^2 + 2\lambda\beta + 1 - \alpha = 0$ για μία και μόνο τιμή του λ. Η εξίσωση $(\alpha+1)\lambda^2 + 2\lambda\beta + 1 - \alpha = 0$ είναι 2ου βαθμού ως προς λ, αφού $\alpha \neq -1$ και για να επαληθεύεται για μία μόνο τιμή του λ, πρέπει και αρκεί $\Delta = 0$.

Είναι $\Delta = 0 \Leftrightarrow (2\beta)^2 - 4(\alpha+1)(1-\alpha) = 0 \Leftrightarrow 4\beta^2 - 4 + 4\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 1$

που σημαίνει ότι το σημείο $\mathrm{M}(\alpha,\beta)$ ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο, χωρίς το σημείο $(-1,0)$, αφού $\alpha \neq -1$. Ο κύκλος αυτός έχει κέντρο το Ο(0,0) δηλαδή την κορυφή της παραβολής C και ακτίνα $\rho = 1$, οπότε διέρχεται από την εστία E, αφού $(\mathrm{OE}) = 1 = \rho$.

246 Θέμα 2 - 20865

α) Η εξίσωση της έλλειψης C με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma,0)$, $E(\gamma,0)$, μήκος μεγάλου άξονα 2α και μήκος μικρού άξονα 2β, είναι

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \text{ όπου } \beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$$

Η εξίσωση της έλλειψης C_1: $x^2 + 4y^2 = 4$ γίνεται ισοδύναμα $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Είναι λοιπόν:

$\alpha^2 = 4 \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} \alpha = 2$, $\beta^2 = 1 \overset{\beta>0}{\Longleftrightarrow} \beta = 1$ και $1 = \sqrt{4-\gamma^2} \Leftrightarrow \gamma^2 = 3 \overset{\gamma>0}{\Longleftrightarrow} \gamma = \sqrt{3}$.

Επομένως, είναι:

$$2\alpha = 4,\ 2\beta = 2,\ E'(-\sqrt{3},0),\ E(\sqrt{3},0).$$

Για την έλλειψη C_2: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ είναι αντίστοιχα:

$\alpha^2 = 16 \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} \alpha = 4$, $\beta^2 = 4 \overset{\beta>0}{\Longleftrightarrow} \beta = 2$ και $2 = \sqrt{16-\gamma^2} \Leftrightarrow \gamma^2 = 12 \overset{\gamma>0}{\Longleftrightarrow} \gamma = 2\sqrt{3}$.

Επομένως, είναι:

$$2\alpha = 8,\ 2\beta = 4,\ E'(-2\sqrt{3},0),\ E(2\sqrt{3},0).$$

β) Δύο ελλείψεις όταν έχουν την ίδια εκκεντρότητα ε λέγονται όμοιες, όπου $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$.

Η έλλειψη C_1 έχει εκκεντρότητα $\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Η έλλειψη C_2 έχει εκκεντρότητα $\varepsilon_2 = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Επομένως, ο ισχυρισμός είναι αληθής.

247 Θέμα 2 - 20658

α) Η εξίσωση της έλλειψης (c) είναι της μορφής $\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1$.

Έτσι είναι $\alpha^2=16 \Leftrightarrow \alpha=4$ και $\beta^2=4 \Leftrightarrow \beta=2$.

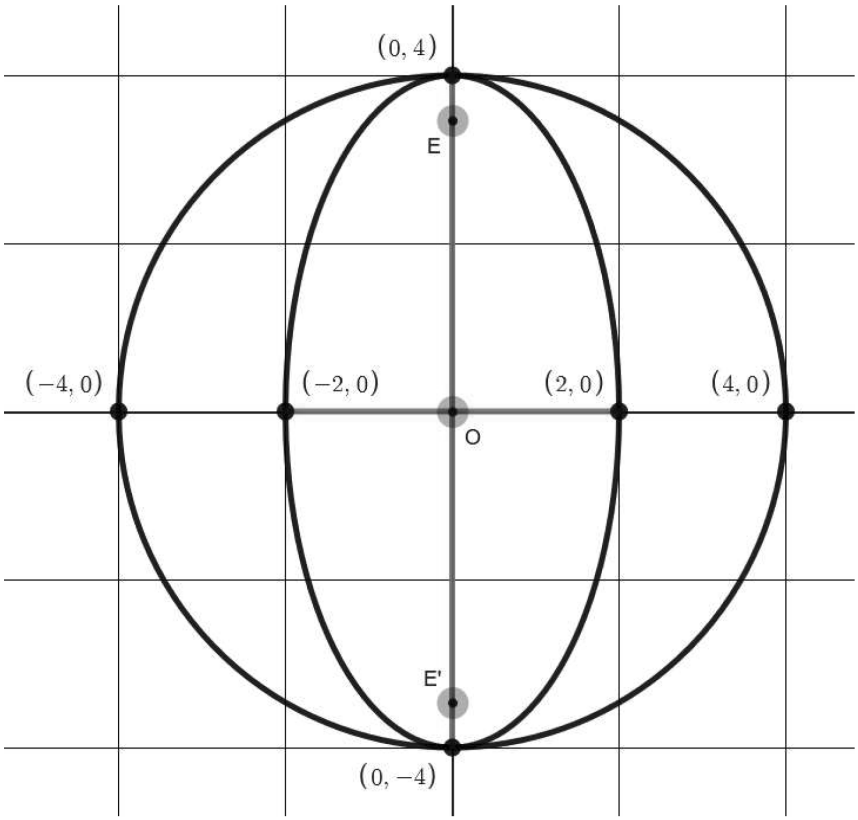
Ακόμη είναι $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2} \Leftrightarrow 2=\sqrt{4^2-\gamma^2} \Leftrightarrow 4=16-\gamma^2 \Leftrightarrow \gamma^2=12 \Leftrightarrow \gamma=2\sqrt{3}$.

β) Για τα μήκη των αξόνων έχουμε:

- μήκος μεγάλου άξονα ίσο με $2\alpha=2\cdot 4=8$,
- μήκος μικρού άξονα ίσο με $2\beta=2\cdot 2=4$.

Οι εστίες είναι τα σημεία $\mathrm{E}'(0,-\gamma)$, $\mathrm{E}(0,\gamma)$, δηλαδή τα $\mathrm{E}'\left(0,-2\sqrt{3}\right),\mathrm{E}\left(0,2\sqrt{3}\right)$.

γ) Ο κύκλος $x^2+y^2=16$ έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με $\sqrt{16}=4$.



248 Θέμα 2 - 21648

α) Η έλλειψη C έχει εστίες τα σημεία $\mathrm{E}(3,0),\mathrm{E}'(-3,0)$ οπότε έχει εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και $\gamma=3$. Από τον ορισμό της έλλειψης γνωρίζουμε ότι $(\mathrm{ME})+(\mathrm{ME}')=2\alpha$. Είναι

$$(\mathrm{ME})+(\mathrm{ME}')=\sqrt{(4-3)^2+(\frac{12}{5}-0)^2}+\sqrt{(4+3)^2+(\frac{12}{5}-0)^2}=$$

$$\sqrt{1+\frac{144}{25}}+\sqrt{49+\frac{144}{25}}=\sqrt{\frac{169}{25}}+\sqrt{\frac{1369}{25}}=\frac{13}{5}+\frac{37}{5}=\frac{50}{5}=10 \quad .$$

Συνεπώς $2\alpha = 10 \Leftrightarrow \alpha = 5$.

β) Από τη σχέση $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ έχουμε ότι

$5^2 = \beta^2 + 3^2 \Leftrightarrow \beta^2 = 16 \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta = 4$. Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

γ) Η εφαπτόμενη στο $M(4, \frac{12}{5})$ έχει εξίσωση $\frac{4 \cdot x}{25} + \frac{\frac{12}{5} \cdot y}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{4 \cdot x}{25} + \frac{4y}{15} = 1$.

