

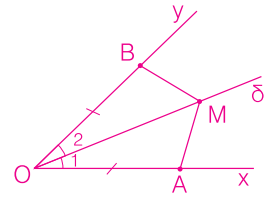
**ΛΥΣΕΙΣ**  
**ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ**  
**Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**

### 1 Θέμα 2 - 36104

α. Τα τρίγωνα  $OMA$ ,  $OMB$  έχουν:

- $OA = OB$
- $OM$  κοινή
- $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα  $MA = MB$ .

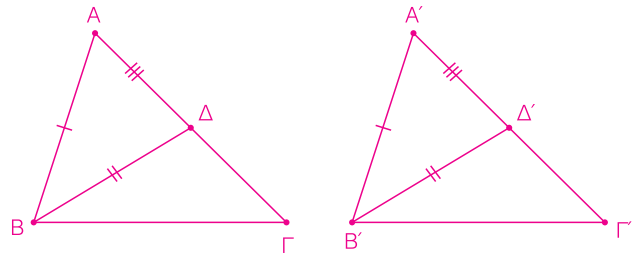


β. Επειδή τα τρίγωνα  $OMA$ ,  $OMB$  είναι ίσα, προκύπτει  $\hat{OMA} = \hat{OMB}$ . Οπότε η  $O\delta$  είναι η διχοτόμος της  $\hat{AMB}$ .

### 2 Θέμα 2 - 13518

α. Τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A'B'\Delta'$  έχουν:

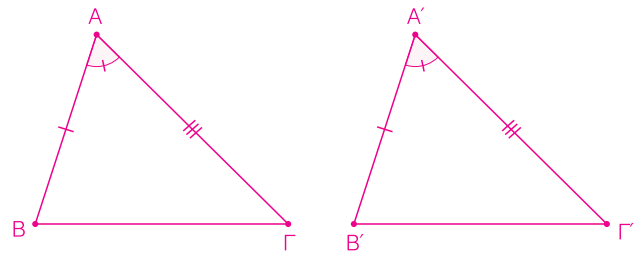
- $B\Delta = B'\Delta'$
- $AB = A'B'$
- $A\Delta = A'\Delta'$ , ως μισά των ίσων πλευρών  $A\Gamma$  και  $A'\Gamma'$  αντίστοιχα.



Επομένως, είναι ίσα, (ΠΠΠ), άρα  $\hat{A} = \hat{A}'$ .

β. Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  έχουν:

- $AB = A'B'$
- $A\Gamma = A'\Gamma'$
- $\hat{A} = \hat{A}'$



Επομένως, είναι ίσα επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (ΠΠΠ).

### 3 Θέμα 2 - 34780

α. Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$ ,  $A\Delta E$  έχουν:

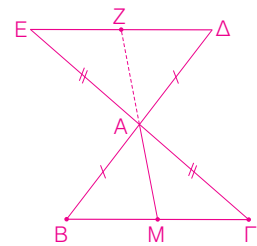
- $AB = A\Delta$
- $A\Gamma = AE$
- $\hat{BA\Gamma} = \hat{\Delta A E}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. i. Τα τρίγωνα  $A\Delta Z$ ,  $ABM$ , έχουν:

- $A\Delta = AB$
- $\hat{\Delta} = \hat{B}$
- $\hat{\Delta A Z} = \hat{B A M}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).



ii. Επειδή τα τρίγωνα  $ABM$  και  $A\Delta Z$  είναι ίσα έχουμε  $Z\Delta = BM = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{E\Delta}{2}$ .

### 4 Θέμα 2 - 34774

α. Επειδή το τρίγωνο  $AB\Gamma$ , είναι ισοσκελές ( $AB = A\Gamma$ ), προκύπτει ότι  $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ , οπότε και  $\hat{B_{\alpha\zeta}} = \hat{\Gamma_{\alpha\zeta}}$ , ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών.

**β.** Τα τρίγωνα  $AB\Delta$ ,  $A\Gamma E$ , έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- $B\Delta = \Gamma E$
- $\hat{B}_{εξ} = \hat{\Gamma}_{εξ}$ .

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

**γ.** Είναι  $BM = M\Gamma$  και  $B\Delta = \Gamma E$  οπότε  $BM + B\Delta = M\Gamma + \Gamma E \Rightarrow M\Delta = ME$ .

Άρα  $AM$  διάμεσος του τριγώνου  $A\Delta E$ .

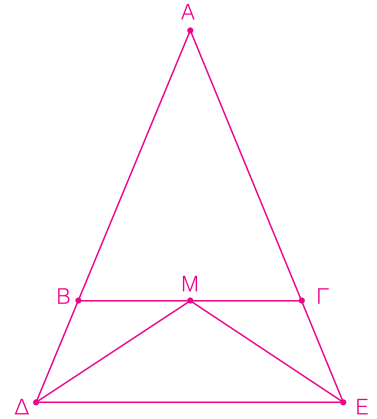
## 5 Θέμα 2 - 12635

**α.** Τα τρίγωνα  $MB\Delta$  και  $M\Gamma E$  έχουν:

- $MB = M\Gamma$ , αφού το  $M$  είναι μέσο της  $B\Gamma$
  - $B\Delta = \Gamma E$ , από την υπόθεση
  - $\hat{M}B\Delta = \hat{M}\Gamma E$ , ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$
- Άρα τα τρίγωνα  $MB\Delta$  και  $M\Gamma E$  είναι ίσα (ΠΓΠ).

**β.** Επειδή τα τρίγωνα  $MB\Delta$  και  $M\Gamma E$  είναι ίσα, έχουμε:  $M\Delta = ME$ .

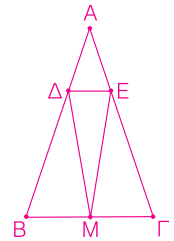
Επομένως το τρίγωνο  $M\Delta E$  είναι ισοσκελές, οπότε  $\hat{M}\Delta E = \hat{M}E\Delta$ .



## 6 Θέμα 2 - 1621

- Είναι  $B\Delta = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3}A\Gamma = \Gamma E$ .
- Τα τρίγωνα  $B\Delta M$ ,  $M\Gamma E$  έχουν:
  - $MB = M\Gamma$
  - $B\Delta = \Gamma E$
  - $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ .

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα  $M\Delta = ME$ , οπότε το τρίγωνο  $\Delta EM$  είναι ισοσκελές.



## 7 Θέμα 2 - 12705

**α.** Η  $BE$  είναι διάμεσος του τριγώνου  $AB\Gamma$ , επομένως,  $AE = \frac{A\Gamma}{2}$ . Όμως  $AB = \frac{A\Gamma}{2}$ , οπότε  $AB = AE = \frac{A\Gamma}{2}$ .

**β.** Τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $AE\Delta$  έχουν:

- $AB = AE$
- $A\Delta$  κοινή πλευρά
- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ , αφού η  $A\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $A$ .

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε  $\Delta B = \Delta E$ .

**γ.** Το τρίγωνο  $ABE$  είναι ισοσκελές με  $AB = AE$  και η  $AZ$  είναι διχοτόμος του.

Επομένως, η  $AZ$  είναι και ύψος, άρα,  $AZ \perp BE$ .

## 8 Θέμα 2 - 36110

**α.** Τα τρίγωνα  $OA\Gamma$  και  $OB\Delta$  έχουν:

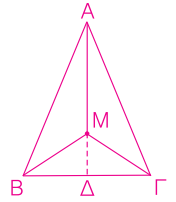
- $OA = OB$
- $O\Gamma = O\Delta$
- $\hat{A}O\Gamma = \hat{B}O\Delta$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα  $A\Gamma = B\Delta$ .

**β.** Επειδή το τρίγωνο  $BO\Delta$  είναι ισοσκελές και η  $OM$  είναι διχοτόμος, θα είναι και διάμεσος. Άρα το  $M$  είναι το μέσο της  $B\Delta$ .

**9 Θέμα 2 - 34784**

- α. Τα τρίγωνα  $AMB$ ,  $AMΓ$  έχουν:
- $AB = AΓ$
  - $MB = MΓ$
  - $AM$  κοινή



Οπότε είναι ίσα (ΠΠΠ).

β. Έστω ότι η  $AM$  τέμνει την  $BΓ$  στο  $\Delta$ . Επειδή τα τρίγωνα  $AMB$ ,  $AMΓ$  είναι ίσα, προκύπτει ότι  $\widehat{BMA} = \widehat{GMA}$ .

Οπότε και  $\widehat{BMD} = \widehat{GMD}$ , άρα η ευθεία  $AM$  διχοτομεί τη  $BMΓ$ .

**10 Θέμα 2 - 12636**

α. Τα τρίγωνα  $MBΔ$  και  $MΓE$  έχουν:

- $MB = MΓ$ , αφού το  $M$  είναι μέσο της  $BΓ$
- $BΔ = ΓE$ , από υπόθεση
- $\widehat{MBΔ} = \widehat{MΓE}$ , ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών  $\widehat{B}$  και  $\widehat{Γ}$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Επειδή τα τρίγωνα  $MBΔ$  και  $MΓE$  είναι ίσα, έχουμε  $MΔ = ME$ .

Επομένως το τρίγωνο  $MΔE$  είναι ισοσκελές, οπότε  $\widehat{MΔE} = \widehat{MEΔ}$ .

γ. Στο ισοσκελές τρίγωνο  $ABΓ$  η  $AM$  είναι διάμεσος άρα και διχοτόμος.

Είναι  $AΔ = AB + BΔ$  και  $AE = AΓ + ΓE$ , οπότε  $AΔ = AE$  ως άθροισμα ίσων τμημάτων.

Επομένως, στο ισοσκελές τρίγωνο  $AΔE$ , η  $AZ$  ως διχοτόμος θα είναι και ύψος.

Άρα η  $AZ$  είναι κάθετη στην  $ΔE$ .

**11 Θέμα 2 - 36333**

α. Επειδή το  $M$  είναι το μέσο της  $BΓ$  και  $BΓ = 2BE \Leftrightarrow BE = \frac{BΓ}{2} \Leftrightarrow BE = BM$ , έχουμε  $\widehat{BEM} = \widehat{BME}$ .

Επομένως  $\widehat{AEB} = \widehat{EMΓ}$  ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών.

β. Τα τρίγωνα  $ABE$ ,  $EΓM$  έχουν:

- $ME = AE$
- $EB = MΓ$
- $\widehat{AEB} = \widehat{EMΓ}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα  $AB = EΓ$ .

**12 Θέμα 2 - 36170**

α. Είναι  $BE = AB + AE = AΓ + AΔ = ΓΔ$ .

β. Τα τρίγωνα  $BAΔ$  και  $ΓAE$  έχουν:

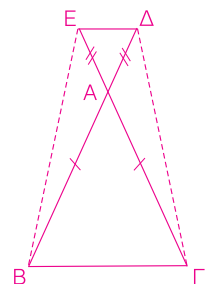
- $AB = AΓ$
- $AΔ = AE$
- $\widehat{ΔAB} = \widehat{EAG}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα  $BΔ = ΓE$ .

γ. Επειδή το τρίγωνο  $ABΓ$  είναι ισοσκελές, έχουμε  $\widehat{B} = \widehat{Γ}$ .

Επειδή τα τρίγωνα  $BAΔ$ ,  $ΓAE$  είναι ίσα, έχουμε  $\widehat{ΔBA} = \widehat{EΓA}$ .

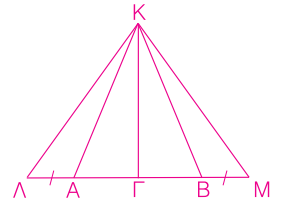
Επομένως  $\widehat{ΔBΓ} = \widehat{EΓB}$ , ως αθροίσματα ίσων γωνιών.



### 13 Θέμα 2 - 36100

α. Τα τρίγωνα ΚΑΛ, ΚΒΜ έχουν:

- $KA = KB$
- $AL = BM$
- $\widehat{K\Lambda L} = \widehat{K\hat{B}M}$ , ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών  $\widehat{A}$  και  $\widehat{B}$  του ισοσκελούς τριγώνου ΚΑΒ. Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε  $KL = KM$ .



Επομένως το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές.

β. Επειδή το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές η διχοτόμος του ΚΓ είναι και διάμεσος, οπότε  $GA = GB$ .

Οπότε  $LG = LA + AG = BM + GB = MG$ . Άρα η ΚΓ είναι διάμεσος του τριγώνου ΚΛΜ.

### 14 Θέμα 2 - 13826

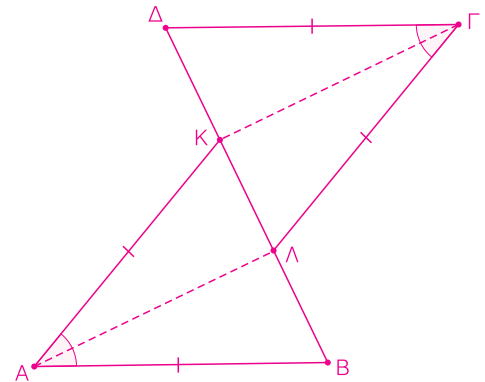
- α. Τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ έχουν:
- $AB = AK$
  - $GD = GL$
  - $\widehat{A} = \widehat{G}$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε  $BK = DL$ .

β. i. Αφού Λ και Κ είναι μέσα των ΒΚ και ΓΔ αντίστοιχα, τότε θα ισχύει ότι  $BL = AK$  και  $AK = KD$ , οπότε θα είναι  $BL = AK = KD$ .

ii. Τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ είναι ισοσκελή και τα ΑΛ και ΓΚ είναι διάμεσοι στις βάσεις τους, οπότε θα είναι και ύψη, άρα θα είναι κάθετα σε αυτές, δηλαδή  $AL \perp BK$  και  $GK \perp DL$ .

Οπότε οι ΑΛ και ΓΚ είναι κάθετες στην ευθεία ΚΛ.



### 15 Θέμα 2 - 34773

- α. Τα τρίγωνα ΒΑΚ, ΚΑΓ, έχουν:
- $AB = AG$
  - $KB = KG$
  - ΑΚ κοινή

Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ).

β. Επειδή τα τρίγωνα ΒΑΚ, ΚΑΓ είναι ίσα, έχουμε  $\widehat{BAK} = \widehat{KAG}$ .

Οπότε η ΑΚ είναι διχοτόμος της ΒΑΓ.

γ. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, η διχοτόμος του ΑΚ θα είναι και διάμεσος. Άρα το Ε είναι το μέσο του ΒΓ, οπότε η ΚΕ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΚΓ.

### 16 Θέμα 2 - 36102

α. Είναι  $BA = BG$  και  $DA = DG$ , οπότε τα τρίγωνα ΒΑΓ και ΔΑΓ είναι ισοσκελή.

Τα ΒΚ, ΔΚ είναι ύψη στα ισοσκελή τρίγωνα, οπότε θα είναι και διχοτόμοι.

Επομένως η ΒΔ είναι διχοτόμος των γωνιών  $\widehat{B}$  και  $\widehat{D}$ .

β. Είναι  $BA = BG$  και  $DA = DG$ , οπότε τα σημεία Β και Δ ισαπέχουν από τα Α και Γ.

Άρα τα Β και Δ ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΑΓ.

Οπότε η ευθεία ΒΔ είναι η μεσοκάθετος του ΑΓ.

### 17 Θέμα 2 - 34516

- α. Τα τρίγωνα ΑΕΒ, ΑΕΓ έχουν:
- $AB = AG$
  - ΑΕ κοινή
  - $\widehat{\delta} = \widehat{\gamma}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Επειδή τα τρίγωνα  $\triangle AEB$ ,  $\triangle AEG$  είναι ίσα, έχουμε  $EB = EG$ . Άρα το τρίγωνο  $\triangle EBG$  είναι ισοσκελές.

γ. Επειδή  $AB = AG$  και  $EB = EG$ , η ευθεία  $AD$  είναι η μεσοκάθετος του τμήματος  $BG$ .

### 18 Θέμα 4 - 37124

α. Τα τρίγωνα  $\triangle ABG$ ,  $\triangle ADE$  έχουν:

- $AG = AE$
- $AB = AD$
- $\hat{A}$  κοινή

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα  $BG = DE$ .

β. Επειδή τα τρίγωνα  $\triangle ABG$ ,  $\triangle ADE$  είναι ίσα, έχουμε:

- $\hat{B\hat{E}K} = \hat{\Delta\hat{\Gamma}K}$
- $\hat{A\hat{B}K} = \hat{A\hat{\Delta}K}$

Οπότε  $\hat{E\hat{B}K} = \hat{\Gamma\hat{\Delta}K}$  ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών.

Τα τρίγωνα  $\triangle BEK$  και  $\triangle \Delta\Gamma K$  έχουν:

- $BE = \Delta\Gamma$  ως διαφορές ίσων τμημάτων
- $\hat{B\hat{E}K} = \hat{\Delta\hat{\Gamma}K}$
- $\hat{E\hat{B}K} = \hat{\Gamma\hat{\Delta}K}$

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ). Άρα  $BK = K\Delta$ .

γ. Τα τρίγωνα  $\triangle ABK$ ,  $\triangle \Delta K$  έχουν:

- $AB = AD$
- $BK = K\Delta$
- $AK$  κοινή

Οπότε είναι ίσα (ΠΠΠ). Άρα  $\hat{B\hat{A}K} = \hat{\Delta\hat{A}K}$ .

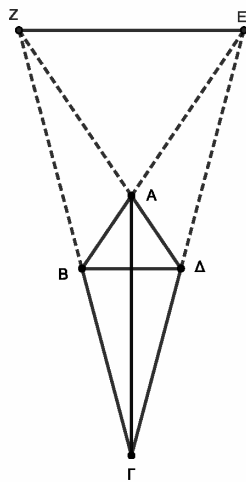
Επομένως η  $AK$  είναι διχοτόμος της  $\hat{A}$ .

δ. Στο ισοσκελές τρίγωνο  $\triangle AEG$  η  $AM$  είναι διχοτόμος, οπότε είναι διάμεσος και ύψος.

Άρα η  $AM$  είναι μεσοκάθετος της  $EG$ .

### 19 Θέμα 4 - 14880

α)

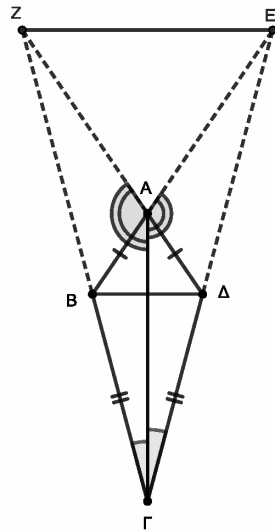


Τα τρίγωνα  $\triangle ABG$  και  $\triangle ADG$  έχουν:

- $AB = AD$ , από υπόθεση
- $GB = GD$ , από υπόθεση
- $GA$  κοινή πλευρά

Από το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A\Delta\Gamma$  είναι ίσα, οπότε έχουν  $\widehat{B\Gamma A} = \widehat{A\Gamma\Delta}$  (1), διότι βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές  $AB$  και  $A\Delta$  αντίστοιχα. Άρα η  $GA$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{B\Gamma\Delta}$ .

β)



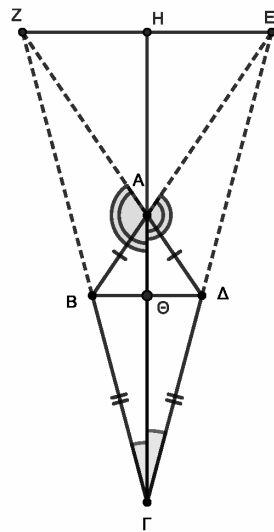
$\widehat{Z\hat{A}B} = \widehat{E\hat{A}D}$  (2) ως κατακορυφήν γωνίες,  $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \widehat{\Delta\hat{A}\Gamma}$  (3), γιατί είναι γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές  $GB$  και  $GD$  αντίστοιχα, των ίσων τριγώνων  $AB\Gamma$  και  $A\Delta\Gamma$  του α) ερωτήματος. Από (2) και (3) έχουμε ότι:  $\widehat{Z\hat{A}\Gamma} = \widehat{E\hat{A}\Gamma}$  (4) ως αθροίσματα ίσων γωνιών

Τα τρίγωνα  $ZA\Gamma$  και  $EA\Gamma$  έχουν:

- $\widehat{B\Gamma A} = \widehat{A\Gamma\Delta}$ , από τη σχέση (1)
- $A\Gamma$  κοινή πλευρά
- $\widehat{Z\hat{A}\Gamma} = \widehat{E\hat{A}\Gamma}$ , από τη σχέση (4)

Άρα από το κριτήριο Γ-Π-Γ τα τρίγωνα  $ZA\Gamma$  και  $EA\Gamma$  είναι ίσα οπότε  $GZ = GE$  γιατί είναι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες  $\widehat{Z\hat{A}\Gamma}$ ,  $\widehat{E\hat{A}\Gamma}$  αντίστοιχα.

γ)



Έστω Η και Θ τα σημεία στα οποία το τμήμα ΑΓ τέμνει τα τμήματα ΖΕ και ΒΔ αντίστοιχα. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΓΒΔ (ΓΒ = ΓΔ), η ΓΘ είναι διχοτόμος, άρα και ύψος. Τότε: ΒΔ ⊥ ΓΘ. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΓΖΕ (ΓΖ = ΓΕ), η ΓΗ είναι διχοτόμος, άρα και ύψος. Τότε: ΕΖ ⊥ ΓΗ ή ΕΖ ⊥ ΓΘ.

Οπότε συμπεραίνουμε ότι ΕΖ // ΒΔ, ως κάθετα στο ίδιο τμήμα ΓΘ.

## 20 Θέμα 4 - 13499

α. • Είναι:  $\widehat{\Gamma\Delta\Delta} = \widehat{\Gamma\Delta\text{B}} - \widehat{\Delta\Delta\text{B}} = 90^\circ - \widehat{\Delta\Delta\text{B}}$  , (1).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΗ είναι

$\widehat{\Delta\Delta\text{H}} = 90^\circ - \widehat{\Delta\Delta\text{H}}$  , (2).

Αφού ΒΔ = ΒΑ , το τρίγωνο ΒΔΑ θα είναι

ισοσκελές οπότε  $\widehat{\Delta\Delta\text{B}} = \widehat{\Delta\Delta\text{H}}$  , (3).

Από τις σχέσεις (1) , (2) και (3) έχουμε

$\widehat{\Gamma\Delta\Delta} = \widehat{\Delta\Delta\text{H}}$  , (4).