249 Θέμα 2 - 21647

α) Η έλλειψη C έχει εστίες τα σημεία $E(4,0), E'(-4,0)$ οπότε έχει εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $\gamma = 4$. Αφού έχει μεγάλο άξονα 10 συμπεραίνουμε ότι $2\alpha = 10 \Leftrightarrow \alpha = 5$. Από τη σχέση $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ έχουμε ότι

$5^2 = \beta^2 + 4^2 \Leftrightarrow \beta^2 = 9 \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta = 3$. Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

β) Η εκκεντρότητα είναι $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{4}{5}$.

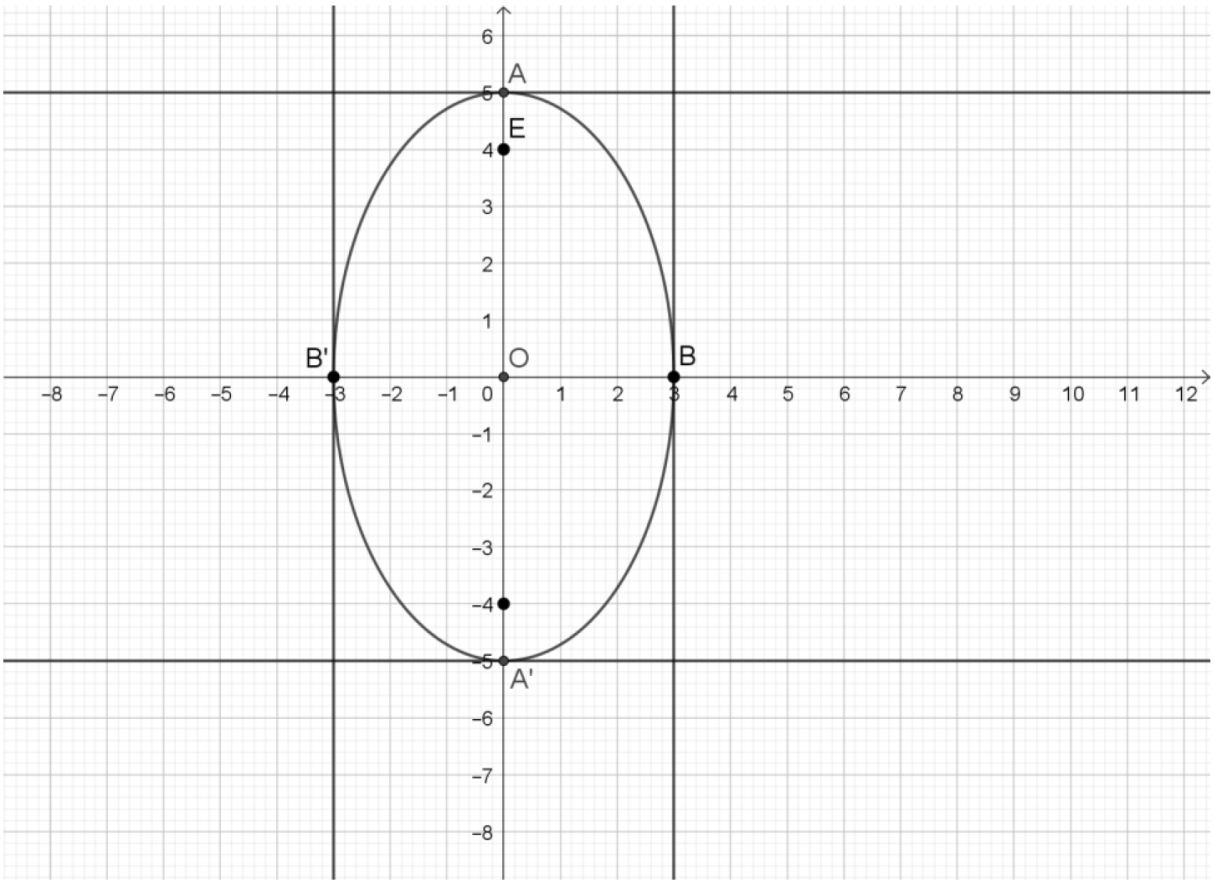
γ) Η εφαπτόμενη στο $M(4, \frac{9}{5})$ έχει εξίσωση $\frac{4 \cdot x}{25} + \frac{\frac{9}{5} \cdot y}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{4 \cdot x}{25} + \frac{y}{5} = 1$.

250 Θέμα 2 - 20718

α) Είναι $\alpha^2 = 25$ και $\beta^2 = 9$ οπότε $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 25 - 9 = 16$ και άρα $\gamma = 4$. Οι ζητούμενες εστίες είναι τα σημεία $E(0,4)$ και $E'(0,-4)$.

β) Η έλλειψη C έχει κορυφές τα σημεία $A(0,5)$, $A'(0,-5)$, $B(3,0)$, $B'(-3,0)$ και φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

γ) Οι εφαπτόμενες στα άκρα των δύο αξόνων της, δηλαδή στα σημεία $A(0,5)$, $A'(0,-5)$, $B(3,0)$, $B'(-3,0)$ έχουν εξισώσεις $y = 5$, $y = -5$, $x = 3$, $x = -3$ και φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



251 Θέμα 4 - 20666

α) Από την εκφώνηση προκύπτει ότι $(PH) = 147{,}5$ και $(PE) = 152{,}5$ εκατομμύρια Km.

Αλλά, η εξίσωση της έλλειψης είναι στη μορφή $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$ και γνωρίζουμε ότι $(PH) = \alpha - \gamma$, ενώ $(PE) = \alpha + \gamma$.

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε $2\alpha = (PA) = 300$ εκατομμύρια Km, ενώ αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε $2\gamma = (HE) = 5$ εκατομμύρια Km.

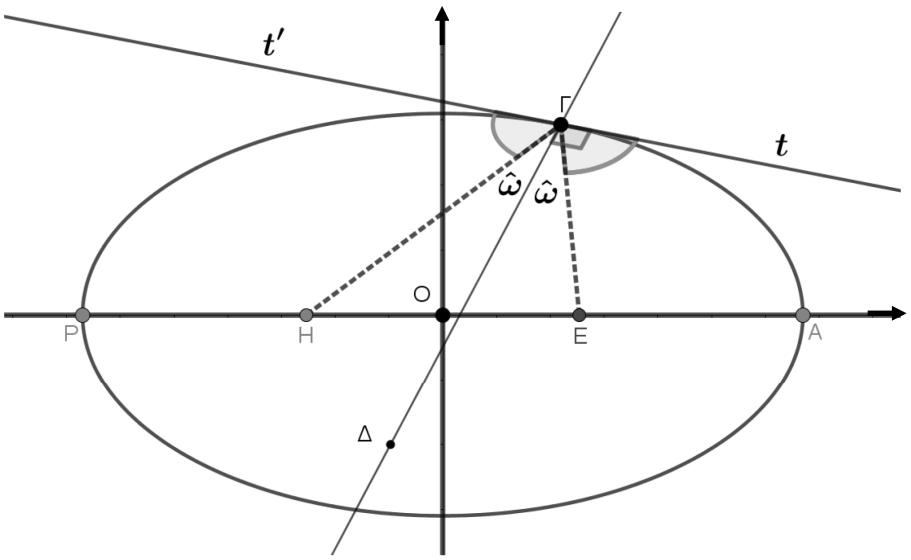
Όμως $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{2\gamma}{2\alpha} = \frac{5}{300} = \frac{1}{60}$.

β) Από τον ορισμό της έλλειψης, κάθε σημείο της έχει σταθερό άθροισμα αποστάσεων από τις εστίες ίσο με 2α, δηλαδή $(\Gamma H) + (\Gamma E) = 2\alpha = 300$.

Αλλά $(HE) = 2\gamma = 5$. Ώστε η περίμετρος του μεταβλητού τριγώνου ΓHE είναι σταθερή και ίση με 305 εκατομμύρια Km.

γ) Σύμφωνα με την ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης, η κάθετη ευθεία $\Delta\Gamma$ στην $t't$ στο σημείο Γ διχοτομεί την γωνία $H\hat{\Gamma}E$, άρα έχουμε $H\hat{\Gamma}\Delta = \Delta\hat{\Gamma}E = \hat{\omega}$.

Ώστε $t'\hat{\Gamma}H = t\hat{\Gamma}E = 90^0 - \omega$.