• Είναι:  $\widehat{\text{E}\Delta\text{B}} = \widehat{\Gamma\Delta\text{B}} - \widehat{\Gamma\Delta\text{E}} = 90^\circ - \widehat{\Gamma\Delta\text{E}}$  , (5).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΗ είναι  $\widehat{\text{H}\Delta\text{E}} = 90^\circ - \widehat{\text{A}\Delta\text{E}}$  , (6).

Αφού ΓΕ = ΓΑ , το τρίγωνο ΓΕΑ θα είναι ισοσκελές, οπότε  $\widehat{\Gamma\Delta\text{E}} = \widehat{\text{A}\Delta\text{E}}$  , (7).

Από τις σχέσεις (5) , (6) και (7) έχουμε  $\widehat{\text{E}\Delta\text{B}} = \widehat{\text{H}\Delta\text{E}}$  , (8).

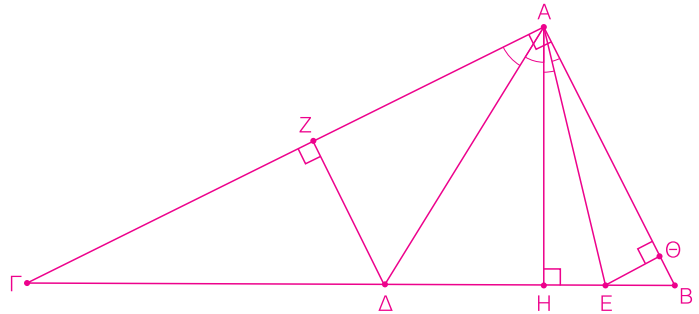
β. • Από α. ερώτημα έχουμε  $\widehat{\text{E}\Delta\text{B}} = \widehat{\text{H}\Delta\text{E}}$  , οπότε η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{\text{H}\Delta\text{B}}$  του τριγώνου ΑΗΒ.

Άρα, το σημείο Ε ισαπέχει από τις πλευρές ΑΗ και ΑΒ , επομένως ΕΗ = ΕΘ .

• Από α. ερώτημα έχουμε  $\widehat{\Gamma\Delta\Delta} = \widehat{\Delta\Delta\text{H}}$  , οπότε η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{\text{H}\Delta\text{G}}$  του τριγώνου ΑΗΓ.

Άρα, το σημείο Δ ισαπέχει από τις πλευρές ΑΗ και ΑΓ κι επομένως είναι ΔΗ = ΔΖ .

Επομένως, ΔΕ = ΔΗ + ΕΗ = ΔΖ + ΕΘ .



## 21 Θέμα 4 - 13839

α. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ έχουν:

• ΑΕ = ΓΕ

• ΒΕ = ΔΕ

•  $\widehat{\text{A}\Delta\text{B}} = \widehat{\Gamma\Delta\text{D}}$  , ως κατακορυφήν

Άρα είναι ίσα επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.

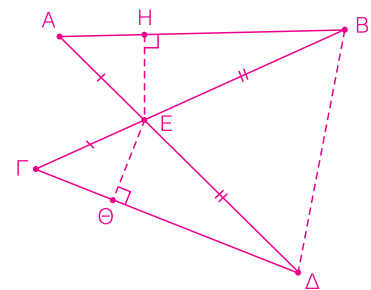
β. Τα τρίγωνα ΑΕΗ και ΓΕΘ έχουν:

• ΑΕ = ΓΕ

•  $\widehat{\text{H}} = \widehat{\Theta} = 90^\circ$

•  $\widehat{\text{E}\Delta\text{H}} = \widehat{\text{E}\Gamma\Theta}$  (από σύγκριση) του ερωτήματος α.

Άρα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία, άρα και ΕΗ = ΕΘ.

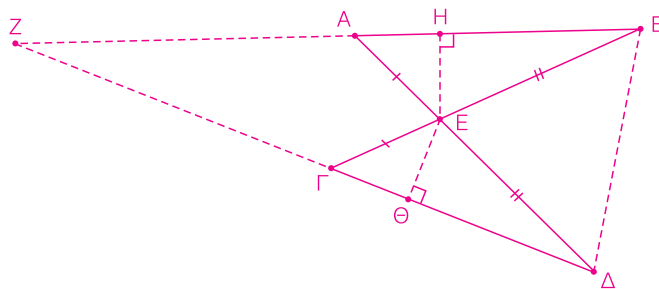




γ. Από την ισότητα των τριγώνων του α. ερωτήματος έχουμε ότι  $\widehat{ABE} = \widehat{GDE}$ .

Είναι  $EB = ED$  άρα το τρίγωνο  $EBD$  είναι ισοσκελές με βάση  $BD$ , άρα  $\widehat{EBD} = \widehat{EDB}$ .

Οπότε  $\widehat{ABE} + \widehat{EBD} = \widehat{GDE} + \widehat{EDB} \Leftrightarrow \widehat{ZBD} = \widehat{ZDB}$ , άρα το τρίγωνο  $BZD$  είναι ισοσκελές.



## 22 Θέμα 4 - 37095

α. Τα τρίγωνα  $OAL$ ,  $OBK$ , έχουν:

- $OL = OK$  ( $= \rho_1$ )

- $OA = OB$  ( $= \rho_2$ )

- $\widehat{O}$  κοινή

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

Άρα  $AL = BK$ .

β. Τα τρίγωνα  $OAL$  και  $OBK$  είναι ίσα, οπότε  $\widehat{OAL} = \widehat{OBK}$  και  $\widehat{OKB} = \widehat{OLA}$ .

Τα τρίγωνα  $PKA$ ,  $PAB$  έχουν:

- $KA = AB$ , ως διαφορές ίσων τμημάτων

- $\widehat{KAP} = \widehat{PBA}$

- $\widehat{AKP} = \widehat{BAP}$ , ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών  $\widehat{OKP}$  και  $\widehat{OLP}$

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ), άρα  $PA = PB$ .

Επομένως το τρίγωνο  $APB$  είναι ισοσκελές.

γ. Τα τρίγωνα  $OPK$ ,  $OPL$  έχουν:

- $OK = OL$

- $OP$  κοινή

- $KP = PL$  (αφού τα τρίγωνα  $PKA$ ,  $PAB$  είναι ίσα).

Οπότε είναι ίσα (ΠΠΠ), άρα  $\widehat{KOP} = \widehat{POL}$ .

Επομένως η  $OP$  είναι η διχοτόμος της γωνίας  $\alpha\widehat{O}\gamma$ .

## 23 Θέμα 4 - 34511

α. Τα τρίγωνα  $ABD$ ,  $AGD$  έχουν:

- $AB = AG$

- $AD$  κοινή

- $\widehat{BAD} = \widehat{GAD}$ , ως αθροίσματα ίσων γωνιών.

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Τα τρίγωνα  $DEA$ ,  $DZA$  έχουν:

- $AD$  κοινή

- $\widehat{EAD} = \widehat{ZAD}$

- $\widehat{EDA} = \widehat{ZDA}$ , αφού τα τρίγωνα  $ABD$  και  $AGD$  είναι ίσα.

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ), άρα  $\widehat{\epsilon} = \widehat{\zeta}$ .

## 24 Θέμα 2 - 12149

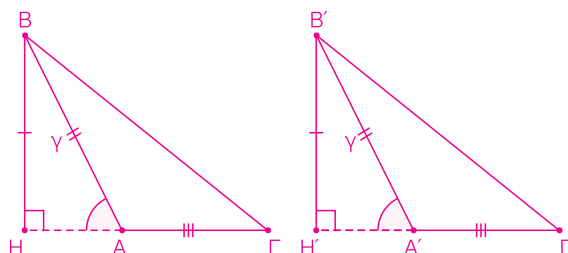
α. Τα τρίγωνα  $BHA$  και  $B'H'A'$  έχουν:

- $\widehat{H} = \widehat{H'} = 90^\circ$ , αφού τα  $BH$  και  $B'H'$  είναι ύψη

- $BH = B'H'$ , από υπόθεση

- $\gamma = \gamma'$ , από υπόθεση

Επομένως είναι ίσα, άρα  $\widehat{BAH} = \widehat{B'A'H'}$  (1).



**β.** Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  έχουν:

- $\gamma = \gamma'$  , από υπόθεση
- $\beta = \beta'$  , από υπόθεση
- $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \widehat{B'\hat{A}'\Gamma'}$  ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών  $\widehat{B\hat{A}H} = \widehat{B'\hat{A}'H'}$  .

Επομένως, τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  είναι ίσα, αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (ΠΓΠ).

## 25 Θέμα 2 - 13517

**α.** Τα τρίγωνα  $ABH$  και  $\Delta E\Theta$  έχουν:

- $BH = E\Theta$  , από (1)
- $\hat{A} = \hat{\Delta}$
- $\hat{H} = \hat{\Theta} = 90^\circ$

Επομένως, είναι ίσα, οπότε  $AB = \Delta E$  .

**β.** Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  έχουν:

- $AB = \Delta E$
- $\hat{A} = \hat{\Delta}$
- $\widehat{A\hat{B}\Gamma} = \widehat{\Delta\hat{E}Z}$

Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία (ΠΓΠ).

## 26 Θέμα 2 - 36330

**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα  $AM\Delta$  και  $AME$  έχουν:

- $M\Delta = ME$
- $AM$  κοινή

Οπότε είναι ίσα.

**β.** Τα ορθογώνια τρίγωνα  $MB\Delta$  και  $M\Gamma E$  έχουν:

- $MB = M\Gamma$
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$  , αφού το  $\widehat{A\hat{B}\Gamma}$  είναι ισοσκελές.

Άρα είναι ίσα, οπότε  $M\Delta = ME$  .

## 27 Θέμα 2 - 34496

**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα  $\Delta AB$  και  $EAG$  έχουν:

- $AB = AG$
- $\hat{A}$  κοινή

Οπότε είναι ίσα, άρα  $B\Delta = \Gamma E$  .

**β.** Τα ορθογώνια τρίγωνα  $\Delta AB$  και  $EAG$  έχουν:

- $B\Delta = \Gamma E$
- $\hat{A}$  κοινή

Οπότε είναι ίσα, άρα  $A\Gamma = AB$  .

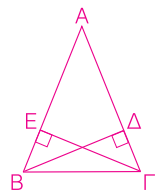
## 28 Θέμα 2 - 36332

**α.** Τα τρίγωνα  $ABE$  και  $A\Gamma\Delta$  έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- $BE = \Gamma\Delta$
- $\widehat{A\hat{B}E} = \widehat{A\hat{\Gamma}\Delta}$  ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών  $\widehat{A\hat{B}\Gamma}$  και  $\widehat{A\hat{\Gamma}B}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα  $A\Delta = AE$  .

**β.** Τα ορθογώνια τρίγωνα  $ZBE$  και  $H\Gamma\Delta$  έχουν:



- $BE = \Gamma\Delta$
  - $\widehat{EBZ} = \widehat{\Delta\Gamma H}$ , ως κατακορυφήν των ίσων γωνιών  $\widehat{AB\Gamma}$  και  $\widehat{A\Gamma B}$ .
- Οπότε είναι ίσα, άρα  $EZ = \Delta H$ .

### 29 Θέμα 2 - 13533

α. Τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Gamma E$  έχουν:

- $\widehat{B\Delta A} = \widehat{\Gamma A E} = 90^\circ$
- $AB = A\Gamma$
- $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ , ως προσκείμενες γωνίες στη βάση  $B\Gamma$  του ισοσκελούς τριγώνου  $AB\Gamma$ .