252 Θέμα 4 - 20722

α) Το άθροισμα των αποστάσεων του σημείου K από τα σημεία Ε(3,0) και Ε΄(-3,0) είναι ίσο με 10. Επίσης $(EE')=6<10$. Συνεπώς το K κινείται στην έλλειψη C με εστίες τα σημεία Ε και Ε΄ και σταθερό άθροισμα $2\alpha=10$.Είναι $2\alpha=10\Leftrightarrow\alpha=5$ και $\gamma=3$ οπότε $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2=25-9=16$ και άρα $\beta=4$.Η εξίσωση της C είναι η $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

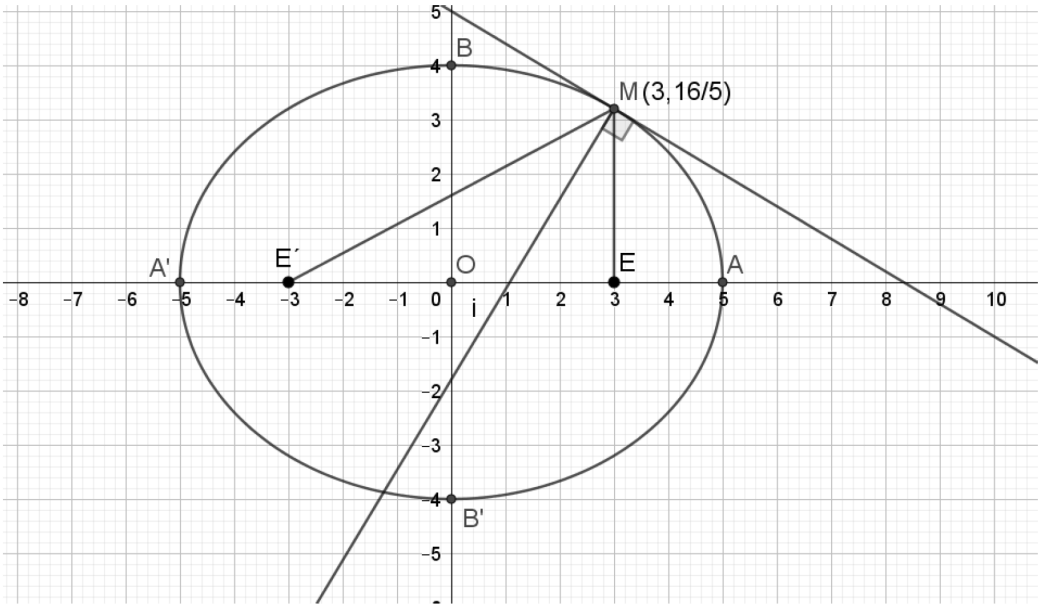
β) Αρκεί να δείξουμε ότι το σύστημα $\begin{cases}\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1\\ 3x+5y=25\end{cases}$ έχει μοναδική λύση. Από τη 2η εξίσωση έχουμε ότι $y=\frac{25-3x}{5}$ και με αντικατάσταση στην 1η εξίσωση έχουμε

$$\frac{x^2}{25}+\frac{\left(\frac{25-3x}{5}\right)^2}{16}=1\Leftrightarrow$$
$$\frac{x^2}{25}+\frac{625-150x+9x^2}{25\cdot16}=1\Leftrightarrow$$
$$16x^2+625-150x+9x^2=400\Leftrightarrow$$
$$25x^2-150x+225=0\Leftrightarrow$$
$$x^2-6x+9=0\Leftrightarrow$$
$$(x-3)^2=0\Leftrightarrow$$
$$x=3$$

Για $x=3$ είναι $y=\frac{25-3\cdot3}{5}=\frac{16}{5}$, που σημαίνει ότι C και (ε) έχουν ένα μόνο κοινό σημείο $M(3,\frac{16}{5})$.

γ) Το ότι η ευθεία ε και η έλλειψη C έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το M, γραφικά σημαίνει ότι η ευθεία ε εφάπτεται της έλλειψης C στο σημείο M.

Η έλλειψη C έχει κορυφές τα σημεία $\mathrm{A}(5,0)$, $\mathrm{A}'(-5,0)$, $\mathrm{B}(0,4)$, $\mathrm{B}'(0,-4)$ και φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, όπως και η εφαπτομένη της (ε), που εκτός από το M διέρχεται και από το (0,5).



δ) Από την ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης γνωρίζουμε ότι η διχοτόμος (δ) της γωνίας $\mathrm{E\hat{M}E'}$, είναι η κάθετη της εφαπτομένης στο σημείο M, όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα. Συνεπώς αναζητούμε την κάθετη στην (ε) που διέρχεται από το σημείο M. Η ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = -\frac{3}{5}$, οπότε αφού $(\delta)\perp(\varepsilon)$, είναι $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\delta = -1 \Leftrightarrow -\frac{3}{5}\cdot\lambda_\delta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\delta = \frac{5}{3}$. Τελικά η ζητούμενη διχοτόμος (δ) έχει εξίσωση $(\delta): y - y_{\mathrm{M}} = \lambda_\delta \cdot (x - x_{\mathrm{M}}) \Leftrightarrow y - \frac{16}{5} = \frac{5}{3}\cdot(x-3)$.

253 Θέμα 4 - 21655

α) Έστω ότι $\mathrm{E}(\gamma,0), \mathrm{E}'(-\gamma,0)$ και $\mathrm{B}(0,\beta), \mathrm{B}'(0,-\beta)$, όπου $\beta>0, \gamma>0$.

Αφού το τετράπλευρο $\mathrm{BEB'E'}$ είναι τετράγωνο, θα έχει ίσες διαγώνιους, δηλαδή $\mathrm{OB}=\mathrm{OE}$ και άρα $\beta=\gamma$. Γνωρίζουμε επίσης ότι $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$, οπότε αφού $\alpha=5$ και $\beta=\gamma$ έχουμε ότι $5^2=\beta^2+\beta^2 \Leftrightarrow 25=2\beta^2 \Leftrightarrow \beta^2=\frac{25}{2} \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta=\frac{5}{\sqrt{2}}$.

Συνεπώς $\mathrm{E}(\frac{5}{\sqrt{2}},0), \mathrm{E}'(-\frac{5}{\sqrt{2}},0), \mathrm{B}(0,\frac{5}{\sqrt{2}}), \mathrm{B}'(0,-\frac{5}{\sqrt{2}})$.

β) Η έλλειψη έχει κέντρο το $O(0,0)$ και εστίες στον άξονα xx' οπότε θα έχει εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Έχουμε όμως ότι $\alpha=5$ και $\beta=\frac{5}{\sqrt{2}}$, οπότε η ζητούμενη εξίσωση είναι η $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\frac{25}{2}}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{2y^2}{25}=1$.

γ) Από τον ορισμό της έλλειψης γνωρίζουμε ότι για κάθε σημείο M της C είναι $(ME)+(ME')=2\alpha=10$.

i. Η περίμετρος του τριγώνου EME' για κάθε σημείο M της C που δεν ταυτίζεται με κάποιο από τα A, A' είναι ίση με

$(ME)+(ME')+(EE')=10+\frac{10}{\sqrt{2}}$.

ii.Το τρίγωνο EME' για κάθε σημείο M της C που δεν ταυτίζεται με κάποιο από τα A, A' έχει σταθερή βάση την $(EE')=\frac{10}{\sqrt{2}}$ και παίρνει τη μέγιστη τιμή του, όταν το ύψος από την κορυφή M πάρει τη μέγιστη τιμή του. Αυτό συμβαίνει μόνο όταν το σημείο M ταυτιστεί με ένα εκ των $B(0,\frac{5}{\sqrt{2}}), B'(0,-\frac{5}{\sqrt{2}})$, όπου η μέγιστη τιμή του ύψους είναι $\frac{5}{\sqrt{2}}$ και η μέγιστη τιμή του εμβαδού του τριγώνου EME' είναι αντίστοιχα $\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{\sqrt{2}}\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{25}{2}$.