Άρα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

β. Από την ισότητα των τριγώνων  $AB\Delta$  και  $A\Gamma E$  προκύπτει ότι  $A\Delta = AE$ .

Άρα το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισοσκελές.

γ. Από την ισότητα των τριγώνων  $AB\Delta$  και  $A\Gamma E$  έχουμε ότι  $B\Delta = \Gamma E$ .

Άρα  $BE = B\Delta - \Delta E = \Gamma E - \Delta E = \Gamma\Delta$ .

### 30 Θέμα 2 - 34503

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα  $A\Gamma\Delta$  και  $\Delta\Gamma E$  έχουν:

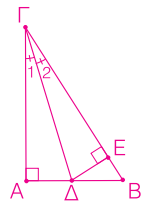
- $\Gamma\Delta$  κοινή
- $\widehat{\Gamma_1} = \widehat{\Gamma_2}$

Οπότε είναι ίσα.

β. Επειδή τα τρίγωνα  $A\Gamma\Delta$ ,  $\Delta\Gamma E$  είναι ίσα, προκύπτει  $\Gamma A = \Gamma E$  και  $\Delta A = \Delta E$ .

Τα σημεία  $\Gamma$ ,  $\Delta$  ισαπέχουν από τα σημεία  $A$  και  $E$ , άρα τα  $\Gamma$ ,  $\Delta$  ανήκουν στη μεσοκάθετο του  $AE$ .

Επομένως η ευθεία  $\Gamma\Delta$  είναι η μεσοκάθετος του  $AE$ .



### 31 Θέμα 2 - 36329

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα  $MA\Delta$  και  $NAE$  έχουν:

- $M\Delta = NE$
- $\widehat{A}$  κοινή.

Οπότε είναι ίσα, άρα:  $AM = AN \Rightarrow 2AM = 2AN \Rightarrow AB = A\Gamma$ .

Επομένως το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα  $MA\Delta$  και  $NAE$  έχουν:

- $AM = AN$ , ως μισά των ίσων τμημάτων  $AB$  και  $A\Gamma$
- $\widehat{A}$  κοινή.

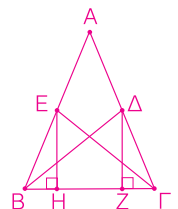
Οπότε είναι ίσα, άρα  $M\Delta = NE$ .

### 32 Θέμα 2 - 34387

α. Τα τρίγωνα  $B\Gamma\Delta$  και  $\Gamma B E$  έχουν:

- $B\Gamma$  κοινή
- $\widehat{\Gamma B E} = \widehat{B\Gamma\Delta}$
- $\widehat{\Delta B\Gamma} = \widehat{E\Gamma B}$  ως μισά ίσων γωνιών.

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ).



- β.** Τα ορθογώνια τρίγωνα  $HEB$  και  $ZΔΓ$  έχουν:
- $EB = ΓΔ$  , αφού τα τρίγωνα  $ΓBE$  ,  $ΒΓΔ$  είναι ίσα
  - $\hat{B} = \hat{\Gamma}$

Οπότε είναι ίσα, άρα  $EH = ΔZ$  .

**33 Θέμα 2 - 37012**

- α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα  $ΒΔΜ$  και  $ΓΕΜ$  έχουν:

- $MB = ΜΓ$
- $ΒΔ = ΓΕ$

Οπότε είναι ίσα.

- β.** Τα τρίγωνα  $ΑΒΔ$  και  $ΑΓΕ$  έχουν:

- $AB = ΑΓ$
- $ΒΔ = ΓΕ$
- $\hat{ΑΒΔ} = \hat{ΑΓΕ}$  , ως συμπληρωματικές των ίσων γωνιών  $\hat{ΑΒΓ}$  και  $\hat{ΑΓΒ}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα  $ΑΔ = ΑΕ$  .

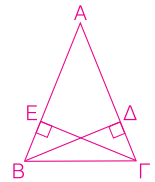
**34 Θέμα 2 - 34401**

- α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα  $ΒΔΓ$  και  $ΓΕΒ$  έχουν:

- $ΒΓ$  κοινή
- $\hat{\Gamma} = \hat{B}$  ( $ΑΒΓ$  ισοσκελές)

Άρα είναι ίσα.

- β.** Επειδή τα τρίγωνα  $ΒΔΓ$  ,  $ΓΕΒ$  είναι ίσα, έχουμε  $ΔΓ = ΕΒ$  .  
Είναι  $ΑΔ = ΑΓ - ΔΓ = ΑΒ - ΒΕ = ΑΕ$  .



**35 Θέμα 2 - 34405**

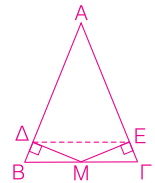
- α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα  $ΔΒΜ$  και  $ΕΓΜ$  έχουν:

- $MB = ΜΓ$
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$  , αφού το τρίγωνο  $ΑΒΓ$  είναι ισοσκελές.

Άρα είναι ίσα, οπότε  $ΜΔ = ΜΕ$  .

- β.** Είναι: •  $AB = ΑΓ$   
•  $ΔΒ = ΕΓ$  , αφού τα τρίγωνα  $ΔΒΜ$  ,  $ΕΓΜ$  είναι ίσα.

Οπότε  $ΑΔ = ΑΒ - ΔΒ = ΑΓ - ΕΓ = ΑΕ$  , άρα το τρίγωνο  $ΑΔΕ$  είναι ισοσκελές.



**36 Θέμα 2 - 34497**

- α.** Τα τρίγωνα  $ΑΒΜ$  ,  $ΜΓΔ$  έχουν:

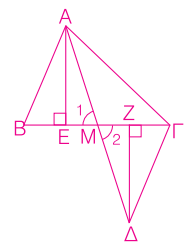
- $MB = ΜΓ$
- $AM = ΜΔ$
- $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

- β.** Τα ορθογώνια τρίγωνα  $ΕΑΜ$  και  $ΖΔΜ$  έχουν:

- $MA = ΜΔ$
- $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$

Οπότε είναι ίσα, άρα  $ΑΕ = ΔΖ$  .



**37 Θέμα 2 - 36341**

- α.** Στο τρίγωνο  $ΑΒΓ$  , το  $ΑΔ$  είναι διχοτόμος και ύψος.

Οπότε το τρίγωνο  $ΑΒΓ$  είναι ισοσκελές με  $AB = ΑΓ$  .

- β.** Στο ισοσκελές τρίγωνο  $ΑΒΓ$  το ύψος  $ΑΔ$  είναι και διάμεσος.  
Οπότε η ευθεία  $ΑΔ$  είναι η μεσοκάθετος του  $ΒΓ$  , άρα  $ΕΒ = ΕΓ$  .

### 38 Θέμα 2 - 34499

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα  $AB\Delta$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και  $EB\Delta$  ( $\hat{E} = 90^\circ$ ) έχουν:

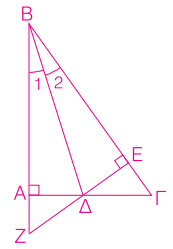
- $B\Delta$  κοινή
- $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$

Οπότε είναι ίσα, άρα  $AB = BE$ .

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $ZEB$  έχουν:

- $AB = BE$
- $\hat{B}$  κοινή

Οπότε είναι ίσα.



### 39 Θέμα 2 - 34404

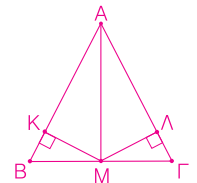
α. Επειδή η  $AM$  είναι διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου  $AB\Gamma$ , θα είναι και διχοτόμος, οπότε  $MK = ML$ .

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα  $KAM$  και  $LAM$  έχουν:

- $AM$  κοινή
- $MK = ML$

Οπότε είναι ίσα, άρα  $\hat{KMA} = \hat{LMA}$ .

Άρα η  $AM$  είναι διχοτόμος της  $KML$ .



### 40 Θέμα 2 - 36345

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα  $EAO$ ,  $\Delta FO$  έχουν:

- $OA = OF$ , ως ακτίνες του κύκλου
- $\hat{O}$  κοινή

Οπότε είναι ίσα, άρα  $OE = OF$ .

Επομένως το τρίγωνο  $\Delta OE$  είναι ισοσκελές.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα  $EZO$ ,  $\Delta ZO$  έχουν:

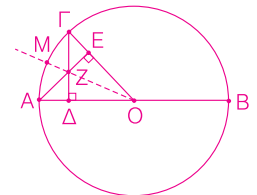
- $OZ$  κοινή
- $OE = OF$

Οπότε είναι ίσα, άρα  $\hat{OZ} = \hat{EZO}$ .

Επομένως η  $OZ$  είναι η διχοτόμος της  $\Delta OG$ .

- Έστω ότι η  $OZ$  τέμνει το κύκλο στο  $M$ .

Έχουμε  $\hat{AOM} = \hat{MOG}$ , άρα  $\widehat{MA} = \widehat{MG}$ , επομένως το  $M$  είναι το μέσο του τόξου  $\Delta G$ .



### 41 Θέμα 4 - 37094

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα  $EAB$  και  $\Delta A\Gamma$  έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- $\hat{A}$  κοινή

Οπότε είναι ίσα, άρα  $BE = \Delta\Gamma$ .

Επομένως η πρόταση  $\Pi$  ισχύει.

β. Η αντίστροφη πρόταση της  $\Pi$  είναι:

$\Pi'$ : Αν σε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  τα ύψη του  $BE$  και  $\Delta\Gamma$  είναι ίσα, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με  $AB = A\Gamma$ .

**Απόδειξη**

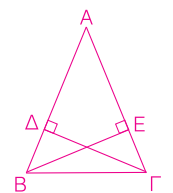
Τα ορθογώνια τρίγωνα  $EAB$  και  $\Delta A\Gamma$  έχουν:

- $BE = \Delta\Gamma$
- $\hat{A}$  κοινή

Οπότε είναι ίσα, άρα  $AB = A\Gamma$ .

Επομένως η πρόταση  $\Pi'$  ισχύει.

γ. Ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές, αν και μόνο αν τα ύψη που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές τους είναι ίσα.

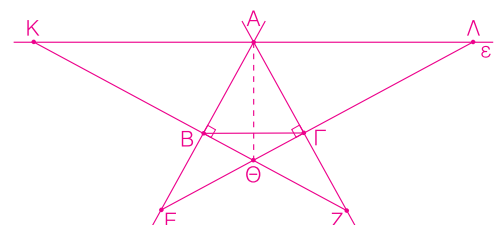


### 42 Θέμα 4 - 1875

α. i. Τα ορθογώνια τρίγωνα  $AZB$  και  $A\epsilon\Gamma$  έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- $\hat{A}$  κοινή

Άρα είναι ίσα, οπότε  $AZ = A\epsilon$ .



ii. Τα ορθογώνια τρίγωνα ABK και AΓΛ έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- $\widehat{BAK} = \widehat{\Gamma\Lambda\Lambda} \left( = \frac{\widehat{A}_{εξ}}{2} \right)$

Άρα είναι ίσα, οπότε  $AK = A\Lambda$ .

β. Συμφωνούμε διότι: Τα ορθογώνια τρίγωνα AΘB και AΘΓ έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- AΘ κοινή

Οπότε είναι ίσα, άρα  $\widehat{BA\Theta} = \widehat{\Gamma A\Theta}$ .

Επομένως η AΘ είναι η διχοτόμος της  $\widehat{A}$ .

### 43 Θέμα 4 - 13854

α. Τα τρίγωνα BΓΔ και BΓE έχουν:

- BΓ κοινή
- $\widehat{B\Delta} = \widehat{B\Gamma E}$  (μισά των ίσων γωνιών  $\widehat{B}$  και  $\widehat{\Gamma}$ )
- $\widehat{\Delta\Gamma B} = \widehat{E\Gamma B}$  (ως προσκείμενες στη βάση BΓ του ισοσκελούς τριγώνου ABΓ)

Άρα είναι ίσα (ΓΠΓ), οπότε  $B\Delta = \Gamma E$ .

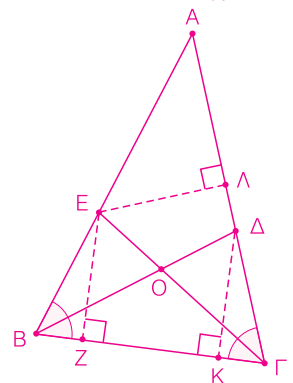
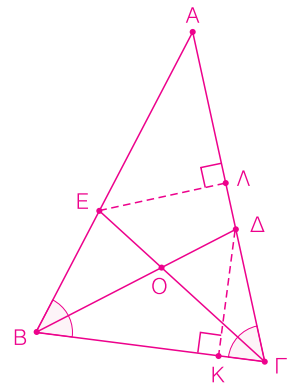
- β. Τα ορθογώνια τρίγωνα BΔK και ΓEΛ έχουν:
- $\widehat{K} = \widehat{\Lambda} = 90^\circ$
  - $B\Delta = \Gamma E$
  - $\widehat{K\Delta} = \widehat{\Lambda\Gamma E}$

Άρα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία, οπότε

$$\Delta K = E\Lambda.$$

γ. Αναζητούμε ένα σημείο Z της πλευράς BΓ για το οποίο να ισχύει  $ZE = \Delta K$ .

Έχουμε ότι  $\Delta K = E\Lambda$ , οπότε  $ZE = E\Lambda$ . Το σημείο E ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας  $\widehat{\Gamma}$  οπότε  $E\Lambda = EZ$ . Συνεπώς το ζητούμενο σημείο Z θα είναι το ίχνος της κάθετης από το σημείο E στην πλευρά BΓ.



### 44 Θέμα 2 - 36226

Γεωμετρικά οι δυνατές θέσεις του θησαυρού είναι:

α. Πάνω στη μεσοκάθετο του BΓ, αφού κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει από τα άκρα του τμήματος.

β. Πάνω στη διχοτόμο της γωνίας  $\widehat{A}$ , αφού κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.

γ. Πάνω στη μεσοκάθετο του BΓ και στη διχοτόμο της γωνίας  $\widehat{A}$ , άρα είναι το σημείο τομής της μεσοκαθέτου του BΓ και της διχοτόμου της γωνίας  $\widehat{A}$ .

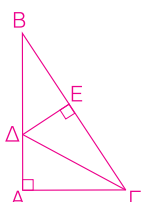
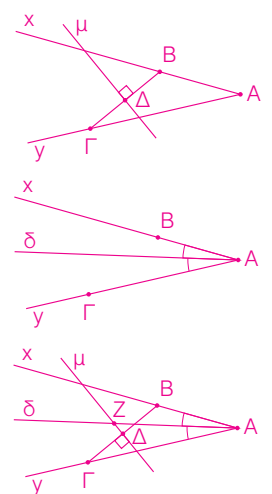
### 45 Θέμα 2 - 34396

- α. Τα ορθογώνια τρίγωνα AΓΔ, ΓΔE έχουν:
- ΓΔ κοινή
  - $\widehat{A\Gamma\Delta} = \widehat{\Delta\Gamma E}$ , αφού ΓΔ διχοτόμος

Οπότε είναι ίσα, άρα  $A\Delta = \Delta E$ .

2<sup>ος</sup> τρόπος

Το Δ είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας  $\widehat{\Gamma}$ , οπότε το Δ ισαπέχει από τις πλευρές της  $\widehat{\Gamma}$ , άρα  $A\Delta = \Delta E$ .



**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $EB\Delta$  η  $\Delta B$  είναι υποτείνουσα, οπότε είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου. Άρα  $\Delta E < \Delta B$ , οπότε  $A\Delta < \Delta B$ .

#### 46 Θέμα 2 - 34502

**α.** Τα τρίγωνα  $\Delta AB$ ,  $\Delta E\Gamma$  έχουν:

- $\Delta B = \Delta \Gamma$
- $A\Delta = \Delta E$
- $\widehat{A\Delta B} = \widehat{\Gamma\Delta E}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα  $AB = \Gamma E$  (1).

**β.** Στο τρίγωνο  $A\Gamma E$  εφαρμόζουμε την τριγωνική ανισότητα και έχουμε

$$AE < \Gamma E + A\Gamma \stackrel{(1)}{\Rightarrow} AE < AB + A\Gamma$$

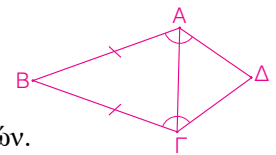
#### 47 Θέμα 2 - 34514

**α.** Το τρίγωνο  $BA\Gamma$  είναι ισοσκελές, με  $BA = B\Gamma$ , οπότε  $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{B\Gamma A}$ .

**β.** Επειδή  $\widehat{BA\Delta} = \widehat{B\Gamma\Delta}$  και  $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{B\Gamma A}$ , έχουμε  $\widehat{\Delta A\Gamma} = \widehat{\Delta \Gamma A}$ , ως διαφορές ίσων γωνιών.

Οπότε το τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελές.

**γ.** Επειδή  $BA = B\Gamma$  και  $\Delta A = \Delta \Gamma$ , τα σημεία  $B, \Delta$  ισαπέχουν από τα  $A, \Gamma$  οπότε τα  $B, \Delta$  ανήκουν στη μεσοκάθετο του  $A\Gamma$ . Άρα η ευθεία  $B\Delta$  είναι μεσοκάθετος του  $A\Gamma$ .



#### 48 Θέμα 2 - 34424

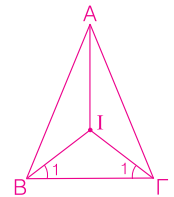
**α.** Επειδή το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές, έχουμε  $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ . Οπότε και  $\widehat{B_1} = \widehat{\Gamma_1}$ , ως μισά ίσων γωνιών. Άρα το τρίγωνο  $B_1\Gamma_1$  είναι ισοσκελές.

**β.** Τα τρίγωνα  $AB_1I, A\Gamma_1I$  έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- $AI$  κοινή
- $IB_1 = I\Gamma_1$ , αφού το τρίγωνο  $B_1\Gamma_1I$  είναι ισοσκελές

Οπότε είναι ίσα (ΠΠΠ). Άρα  $\widehat{AIB_1} = \widehat{AIG_1}$ .

**γ.** Επειδή  $AB = A\Gamma$  και  $IB_1 = I\Gamma_1$ , τα  $A, I$  ισαπέχουν από τα  $B, \Gamma$ , οπότε τα  $A, I$  ανήκουν στη μεσοκάθετο του  $B\Gamma$ . Άρα η ευθεία  $AI$  είναι μεσοκάθετος του  $B\Gamma$ .



#### 49 Θέμα 2 - 34415

**α.** Επειδή το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές, έχουμε

$$\widehat{B} = \widehat{\Gamma} \Rightarrow \widehat{B_{εξ}} = \widehat{\Gamma_{εξ}} \Rightarrow \frac{\widehat{B_{εξ}}}{2} = \frac{\widehat{\Gamma_{εξ}}}{2} \Rightarrow \widehat{MB\Gamma} = \widehat{M\Gamma B}$$

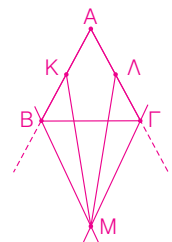
Άρα το τρίγωνο  $BM\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $MB = M\Gamma$ .

**β.** Τα τρίγωνα  $MKB$  και  $M\Lambda\Gamma$  έχουν:

- $MB = M\Gamma$
- $BK = \Gamma\Lambda$
- $\widehat{MBK} = \widehat{M\Gamma\Lambda}$ , ως άθροισμα ίσων γωνιών

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

Άρα  $MK = M\Lambda$ .



#### 50 Θέμα 2 - 34507

**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα  $\Delta BH$  και  $E\Gamma Z$  έχουν:

- $\Delta B = \Gamma E$ , ως μισά ίσων πλευρών
- $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ , ως γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου  $AB\Gamma$

Οπότε είναι ίσα.

**β.** Επειδή τα τρίγωνα ΔΒΗ, ΕΓΖ είναι ίσα, προκύπτει  $\hat{H} = \hat{Z}$ .  
Άρα το τρίγωνο ΜΖΗ είναι ισοσκελές.

### 51 Θέμα 2 - 36168

**α.** Επειδή το σημείο Δ είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας  $\hat{B}$ , ισαπέχει από τις πλευρές της.  
Άρα  $AD = DE$ , (1).

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΓ η ΔΓ είναι υποτείνουσα, οπότε είναι η μεγαλύτερη πλευρά, οπότε

$$DE < DG \stackrel{(1)}{\Rightarrow} AD < DG$$

**γ.** Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι  $\hat{B} > \hat{G}$ , οπότε οι απέναντι πλευρές είναι όμοια άνισες, άρα  $AG > AB$ .

### 52 Θέμα 2 - 36331

**α. i.** Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ έχουν:

- $MD = ME$
- $MB = MG$ , αφού Μ μέσο της ΒΓ

Άρα είναι ίσα.

**ii.** Επειδή τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα, έχουμε  $\hat{B} = \hat{G}$ , οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

**β.** Αν  $AB = AG$ , τότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ έχουν:

- $MB = MG$
- $\hat{B} = \hat{G}$

Οπότε είναι ίσα, άρα  $MD = ME$ .

### 53 Θέμα 2 - 1749

**α. i.** Στο τρίγωνο ΟΑΑ' η ΟΜ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε είναι και διχοτόμος.

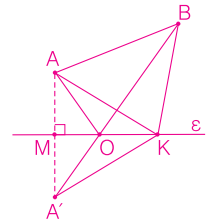
**ii.** Η ΟΜ είναι διχοτόμος στο τρίγωνο ΟΑΑ', οπότε  $\hat{AOM} = \hat{MOA}'$ .

Είναι  $\hat{MOA}' = \hat{KOB}$ , ως κατακορυφήν, οπότε  $\hat{AOM} = \hat{KOB}$ .

**β. i.** Επειδή η ευθεία ε είναι η μεσοκάθετος του τμήματος ΑΑ', έχουμε  $KA = KA'$ .

**ii.** Από την τριγωνική ανισότητα  $\hat{KA'B}$  έχουμε

$$KA' + KB > A'B \Leftrightarrow KA + KB > OA' + OB \Leftrightarrow KA + KB > OA + OB.$$



### 54 Θέμα 2 - 13844

**α.** Από το σημείο Γ που είναι εκτός της ευθείας ΑΒ έχουμε το κάθετο τμήμα ΓΔ και τα πλάγια τμήματα ΓΒ και ΓΑ.  
Είναι  $AD > BD$ , οπότε  $AG > BG$ .