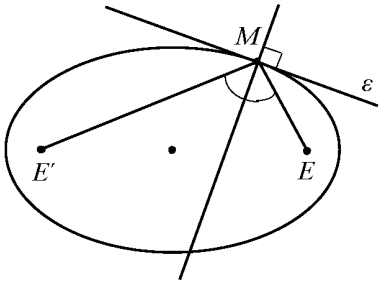
254 Θέμα 4 – 20726

α) Το μήκος του σχοινιού εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου της έλλειψης από τις εστίες. Συνεπώς το άθροισμα αυτό είναι 10 μονάδες μήκους, που είναι και το μήκος του μεγάλου άξονα. Είναι $2\alpha=10 \Leftrightarrow \alpha=5$ και $\gamma=3$, οπότε $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$. Συνεπώς το μήκος του μικρού άξονα είναι 8 μονάδες μήκους.

β) Η έλλειψη έχει εστίες στον άξονα xx' και η εξίσωσή της είναι $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

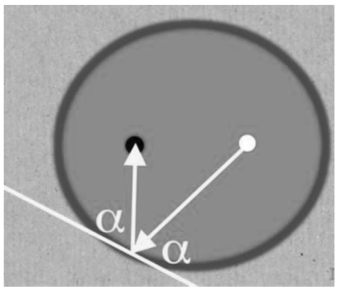
Η εκκεντρότητά της είναι $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{3}{5}$.

γ) Από την ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης γνωρίζουμε ότι : Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας έλλειψης στο σημείο επαφής Μ διχοτομεί τη γωνία $E'\hat{M}E$, όπου E, E' οι εστίες της έλλειψης (όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα).



Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή ένα ηχητικό κύμα ή μια φωτεινή ακτίνα που ξεκινούν από τη μία εστία μιας έλλειψης, ανακλώμενα σε αυτήν, διέρχονται από την άλλη εστία. Συνεπώς σε οποιοδήποτε σημείο της C και αν σημαδέψει θα πετύχει το στόχο του, εκτός από το ένα άκρο του μεγάλου άξονα, αφού τότε η μπάλα θα πέσει στην τρύπα χωρίς να χτυπήσει πρώτα στο περίγραμμα του μπιλιάρδου.

Σωστή απάντηση η 4).



255 Θέμα 2 - 21218

α) Για την υπερβολή C_1 ισχύει ότι έχει εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\alpha=\beta=1$.

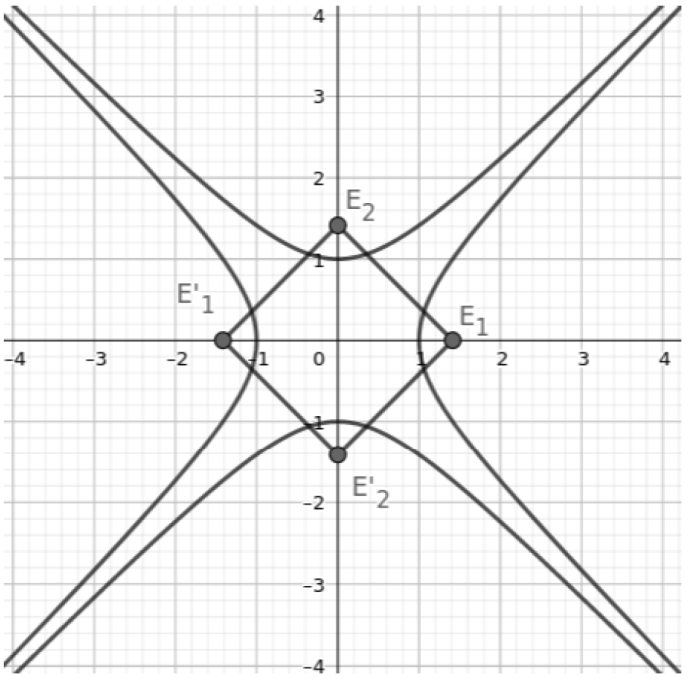
Αν $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2=1^2+1^2=2$, άρα $\gamma=\sqrt{2}>0$, αφού $\gamma>\alpha=1$,

τότε οι εστίες της θα έχουν συντεταγμένες τις $E_1(\gamma,0)$, $E'_1(-\gamma,0)\Rightarrow E_1(\sqrt{2},0)$, $E'_1(-\sqrt{2},0)$.

β) Η υπερβολή C_2 είναι ίδια με τη C_1 με τις εστίες της να βρίσκονται στον άξονα $y'y$.

Δηλαδή θα ισχύει ότι : $E_2(0,\gamma), E'_2(0,-\gamma)\Rightarrow E_2(0,\sqrt{2}), E'_2(0,-\sqrt{2})$.

Συνεπώς τα σημεία E_1,E_2,E'_1,E'_2, θα ισαπέχουν από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και βρίσκονται πάνω σε αυτούς, οπότε οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου $E_1E_2E'_1E'_2$ είναι ίσες , διχοτομούνται και τέμνονται κάθετα, άρα αυτό είναι τετράγωνο.



256 Θέμα 2 – 20869

α) Η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, με $\beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}$, έχει εστίες τις $E'(-\gamma,0)$, $E(\gamma,0)$ και ασύμπτωτες τις ευθείες $\varepsilon_1: y=\frac{\beta}{\alpha}x$, $\varepsilon_2: y=-\frac{\beta}{\alpha}x$.

Η υπερβολή $C: x^2-y^2=1$ είναι ισοσκελής, με $\alpha=\beta=1$.

Επιπλέον $\beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}\Leftrightarrow 1=\sqrt{\gamma^2-1}\Leftrightarrow \gamma^2=2\overset{\gamma>0}{\Leftrightarrow}\gamma=\sqrt{2}$.

Επομένως, οι εστίες της C είναι τα σημεία $E'(-\sqrt{2},0)$, $E(\sqrt{2},0)$ και ασύμπτωτες, οι ευθείες $\varepsilon_1: y=x$, $\varepsilon_2: y=-x$.

β)

i. Η εφαπτομένη της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ είναι η ευθεία $\frac{x\cdot x_1}{\alpha^2}-\frac{y\cdot y_1}{\beta^2}=1$.

   Η εφαπτομένη της C στο σημείο $A(1,0)$ είναι η $\zeta: x\cdot 1-y\cdot 0=1\Leftrightarrow x=1$.

ii. Το σημείο Γ προκύπτει από την επίλυση του συστήματος (Σ): $\begin{cases}\varepsilon_1: y=x\\ \zeta: x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\ x=1\end{cases}$.

   Επομένως $\Gamma(1,1)$.

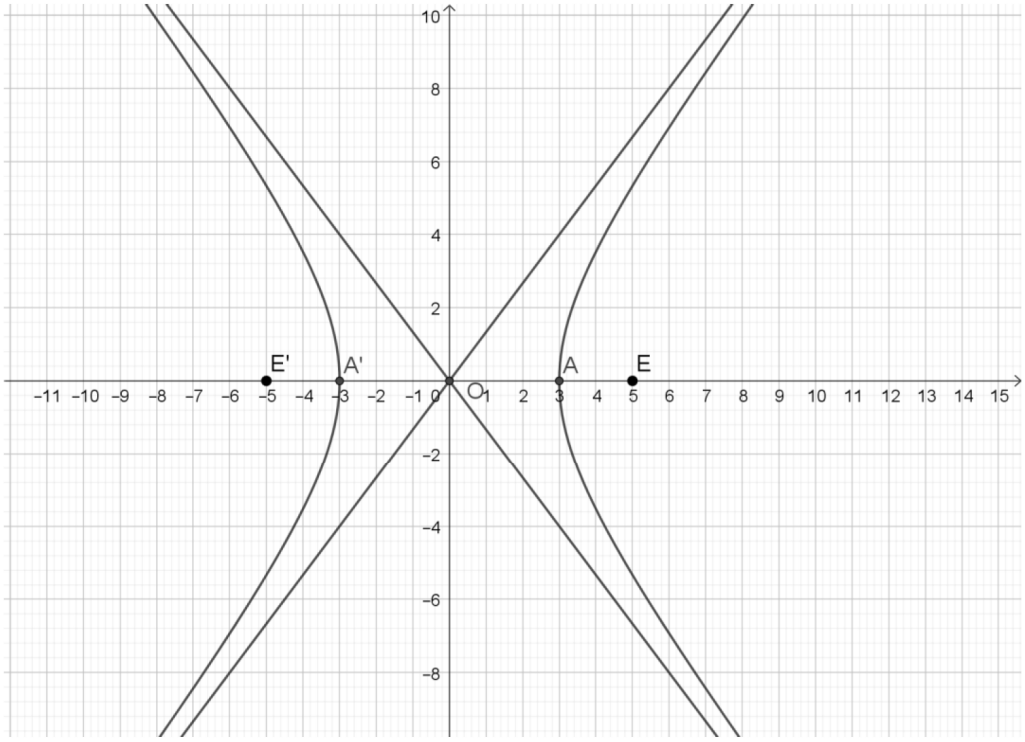
257 Θέμα 2 - 20721

α) Είναι $\alpha^2=9$ και $\beta^2=16$ οπότε $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2=9+16=25$ και άρα $\gamma=5$. Οι ζητούμενες εστίες είναι τα σημεία $E(5,0)$ και $E'(-5,0)$.

β) Οι ζητούμενες ασύμπτωτες έχουν εξισώσεις $y=\frac{\beta}{\alpha}x$, $y=-\frac{\beta}{\alpha}x$ δηλαδή

$y=\frac{4}{3}x$, $y=-\frac{4}{3}x$.

γ) Η υπερβολή C έχει κορυφές τα σημεία $A(3,0)$ και $A'(-3,0)$ και φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, όπως και οι ασύμπτωτές της.



258 Θέμα 2 - 21651

α) Η C έχει εστίες τα σημεία $E(5,0), E'(-5,0)$ οπότε έχει εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και $\gamma=5$. Αφού διέρχεται από το σημείο $A(4,0)$ έχουμε ότι $\frac{4^2}{\alpha^2}-\frac{0^2}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow \frac{16}{\alpha^2}=1 \Leftrightarrow \alpha^2=16$ και επειδή $\alpha>0$ έχουμε τελικά ότι $\alpha=4$.

Συνεπώς έχει εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{5}{4}$.

β) Από τη σχέση $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$ έχουμε ότι $5^2=4^2+\beta^2 \Leftrightarrow \beta^2=9$ και επειδή $\beta>0$ έχουμε $\beta=3$.

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

γ) Η εφαπτόμενη στο $M(5,\frac{9}{4})$ έχει εξίσωση $\frac{5\cdot x}{16}-\frac{\frac{9}{4}\cdot y}{9}=1 \Leftrightarrow \frac{5x}{16}-\frac{y}{4}=1$.

259 Θέμα 2 - 22051

α) Γενικά, οι εξισώσεις των ασύμπτωτων ευθειών της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ και $y=-\frac{\beta}{\alpha}x$.

Εδώ είναι $\alpha = \beta = 1$.

Οπότε, οι ασύμπτωτες ευθείες ε_1 και ε_2 της δοθείσας υπερβολής είναι $\varepsilon_1: y = x$ και $\varepsilon_2: y = -x$

β) Από το α) ερώτημα έχουμε ότι οι ασύμπτωτες ευθείες ε_1 και ε_2 της δοθείσας υπερβολής είναι $\varepsilon_1: y = x$ και $\varepsilon_2: y = -x$ και συνεπώς οι αντίστοιχες κλίσεις είναι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$. Άρα, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$. Επομένως, $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

260 Θέμα 2 - 21649

α) Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $E(5,0), E'(-5,0)$ οπότε έχει εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $\gamma = 5$. Αφού έχει εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$ συμπεραίνουμε ότι $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{5}{\alpha} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \alpha = 4$. Από τη σχέση $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ έχουμε ότι

$5^2 = 4^2 + \beta^2 \Leftrightarrow \beta^2 = 9 \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta = 3$. Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

β) Οι εξισώσεις των ασύμπτωτων της C είναι $y = \frac{\beta}{\alpha}x \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x$ και $y = -\frac{\beta}{\alpha}x \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x$.

γ) Η εφαπτόμενη στο $M(5, \frac{9}{4})$ έχει εξίσωση $\frac{5 \cdot x}{25} - \frac{\frac{9}{4} \cdot y}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{5} - \frac{y}{4} = 1$.

261 Θέμα 2 - 22566

α) Η υπερβολή γράφεται

$$4x^2 - y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1,$$

άρα η υπερβολή είναι της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με εστίες και κορυφές στον άξονα $x'x$,και

έχει $\alpha^2 = 1$ άρα $\alpha = \pm 1$

επομένως οι συντεταγμένες της κορυφής της υπερβολής είναι τα σημεία Α(α,0) και Α΄(-α,0) δηλαδή

$$A(1,0) \text{ και } A'(-1,0)$$

β) Σύμφωνα με τον μνημονικό κανόνα για τον υπολογισμό των ασύμπτωτων τις υπερβολής, παραγοντοποιούμε το πρώτο μέλος της εξίσωσής της και εξισώνουμε κάθε παράγοντα με το μηδέν. Έχουμε $4x^2 - y^2 = (2x - y)(2x + y)$, άρα οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι:

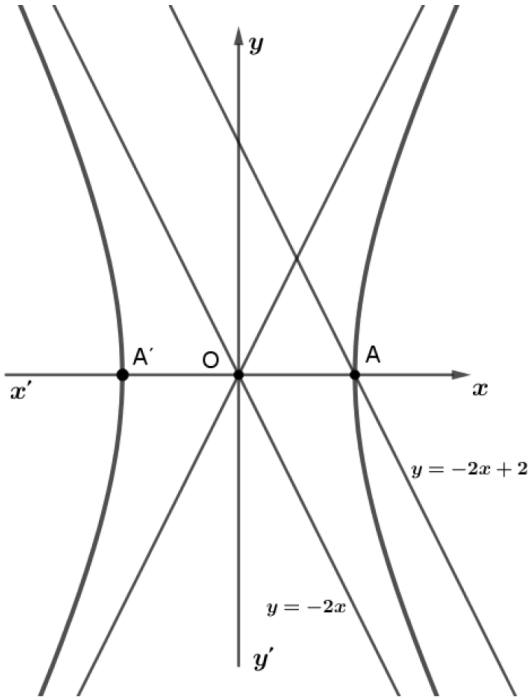
$$2x - y = 0 \quad \text{και} \quad 2x + y = 0$$

δηλαδή

$$y = 2x \quad \text{και} \quad y = -2x$$

γ) Η ευθεία που είναι παράλληλη της ασύμπτωτης y = -2x , και διέρχεται από το A(1,0) έχει συντελεστή διεύθυνσης λ = - 2, άρα έχει εξίσωση

$$y - 0 = -2(x - 1) \Leftrightarrow y = -2x + 2$$



262 Θέμα 2 - 17942

α) Η εξίσωση (C) ανήκει σε υπερβολή, διότι είναι της μορφής $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\alpha=2,\beta=3$.

Οι εστίες της έχουν συντεταγμένες $E(\gamma,0),E'(-\gamma,0)$

όπου $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2 \Leftrightarrow \gamma^2=\alpha^2+\beta^2=4+9=13$. Οπότε $E(\sqrt{13},0),E'(-\sqrt{13},0)$.

β) Για $x=1, y=2022$ η εξίσωση (C) γίνεται:

$\frac{1^2}{4}-\frac{2022^2}{9}=36 \Leftrightarrow 9-4\cdot 2022^2=36^2 \Leftrightarrow 4\cdot 2022^2=9-36^2<0$, η οποία δεν μπορεί να ισχύει.

Άρα το σημείο Μ δεν μπορεί να ανήκει στην υπερβολή.

Γενικότερα, είναι γνωστό ότι για μία υπερβολή με εξίσωση $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ ισχύει ότι $x\le -a$ ή $x\ge a$.