**β.** Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι  $AG > BG$ , οπότε ομοίως άνισες είναι και οι απέναντι γωνίες, άρα  $\hat{B} > \hat{A}$ .

Επιπλέον, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με  $AB = AG$ , οπότε  $\hat{B} = \hat{G}$ , άρα  $\hat{G} > \hat{A}$

Επομένως η μικρότερη γωνία του τριγώνου ΑΒΓ είναι η  $\hat{A}$ .

### 55 Θέμα 2 - 13759

**α.** Επειδή η απόσταση  $d = 3$  του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι μικρότερη από την ακτίνα  $\rho = 6$  του κύκλου, η ευθεία (ε) έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο, δηλαδή είναι τέμνουσα του κύκλου.

**β.** Επειδή η απόσταση  $d = 6$  του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι ίση με την ακτίνα  $\rho = 6$  του κύκλου, η ευθεία (ε) έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο, δηλαδή είναι εφαπτόμενη του κύκλου.

**γ.** Επειδή η απόσταση  $d = 9$  του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα  $\rho = 6$  του κύκλου, η ευθεία (ε) δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο, δηλαδή είναι εξωτερική του κύκλου.

### 56 Θέμα 2 - 36344

Στο τρίγωνο ΟΑΒ το ΟΝ είναι το ύψος και διάμεσος, οπότε:

**α.** το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισοσκελές

**β.** η ΟΝ είναι διχοτόμος της  $\hat{KOL}$ , άρα  $\hat{NOL} = \hat{NOK}$ , οπότε και τα αντίστοιχα τόξα είναι ίσα, δηλαδή  $\widehat{NL} = \widehat{NK}$ .



### 57 Θέμα 2 - 13817

**α.** Τα ευθύγραμμα τμήματα  $AB$  και  $AZ$  είναι εφαπτόμενα στον κύκλο από σημείο εκτός αυτού, άρα  $AB = AZ$ .

Όμοια τα ευθύγραμμα τμήματα  $GB, GM$  είναι εφαπτόμενα τμήματα, άρα  $GB = GM$ .

**β.** Από το ερώτημα **α.** έχουμε  $AG = AB + BG = AZ + MG$ .

### 58 Θέμα 2 - 36095

**α.** Τα τρίγωνα  $PAM$  και  $PMB$  έχουν:

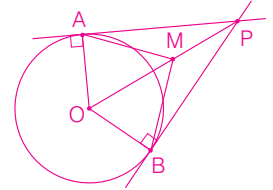
- $PA = PB$ , αφού τα  $PA, PB$  είναι εφαπτόμενα τμήματα
- $PM$  κοινή
- $\hat{O}PA = \hat{O}PB$ , αφού η διακεντρική ευθεία  $PO$  διχοτομεί τη γωνία  $A\hat{P}B$ .

Οπότε είναι ίσα.

**β.** Από το **α.** ερώτημα προκύπτει  $\hat{M}AP = \hat{M}BP$ .

Είναι  $\hat{O}AP = \hat{O}BP = 90^\circ$ , αφού οι ακτίνες που καταλήγουν στα σημεία επαφής είναι κάθετες στις εφαπτόμενες.

Οπότε  $\hat{M}AO = \hat{M}BO$ , ως διαφορές ίσων γωνιών.



### 59 Θέμα 2 - 36354

**α.** Τα τρίγωνα  $ABE$  και  $A\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνια ( $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$ ) και έχουν:

- $AB = A\Gamma$ , ως εφαπτόμενα τμήματα
- $BE = \Gamma\Delta = 2\rho$

Άρα είναι ίσα.

**β.** Είναι  $\hat{B}O\Delta = \hat{\Gamma}O\epsilon$ , άρα  $B\Delta = \Gamma\epsilon$ .

Τα τρίγωνα  $BA\Delta$  και  $A\Gamma\epsilon$  έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- $A\Delta = A\epsilon$ , αφού τα τρίγωνα  $ABE$  και  $A\Gamma\Delta$  είναι ίσα
- $B\Delta = \epsilon\Gamma$

Οπότε είναι ίσα.

### 60 Θέμα 2 - 1751

**α.** Επειδή τα εφαπτόμενα τμήματα είναι ίσα, έχουμε:

$PA = PB$ ,  $AG = \Gamma\Delta$  και  $EB = \epsilon\Delta$ . Οπότε:

**i.**  $P\Gamma = \Gamma A + AP = \Gamma\Delta + AP$

**ii.**  $P\Gamma - \Gamma\Delta = \Gamma\Delta + AP - \Gamma\Delta = AP = BP = PE - BE = PE - \Delta\epsilon$

**β.** Είναι:

**i.**  $P\Gamma = PA + A\Gamma = PB + BE = PE$ . Οπότε το τρίγωνο  $P\Gamma\epsilon$  είναι ισοσκελές.

**ii.** •  $O\Delta \perp \Gamma\epsilon$ , αφού  $\Gamma\epsilon$  εφαπτομένη και  $O\Delta$  ακτίνα

•  $P\Delta \perp \Gamma\epsilon$ , αφού το τρίγωνο  $P\Gamma\epsilon$  είναι ισοσκελές και  $P\Delta$  διάμεσος γιατί  $A\Gamma = BE \Rightarrow \Gamma\Delta = \Delta\epsilon$ , οπότε το  $P\Delta$  είναι και ύψος.

Άρα οι ευθείες  $O\Delta$  και  $P\Delta$  ταυτίζονται, οπότε τα  $P, O$  και  $\Delta$  είναι συνευθειακά.

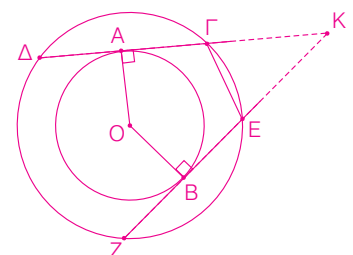
### 61 Θέμα 2 - 36338

**α.** Οι ακτίνες  $OA, OB$  είναι κάθετες στις εφαπτόμενες  $\Gamma\Delta$  και  $\epsilon Z$  του κύκλου  $(O, \rho)$ , οπότε  $OA \perp \Gamma\Delta$  και  $OB \perp \epsilon Z$ . Επομένως τα  $OA, OB$  είναι αποστήματα των χορδών  $\Delta\Gamma, \epsilon Z$  του κύκλου  $(O, R)$  και είναι ίσα, αφού  $OA = OB = \rho$ . Άρα οι αντίστοιχες χορδές είναι ίσες, οπότε  $\Delta\Gamma = \epsilon Z$ .

**β.** Είναι:

- $KA = KB$ , ως εφαπτόμενα τμήματα
- $A\Gamma = BE$ , ως μισά των ίσων τμημάτων  $\Delta\Gamma, \epsilon Z$

Οπότε  $K\Gamma = K\epsilon$ , ως διαφορά ίσων τμημάτων.



**62 Θέμα 2 - 13758**

Έστω  $R=8$  και  $\rho=3$ , οπότε  $R-\rho=8-3=5$  και  $R+\rho=8+3=11$ .

- α. Είναι  $ΚΛ=13$ , οπότε  $ΚΛ > R+\rho$ , άρα ο κύκλος  $(\Lambda, 8)$  βρίσκεται στο εξωτερικό του κύκλου  $(Κ, 3)$ .
- β. Είναι  $ΚΛ=2$ , οπότε  $ΚΛ < R-\rho$ , άρα ο κύκλος  $(Κ, 3)$  βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου  $(\Lambda, 8)$ .
- γ. Είναι  $ΚΛ=5$ , οπότε  $ΚΛ = R-\rho$ , άρα οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.
- δ. Είναι  $ΚΛ=11$ , οπότε  $ΚΛ = R+\rho$ , άρα οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.
- ε. Είναι  $ΚΛ=9$ , οπότε  $R-\rho < ΚΛ < R+\rho$ , άρα οι κύκλοι τέμνονται.

**63 Θέμα 2 - 13757**

Έστω  $R=5$  και  $\rho=2$ .

α. Αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, τότε για τη διάκεντρο  $ΚΛ$  έχουμε :

$$ΚΛ = R + \rho = 5 + 2 = 7$$

β. Αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά, τότε:  $ΚΛ = R - \rho = 5 - 2 = 3$ .

γ. Για να είναι ο κύκλος  $(Κ, 2)$  στο εσωτερικό του κύκλου  $(\Lambda, 5)$  θα πρέπει

$$ΚΛ < R - \rho \Leftrightarrow ΚΛ < 5 - 2 \Leftrightarrow ΚΛ < 3$$

δ. Για να τέμνονται οι κύκλοι θα πρέπει  $R - \rho < ΚΛ < R + \rho \Leftrightarrow 5 - 2 < ΚΛ < 5 + 2 \Leftrightarrow 3 < ΚΛ < 7$ .

**64 Θέμα 2 - 12417**

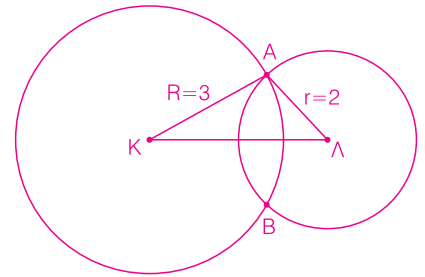
α. Για τους κύκλους  $(Κ, R)$  και  $(\Lambda, r)$ , έχουμε  $ΚΛ=4$ ,  $R+r=5$  και  $R-r=1$ .

Άρα  $R-r < ΚΛ < R+r$ , οπότε οι κύκλοι  $(Κ, R)$  και  $(\Lambda, r)$  τέμνονται σε δύο σημεία Α και Β.

β. Στο τρίγωνο  $ΑΚΛ$  είναι  $ΚΛ > ΑΚ$ , αφού  $ΚΛ=4$  και  $ΑΚ=R=3$ .

Οπότε, οι απέναντι γωνίες  $\hat{ΚΑΛ}$  και  $\hat{ΑΛΚ}$  των άνισων πλευρών  $ΚΛ$  και  $ΑΚ$  αντίστοιχα, θα είναι ομοίως άνισες.

Δηλαδή,  $\hat{ΚΑΛ} > \hat{ΑΛΚ}$ .



**65 Θέμα 2 - 13836**

α. Οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι, άρα

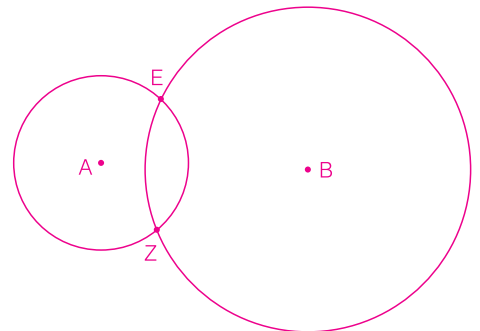
$$R - \rho < AB < R + \rho \Leftrightarrow ΒΔ - ΑΓ < AB < ΒΔ + ΑΓ.$$

β. Ο θησαυρός είναι σημείο του κύκλου  $(A, \rho)$  και του κύκλου  $(B, R)$

με  $\rho=3$  και  $R=5$ . Είναι

$AB=6$ ,  $R-\rho=2$  και  $R+\rho=8$ , οπότε  $R-\rho < AB < R+\rho$ .

Επομένως οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι οπότε έχουν δύο κοινά σημεία τα Ε και Ζ. Αυτά τα σημεία είναι τα σημεία που μπορεί να κρύβεται ο θησαυρός.