263 Θέμα 4 - 32206

α) Η C έχει εστίες τα σημεία $\mathrm{E}(5,0), \mathrm{E}'(-5,0)$ οπότε έχει εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και $\gamma=5$. Από τον ορισμό της υπερβολής γνωρίζουμε ότι $|(\mathrm{ME})-(\mathrm{ME}')|=2\alpha$. Είναι

$$(\mathrm{ME})-(\mathrm{ME}')=\sqrt{(5-5)^2+(\frac{9}{4}-0)^2}-\sqrt{(5+5)^2+(\frac{9}{4}-0)^2}=$$

$$\sqrt{\frac{81}{16}}-\sqrt{100+\frac{81}{16}}=\frac{9}{4}-\sqrt{\frac{1681}{16}}=\frac{9}{4}-\frac{41}{4}=-\frac{32}{4}=-8$$

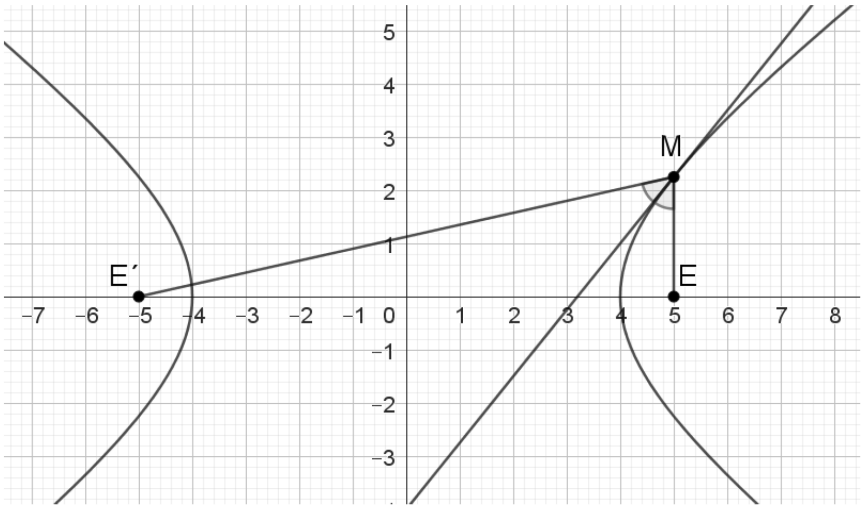
Συνεπώς $2\alpha=|-8|\Leftrightarrow\alpha=4$ οπότε έχει εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{5}{4}$.

β) Από τη σχέση $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$ έχουμε ότι $5^2=4^2+\beta^2\Leftrightarrow\beta^2=9\overset{\beta>0}{\Leftrightarrow}\beta=3$.

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση της C είναι η $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

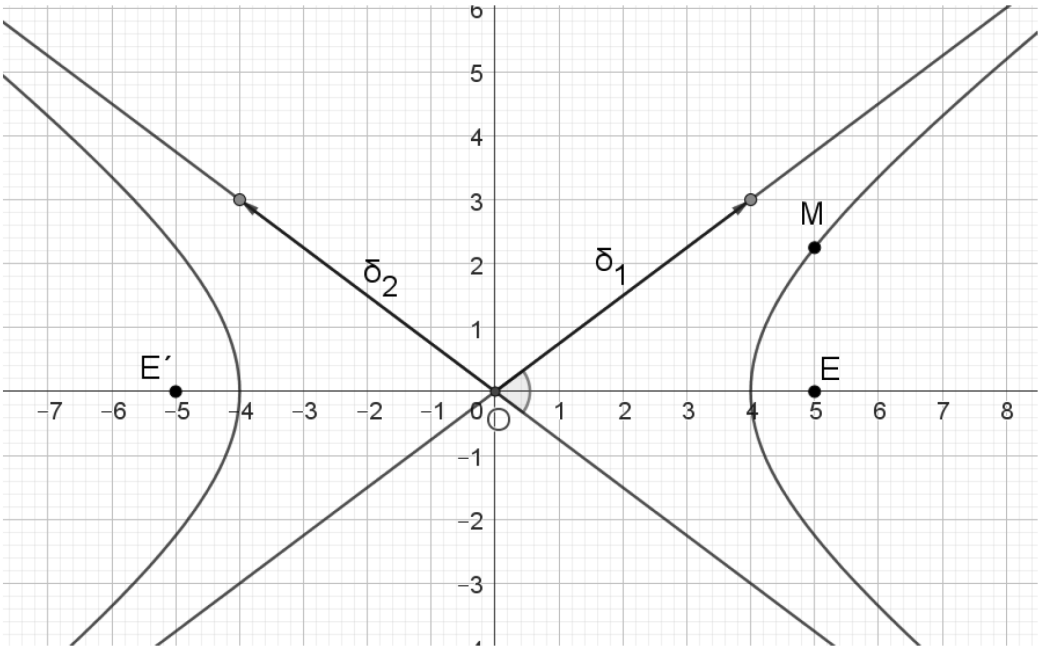
γ) Η διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{E\hat{M}E'}$ είναι η εφαπτόμενη στο $\mathrm{M}(5,\frac{9}{4})$ που έχει εξίσωση

$$\frac{5\cdot x}{16}-\frac{\frac{9}{4}\cdot y}{9}=1\Leftrightarrow\frac{5x}{16}-\frac{y}{4}=1.$$



δ) Οι ασύμπτωτες της C έχουν εξισώσεις $\varepsilon_1: y=\frac{3}{4}x\Leftrightarrow 3x-4y=0$ και $\varepsilon_2: y=-\frac{3}{4}x\Leftrightarrow 3x+4y=0$. Τα διανύσματα $\vec{\delta}_1:(4,3)$ και $\vec{\delta}_2:(-4,3)$ είναι παράλληλα στις ευθείες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα.

Είναι $\sigma\upsilon\nu(\vec{\delta}_1,\vec{\delta}_2)=\dfrac{\vec{\delta}_1\cdot\vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1|\cdot|\vec{\delta}_2|}=\dfrac{-4\cdot 4+3\cdot 3}{\sqrt{(-4)^2+3^2}\cdot\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{-16+9}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{25}}=\dfrac{-7}{25}$ οπότε το συνημίτονο της οξείας γωνίας που σχηματίζουν οι ασύμπτωτές της C είναι $\dfrac{7}{25}$.



264 Θέμα 4 - 21656

α) Η υπερβολή C έχει κέντρο το $(0,0)$ και εστίες στον άξονα xx', οπότε θα έχει ασύμπτωτες της μορφής $y=\dfrac{\beta}{\alpha}x$, $y=-\dfrac{\beta}{\alpha}x$ και εξίσωση της μορφής $\dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$.

Αφού οι εστίες είναι $\mathrm{E}(5,0),\mathrm{E}'(-5,0)$ συμπεραίνουμε ότι $\gamma=5$ και αφού οι κορυφές της είναι τα σημεία $\mathrm{A}(4,0),\mathrm{A}'(-4,0)$ συμπεραίνουμε ότι $\alpha=4$. Επομένως από τη σχέση $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$ έχουμε ότι $5^2=4^2+\beta^2\Leftrightarrow\beta^2=9\overset{\beta>0}{\Leftrightarrow}\beta=3$. Τελικά

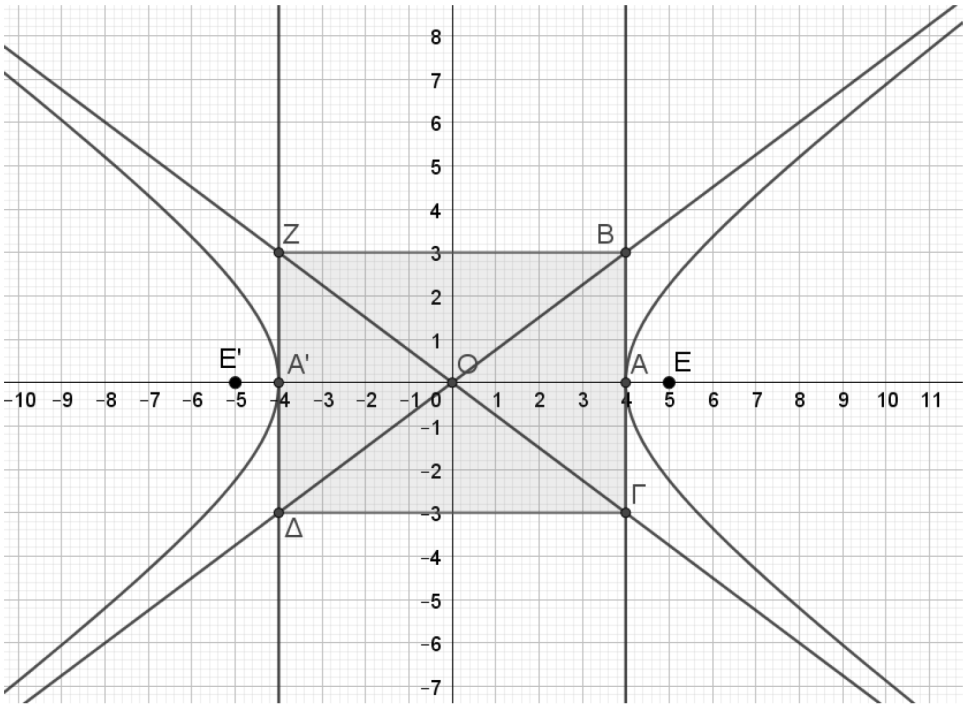
i. οι εξισώσεις των ασυμπτώτων της υπερβολής C είναι $y=\dfrac{3}{4}x$, $y=-\dfrac{3}{4}x$

ii. η εξίσωση της υπερβολής C είναι $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$.

β) Οι κορυφές του ορθογωνίου βάσης είναι τα σημεία τομής των ασυμπτώτων της C με τις εφαπτόμενες της C στις κορυφές της, δηλαδή τα σημεία τομής των ευθειών $y=\dfrac{3}{4}x$, $y=-\dfrac{3}{4}x$ με τις ευθείες $x=4$, $x=-4$.

Τα σημεία αυτά είναι τα $\mathrm{B}(4,3),\Gamma(4,-3),\Delta(-4,-3),\mathrm{Z}(-4,3)$, ενώ οι ασύμπτωτες της C είναι οι διαγώνιες του ορθογωνίου βάσης.

Η υπερβολή C, οι ασύμπτωτες της C και το ορθογώνιο βάσης της C, φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



γ) Από τον ορισμό της υπερβολής γνωρίζουμε ότι για κάθε σημείο M της C είναι $|(\mathrm{ME})-(\mathrm{ME}')|=2\alpha$, οπότε $(\mathrm{ME})-(\mathrm{ME}')=8$ (αν το M ανήκει στον κλάδο της C που είναι πιο κοντά στην εστία E') ή $(\mathrm{ME})-(\mathrm{ME}')=-8$ (αν το M ανήκει στον κλάδο της C που είναι πιο κοντά στην εστία E).

δ) Από την ανακλαστική ιδιότητα της υπερβολής, γνωρίζουμε ότι για κάθε σημείο της M, η διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{E\hat{M}E}'$ είναι η εφαπτομένη της στο M. Συνεπώς η ζητούμενη διχοτόμος είναι η εφαπτομένη της C στο $\mathrm{M}(\sqrt{80},6)$, δηλαδή η ευθεία με εξίσωση $\dfrac{\sqrt{80}\cdot x}{16}-\dfrac{6y}{9}=1$.

265 Θέμα 4 – 20653

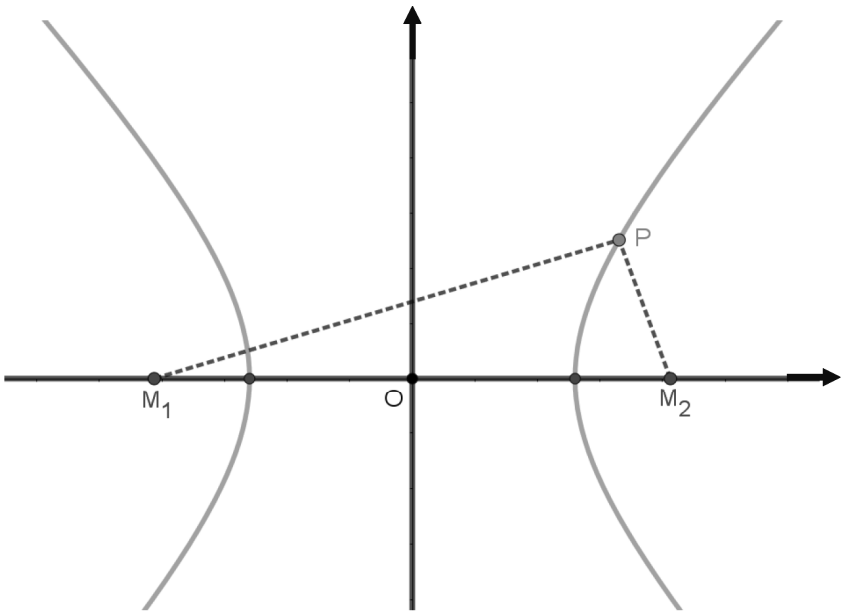
α) Έστω $t\ sec$ ο χρόνος που μεσολάβησε από τη στιγμή της εκπυρσοκρότησης μέχρι τη στιγμή που την άκουσε ο παρατηρητής M_2. Τότε ο αντίστοιχος χρόνος για τον M_1 θα είναι $t+4$ sec. Άρα $(PM_2)=340\cdot t$ και $(PM_1)=340\cdot(t+4)=340\cdot t+1360$.

Ώστε $(PM_1)-(PM_2)=1360\ m$.

β) Γνωρίζουμε ότι όλα τα σημεία Ρ που ικανοποιούν τη σχέση $|(PM_1)-(PM_2)|$ =σταθερή, ανήκουν σε δύο κλάδους υπερβολής με εστίες τα σταθερά σημεία M_1 και M_2. Άρα η θέση Ρ του αγνοούμενου θα ανήκει σε έναν κλάδο υπερβολής με εστίες τα M_1 και M_2 και προφανώς σε αυτόν που βρίσκεται πιο κοντά στον παρατηρητή M_2.

γ) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Εδώ είναι $2\alpha=1360$, οπότε $\alpha=680$. Η απόσταση (M_1M_2) είναι 2γ, άρα $\gamma=1378:2=689$.

Όμως $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 = 689^2 - 680^2 = (689 + 680)(689 - 680) = 1369 \cdot 9 = 37^2 \cdot 3^2 = 111^2$.



266 Θέμα 4 - 21657

α) Η υπερβολή C έχει κέντρο το $(0,0)$ και εστίες στον άξονα xx', οπότε θα έχει ασύμπτωτες της μορφής $y = \frac{\beta}{\alpha}x$, $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$. Αφού το ορθογώνιο βάσης είναι τετράγωνο, συμπεραίνουμε ότι $\alpha = \beta$ δηλαδή είναι ισοσκελής υπερβολή. Συνεπώς

i. οι εξισώσεις των ασυμπτώτων της υπερβολής C είναι $y = x$, $y = -x$.

ii. για την εκκεντρότητα ε της C ισχύει ότι $\varepsilon^2 = 1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = 1 + 1 = 2$ και επειδή $\varepsilon > 0$ έχουμε τελικά ότι $\varepsilon = \sqrt{2}$.

β) Αφού η (ζ) είναι παράλληλη σε κάποια εκ των ασύμπτωτων της C, θα έχει εξίσωση της μορφής $y = x + \kappa$ ή $y = -x + \kappa$ με $\kappa \neq 0$. Η ισοσκελής υπερβολή C θα έχει εξίσωση της μορφής $x^2 - y^2 = \alpha^2$. Αφού διέρχεται από το σημείο $(2,0)$ έχουμε ότι $2^2 - 0^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow 4 = \alpha^2 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha = 2$.

Το πλήθος των κοινών σημείων της C και της ευθείας (ζ) είναι ίδιο με το πλήθος των λύσεων καθενός από τα συστήματα $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ y = x + \kappa \end{cases}$ και $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ y = -x + \kappa \end{cases}$.