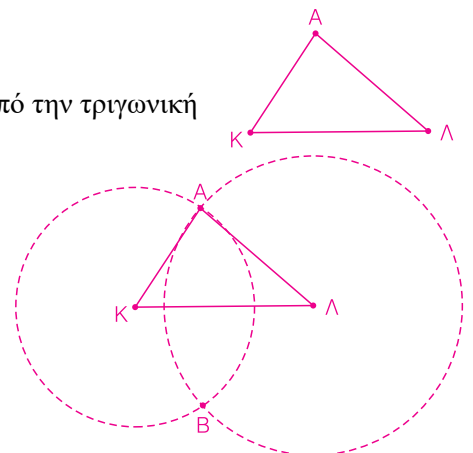
**66 Θέμα 2 - 13835**

α. Τα τρία μη συνευθειακά σημεία Α, Κ και Λ ορίζουν το τρίγωνο ΑΚΛ. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$ΑΛ - ΑΚ < ΚΛ < ΑΛ + ΑΚ \Leftrightarrow 5 - 4 < ΚΛ < 5 + 4 \Leftrightarrow 1 < ΚΛ < 9.$$

β. Το ζητούμενο σημείο είναι σημείο του κύκλου  $(Κ, 4)$  και του κύκλου  $(\Lambda, 5)$ . Από το α. ερώτημα για τη διάκεντρο των κύκλων έχουμε ότι:

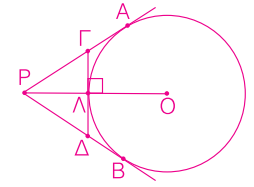
$ΑΛ - ΑΚ < ΚΛ < ΑΛ + ΑΚ$  ή  $R - \rho < ΚΛ < R + \rho$ , όπου  $R$  είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το  $\Lambda$  και  $\rho$  είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το  $Κ$ . Άρα οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία. Το ένα είναι το Α και το άλλο είναι το Β, που είναι και το ζητούμενο σημείο.



**67 Θέμα 4 - 1752**

**α.** Η PO είναι διακεντρική ευθεία, οπότε είναι διχοτόμος της  $\widehat{A\hat{P}B}$ .

Η ακτίνα OΛ είναι κάθετη στην εφαπτόμενη ΓΔ, άρα  $OL \perp GD$ , οπότε  $OP \perp GD$ . Στο τρίγωνο ΡΓΔ το ΡΛ είναι ύψος και διχοτόμος του, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.



- β.** Είναι:
- $PA = PB$ , ως εφαπτόμενα τμήματα
  - $P\Gamma = P\Delta$ , αφού το τρίγωνο ΡΓΔ είναι ισοσκελές

Οπότε και  $A\Gamma = B\Delta$ , ως διαφορές ίσων τμημάτων.

**γ.** Είναι  $\Gamma A = \Gamma B$  και  $\Delta B = \Delta A$ , ως εφαπτόμενα τμήματα.

Η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ είναι  $\Pi = P\Gamma + P\Delta + G\Delta = P\Gamma + P\Delta + G\Lambda + \Lambda\Delta = P\Gamma + P\Delta + \Gamma A + \Delta B = PA + PB$ .

**68 Θέμα 4 - 13823**

**α. i.** Οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι.

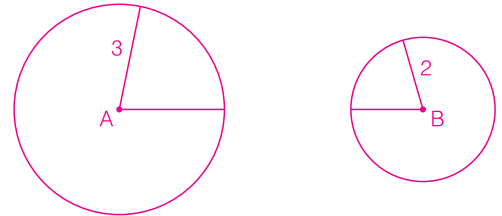
Άρα  $R - \rho < \delta < R + \rho \Leftrightarrow BK - A\Gamma < AB < BK + A\Gamma$ .

**ii.** Το σημείο K έχει μόνο την ιδιότητα 1, γιατί είναι σημείο του κύκλου (B, R) και όχι του κύκλου (A, ρ).

Το σημείο Γ έχει και τις δύο ιδιότητες γιατί είναι σημείο και των δύο κύκλων, δηλαδή απέχει ρ από το A και R από το B.

**β.** Έστω A και B τα δύο σημεία του χάρτη.

Το σημείο του θησαυρού ανήκει σε ένα κύκλο κέντρου A και ακτίνας 3 και σε κύκλο κέντρου B και ακτίνας 2, οπότε θα είναι το σημείο τομής των δύο αυτών κύκλων, αν υπάρχει.



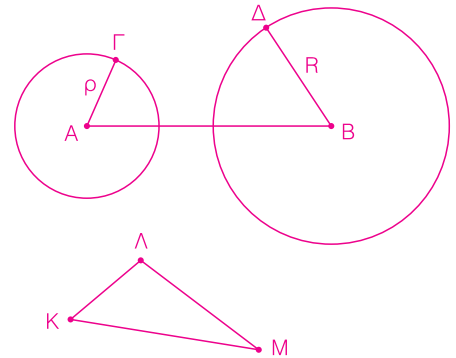
Είναι  $AB = 6$ ,  $R + \rho = 5$ , οπότε  $AB > R + \rho$ . Άρα οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία και μάλιστα ο ένας είναι εξωτερικός του άλλου.

Επομένως η οδηγία δεν είναι σωστή, γιατί δεν υπάρχει σημείο του επιπέδου (άρα και του χάρτη) για το οποίο να ισχύει αυτό που περιγράφει η οδηγία.

**69 Θέμα 4 - 13846**

**α.** Ο ένας κύκλος είναι εξωτερικός του άλλου άρα  $R + \rho < AB \Leftrightarrow R + \rho < 9$ .

**β.** Έστω Γ σημείο του κύκλου με κέντρο A και ακτίνα ρ και Δ σημείο του κύκλου με κέντρο B και ακτίνα R, όπως στο παρακάτω σχήμα. Με το διαβήτη «μεταφέρουμε» τα  $A\Gamma = \rho$  και  $B\Delta = R$  έτσι ώστε να σχηματίζονται τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΛ και ΛΜ. Στη συνέχεια σχεδιάζουμε και την ΚΜ.

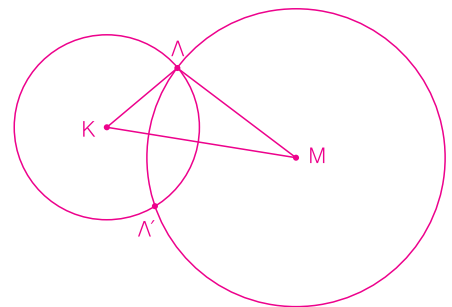


Από την τριγωνική ανισότητα για το τρίγωνο ΚΛΜ έχουμε ότι

$$\Lambda M - K\Lambda < KM < \Lambda M + K\Lambda \Rightarrow R - \rho < KM < R + \rho \Rightarrow KM < 9.$$

Δηλαδή η τρίτη πλευρά του τριγώνου είναι μικρότερη από 9.

**γ.** Έστω το τρίγωνο ΚΛΜ που έχουμε σχεδιάσει. Τα σημεία του επιπέδου που έχουν την ιδιότητα I1 είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο K και ακτίνα ρ, ενώ τα σημεία του επιπέδου που έχουν την ιδιότητα I2 είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο M και ακτίνα R. Επομένως, τα σημεία του επιπέδου που έχουν και τις δύο ιδιότητες I1 και I2 είναι εκείνα που βρίσκονται και στους δύο αυτούς κύκλους. Δηλαδή είναι τα κοινά σημεία των δύο κύκλων.



Είναι  $R - \rho < KM < R + \rho$ , επομένως οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι και έχουν δύο σημεία τομής. Άρα δύο είναι τα σημεία του επιπέδου που έχουν και τις δύο ιδιότητες: τα σημεία τομής των κύκλων (K, ρ) και (M, R), δηλαδή τα Λ και Λ'.

**70 Θέμα 2 - 34399**

**α.** Επειδή  $EZ \parallel B\Gamma$ , έχουμε  $\widehat{B} = \widehat{Z\hat{E}A}$  και  $\widehat{\Gamma} = \widehat{E\hat{Z}A}$ , ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

Είναι  $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ , οπότε  $\widehat{Z\hat{E}A} = \widehat{E\hat{Z}A}$ . Άρα το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές.

- β.** Τα τρίγωνα  $\triangle AED$  και  $\triangle AZD$  έχουν:
- $AE = AZ$  , αφού το τρίγωνο  $\triangle EZ$  είναι ισοσκελές
  - $AD$  κοινή
  - $\hat{EAD} = \hat{DAZ}$  , αφού  $AD$  διχοτόμος

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

### 71 Θέμα 2 - 1595

- α.** Είναι  $AB = AG$  και  $GD = AB$ , οπότε  $AG = GD$ .

Άρα  $\hat{\Delta AG} = \hat{\Gamma DA}$ .

- β.** • Επειδή το τρίγωνο  $\triangle ABG$  είναι ισοσκελές και η  $AM$  είναι διάμεσος, θα είναι και ύψος.  
Είναι  $Gx \perp BG$  και  $AM \perp BG$ , οπότε  $Gx \parallel AM$ .

Επομένως  $\hat{\Gamma DA} = \hat{\Delta AM}$ , ως εντός εναλλάξ.

- Από το **α.** ερώτημα έχουμε  $\hat{\Delta AG} = \hat{\Gamma DA}$ .

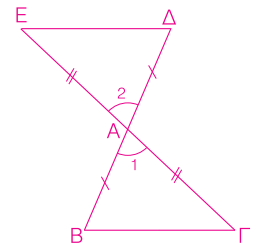
Άρα  $\hat{\Delta AM} = \hat{\Delta AG}$ , οπότε η  $AD$  είναι η διχοτόμος της  $\triangle MAG$ .

### 72 Θέμα 2 - 34779

- α.** Τα τρίγωνα  $\triangle ABG$ ,  $\triangle ADE$  έχουν:
- $AB = AD$
  - $AG = AE$
  - $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

- β.** Επειδή τα τρίγωνα  $\triangle ABG$ ,  $\triangle ADE$  είναι ίσα, έχουμε  $\hat{B} = \hat{D}$ .  
Αφού οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες, προκύπτει  $ED \parallel BG$ .



### 73 Θέμα 2 - 13748

- α.** Είναι  $\Delta Z = \Delta\Gamma + \Gamma Z = 2\Delta\Gamma = A\Gamma$

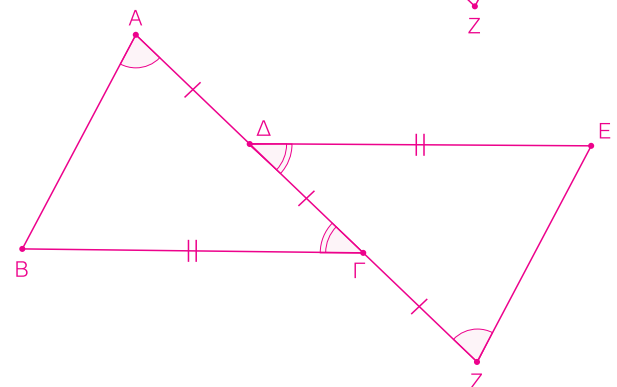
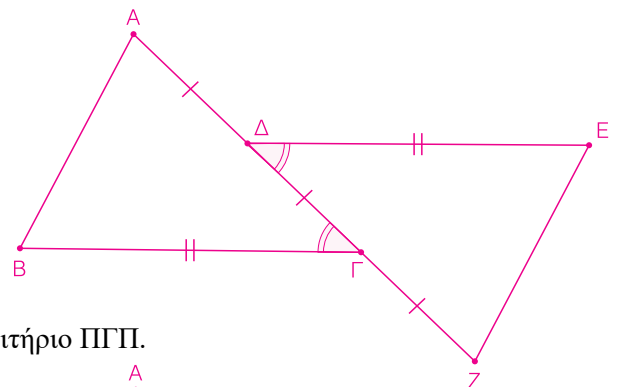
Τα τρίγωνα  $\triangle ABG$  και  $\triangle ZED$  έχουν:

- $BG = DE$ ,
- $AG = \Delta Z$ ,
- $\hat{AGB} = \hat{ZDE}$ , ως γωνίες εντός εναλλάξ.