Λύνουμε το 1ο σύστημα με αντικατάσταση της 2ης εξίσωσης στην 1η και έχουμε :

$$x^2 - (x+\kappa)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - x^2 - 2x\kappa - \kappa^2 = 4 \Leftrightarrow -2x\kappa = 4 + \kappa^2 \overset{\kappa\neq 0}{\Leftrightarrow} x = -\frac{4+\kappa^2}{2\kappa}$$

και από τη 2η εξίσωση έχουμε ότι $y = -\frac{4+\kappa^2}{2\kappa} + \kappa$

i. Σε κάθε περίπτωση το σύστημα έχει μοναδική λύση που σημαίνει ότι η (ζ) έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την C.

ii. Επειδή σε κάθε περίπτωση η μοναδική λύση του συστήματος προέκυψε από εξίσωση 1ου βαθμού και όχι από 2ου με διακρίνουσα 0, η ευθεία (ζ) δεν είναι εφαπτόμενη της C. Απλά την τέμνει σε ένα σημείο χωρίς όμως το σημείο αυτό να είναι σημείο επαφής . Δηλαδή η (ζ) διαπερνά τη C.

Σημείωση : το παραπάνω συμπέρασμα ισχύει για κάθε υπερβολή και ευθεία παράλληλη σε κάποια από τις ασύμπτωτες και όχι μόνο για τις ισοσκελείς.

267 Θέμα 4 - 18745

α) Η πορεία του εντόμου είναι στην ευθεία της διακέντρου των κύκλων. Οι δύο πρώτοι κύκλοι, σύμφωνα με το σχήμα, έχουν κέντρα $\mathrm{A}(-2,1)$ και $\mathrm{B}(0,1)$, οι οποίοι βρίσκονται στην ευθεία $y=1$. Τα κέντρα των υπόλοιπων κύκλων ανήκουν στην ίδια ευθεία, άρα η πορεία του εντόμου είναι η $y=1$.

β)

i. Έχουμε για τους τέσσερεις; κύκλους:

C_1: κέντρο $\mathrm{A}(-2,1)$ και $\rho_1=3$ $\qquad$ C_2: κέντρο $\mathrm{B}(0,1)$ και $\rho_2=2$

C_3: κέντρο $\Gamma(2,1)$ και $\rho_3=1$ $\qquad$ C_4: κέντρο $\Delta(3,1)$ και $\rho_4=\frac{1}{2}$.

Μια ευθεία εφάπτεται σε κύκλο αν και μόνο αν η απόσταση του κέντρου από την ευθεία ισούται με την ακτίνα. Έχουμε

$$d(\mathrm{A},\varepsilon_1)=\frac{\left|3+2\sqrt{3}-3+4\sqrt{3}\right|}{\sqrt{12}}=\frac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=3=\rho_1 \qquad d(\mathrm{B},\varepsilon_1)=\frac{\left|3-3+4\sqrt{3}\right|}{\sqrt{12}}=\frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=2=\rho_2$$

$$d(\Gamma,\varepsilon_1)=\frac{\left|3-2\sqrt{3}-3+4\sqrt{3}\right|}{\sqrt{12}}=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=1=\rho_3 \qquad d(\Delta,\varepsilon_1)=\frac{\left|3-3\sqrt{3}-3+4\sqrt{3}\right|}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}=$$

Άρα η ευθεία $(\varepsilon_1): y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{3-4\sqrt{3}}{3}$ είναι κοινή εφαπτόμενη των τεσσάρων κύκλων.

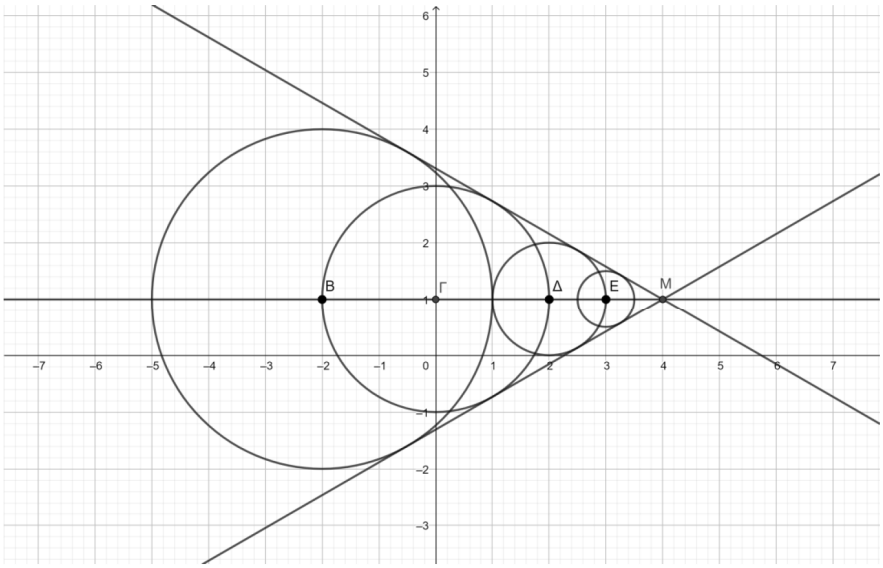
ii. Η εφαπτομένη (ε_1) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ άρα και με την ευθεία $y=1$ γωνία ω, με $\varepsilon\varphi\omega=\frac{\sqrt{3}}{3}$, οπότε $\omega=30^\circ$. Επίσης διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(4,1)$ αφού $\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 4+\frac{3-4\sqrt{3}}{3}=1$, δηλαδή οι συντεταγμένες του σημείου επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

Λόγω συμμετρίας του σχήματος η άλλη κοινή εφαπτόμενη (ε_2) θα σχηματίζει με την ευθεία $y=1$ άρα και με τον άξονα $x'x$ γωνία $\varphi=150^\circ$, οπότε $\varepsilon\varphi\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Οπότε έχουμε για την (ε_2): $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\beta$.

Λόγω της συμμετρίας η (ε_2) διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(4,1)$, οπότε $1=-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 4+\beta \Leftrightarrow \beta=\frac{3+4\sqrt{3}}{3}$.

Τελικά (ε_2): $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{3+4\sqrt{3}}{3}$.

γ) Οι εφαπτόμενες (ε_1) και (ε_2) διέρχονται από το σημείο M από το ερώτημα β), το ίδιο και η ευθεία της διακέντρου, άρα το σημείο στάσης του εντόμου είναι το $\mathrm{M}(4,1)$.



268 Θέμα 4 - 18741

α) Αφού η παραβολή $C: y^2=\alpha\cdot x$ διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(16,\alpha+4)$ ισχύει:

$(\alpha+4)^2=16\alpha \Leftrightarrow \alpha^2+8\alpha+16=16\alpha \Leftrightarrow \alpha^2-8\alpha+16=0 \Leftrightarrow (\alpha-4)^2=0 \Leftrightarrow \alpha=4$

Συνεπώς $C: y^2=4x$.

β) Για την παραβολή $C: y^2=4x$ ισχύει $2p=4 \Leftrightarrow \frac{p}{2}=1$,οπότε η εστία της παραβολής είναι η $\mathrm{E}(1,0)$ και η διευθετούσα δ έχει εξίσωση $x=-1$.

γ) Έστω $\mathrm{M}_1(x_1,y_1)$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης ε_1 με την C. Αφού $\mathrm{M}_1\in C$ ανήκει ισχύει ότι: $y_1^2=4x_1$ (1).

Η ζητούμενη εφαπτομένη ε_1 έχει εξίσωση $y\cdot y_1=2(x+x_1)$ και για να είναι παράλληλη στην $\varepsilon_2: -x+2y+4=0$ θα πρέπει

$$\lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2} \Leftrightarrow \frac{2}{y_1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y_1 = 4.$$

Τότε από την (1) έχουμε: $4^2 = 4x_1 \Leftrightarrow x_1 = 4$.

Επομένως το σημείο επαφής είναι το $M_1(4,4)$ και

$$\varepsilon_1 : y \cdot 4 = 2(x+4) \Leftrightarrow 2y = x+4 \Leftrightarrow x-2y+4=0.$$

δ) Το κέντρο του κύκλου C_1 είναι η κορυφή της C δηλαδή το $O(0,0)$.

Αφού η ευθεία ε_1 εφάπτεται του κύκλου C_1 για την ακτίνα ρ θα ισχύει

$$\rho = d(O,\varepsilon_1) = \frac{|0-2\cdot 0+4|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

και επομένως η εξίσωση του C_1 είναι

$$x^2+y^2 = (\frac{4}{\sqrt{5}})^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 = \frac{16}{5}.$$