Άρα είναι ίσα γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές ίσες από το κριτήριο ΠΓΠ.

- β.** Από την ισότητα των τριγώνων  $\triangle ABG$  και  $\triangle ZED$ , προκύπτει ότι  $\hat{BAG} = \hat{EZD}$ .

Οι γωνίες αυτές είναι εντός εναλλάξ των  $AB$  και  $EZ$  που τέμνονται από την  $AZ$ , άρα  $AB \parallel EZ$ .



### 74 Θέμα 2 - 12710

- α.** Το τρίγωνο  $\triangle ABG$  είναι ισόπλευρο, οπότε η διχοτόμος  $BE$  είναι και ύψος, οπότε  $BE \perp AG$ .

Το τρίγωνο  $\triangle GAD$  είναι ορθογώνιο στην κορυφή  $A$ , οπότε  $AD \perp AG$ .

Τα ευθύγραμμα τμήματα  $BE$  και  $AD$  είναι κάθετα στην  $AG$ , οπότε  $BE \parallel AD$ .

- β.** Είναι  $\hat{EBD} = \hat{ADB}$ , ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων  $BE$  και  $AD$  που τέμνονται από την  $BD$ .

- γ.** Από το ισόπλευρο τρίγωνο  $\triangle ABG$  έχουμε  $AB = AG = BG$  και από το ισοσκελές τρίγωνο  $\triangle GAD$  έχουμε  $AG = AD$ .

Οπότε  $AB = AD$ , επομένως το τρίγωνο  $\triangle BAD$  είναι ισοσκελές.

### 75 Θέμα 2 - 13534

α. Το σημείο Δ ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος ΒΓ, άρα ισαπέχει από τα άκρα του, δηλαδή  $\Delta B = \Delta \Gamma$ .  
Επομένως το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές.

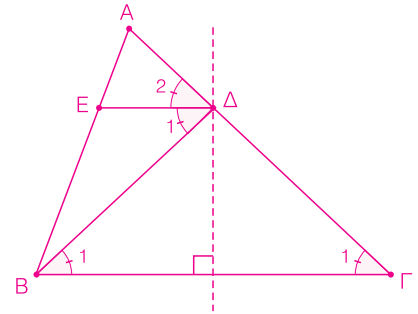
β. Είναι:

•  $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}$  (1), ως προσκείμενες γωνίες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΒΓΔ.

•  $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$  (2), ως εντός εναλλάξ γωνίες

•  $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_2$  (3), ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι  $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ , οπότε η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}\hat{\Delta}B$ .



### 76 Θέμα 2 - 36098

α. Είναι: •  $MA = MB$ , ως εφαπτόμενα τμήματα  
•  $MA = MG$ , από υπόθεση

Οπότε  $MB = MG$ .

β. • Η διακεντρική ευθεία ΜΟ διχοτομεί τη γωνία  $\hat{A}\hat{M}B$ , οπότε  $\hat{A}\hat{M}O = \hat{B}\hat{M}O$ .

Είναι  $\hat{\Gamma}\hat{M}\Delta = \hat{A}\hat{M}O$ , ως κατακορυφήν.

Άρα  $\hat{\Gamma}\hat{M}\Delta = \hat{B}\hat{M}O$ .

- Τα τρίγωνα ΟΜΒ και ΜΓΔ έχουν:
  - $OM = M\Delta$
  - $MB = M\Gamma$
  - $\hat{B}\hat{M}O = \hat{\Gamma}\hat{M}\Delta$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

### 77 Θέμα 4 - 1744

α. Είναι: •  $\hat{A}\hat{Z}H = \hat{B}$  και  $\hat{A}\hat{H}Z = \hat{\Gamma}$ , ως εντός εναλλάξ  
•  $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ , αφού  $AB = A\Gamma$

Οπότε  $\hat{A}\hat{Z}H = \hat{A}\hat{H}Z$ .

Άρα το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές με  $AZ = AH$ .

Επομένως  $BZ = \Gamma H$ , ως διαφορές ίσων τμημάτων.

β. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- $A\Delta = AE$ , ως μισά ίσων τμημάτων
- $\hat{A}$  κοινή

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε  $\hat{Z}\hat{B}\Theta = \hat{H}\hat{\Gamma}K$ .

Τα τρίγωνα ΖΒΘ και ΗΚΓ έχουν:

- $ZB = H\Gamma$
- $\hat{Z}\hat{B}\Theta = \hat{H}\hat{\Gamma}K$
- $\hat{B}\hat{Z}\Theta = \hat{K}\hat{H}\Gamma$ , ως παραπληρωματική ίσων γωνιών

Άρα είναι ίσα.

γ. Επειδή τα τρίγωνα ΖΒΘ, ΗΚΓ είναι ίσα, έχουμε  $Z\Theta = K\Gamma$ .

Οπότε  $ZK = Z\Theta + \Theta K = K\Gamma + \Theta K = H\Theta$ .

**78 Θέμα 4 - 1818**

α. Είναι  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ , αφού ΑΔ διχοτόμος.

Έχουμε:  $\hat{A}_1 = \hat{E}$ , ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη  
 $\hat{A}_2 = \hat{Z}_1$ , ως εντός εναλλάξ

Οπότε  $\hat{E} = \hat{Z}_1$ , άρα το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές.

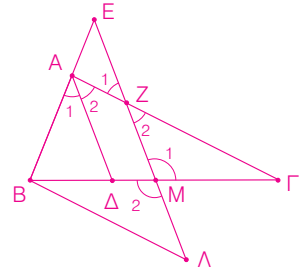
Είναι:  $\hat{E} = \hat{Z}_1$  και  $\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$  άρα  $\hat{E} = \hat{Z}_2$   
 $\hat{Z}_2 = \hat{\Lambda}$ , ως εντός εναλλάξ

Οπότε  $\hat{E} = \hat{\Lambda}$ , άρα το τρίγωνο ΒΛΕ είναι ισοσκελές.

β. Τα τρίγωνα ΒΜΛ, ΜΓΖ έχουν:  $MB = MG$   
 $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$   
 $\hat{\Gamma} = \hat{M\hat{B}\hat{\Lambda}}$ , ως εντός εναλλάξ

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ), άρα  $BL = GZ$ .

γ. Είναι  $AE = AZ = AG - GZ = AG - BL$ .



**79 Θέμα 4 - 13843**

α. Οι ευθείες x'x και y'y εφάπτονται στον κύκλο (O, R) στα άκρα της διαμέτρου του ΑΒ, επομένως, είναι κάθετες στην ΑΒ και συνεπώς είναι μεταξύ τους παράλληλες.

β. Έστω Αδ και Βε οι διχοτόμοι των γωνιών ΒΑx και ΑBy αντίστοιχα, οι οποίες τέμνονται από τη διάμετρο ΑΒ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζονται έχουν άθροισμα μικρότερο από 180°.

$$\text{Είναι } \hat{B\hat{A}\hat{\delta}} + \hat{A\hat{B}\hat{\epsilon}} = \frac{90^\circ}{2} + \frac{90^\circ}{2} = 90^\circ < 180^\circ.$$

Άρα, οι Αδ και Βε τέμνονται σε σημείο Μ του ημιεπιπέδου στο οποίο βρίσκονται οι γωνίες.

γ. Είναι  $\hat{B\hat{A}M} = 45^\circ$  και  $\hat{A\hat{B}M} = 45^\circ$ , οπότε το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές με  $MA = MB$ .

Άρα, το Μ ανήκει στη μεσοκάθετο της ΑΒ, οπότε  $\hat{A\hat{O}M} = 90^\circ$ . Στο τρίγωνο ΑΟΜ έχουμε  $\hat{O\hat{A}M} = 45^\circ$  επομένως,  $\hat{O\hat{M}A} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ .

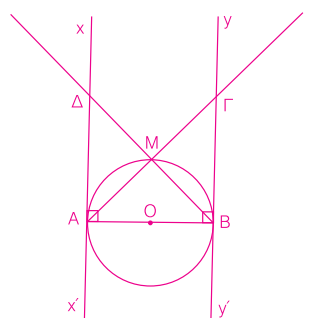
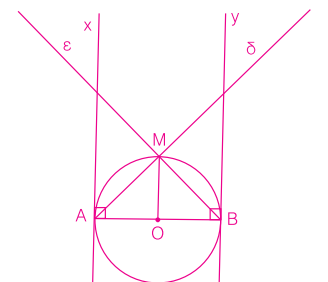
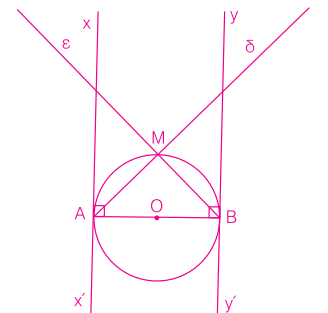
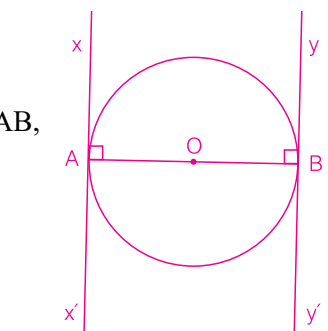
Άρα το τρίγωνο ΑΟΜ είναι ισοσκελές με  $OM = OA = R$ .

Επομένως, το Μ είναι σημείο του κύκλου (O,R) και επειδή ανήκει στη μεσοκάθετο της ΑΒ έχουμε ότι το σημείο είναι το μέσο του ημικυκλίου ΑΒ.

δ. Τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΒΜΓ έχουν:

- $AM = BM$
- $\hat{A\hat{M}\hat{\Delta}} = \hat{B\hat{M}\hat{\Gamma}}$ , ως κατακορυφήν
- $\hat{M\hat{A}\hat{\Delta}} = \hat{M\hat{B}\hat{\Gamma}} = 45^\circ$

Από το κριτήριο ισότητας Γ-Π-Γ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε  $MD = MG$ .

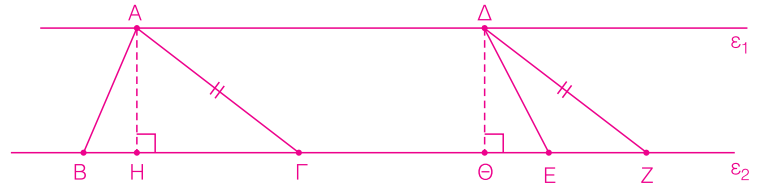


### 80 Θέμα 4 - 13751

**α. i.** Έστω  $AH$  το ύψος του τριγώνου  $AB\Gamma$  και  $\Delta\Theta$  το ύψος του τριγώνου  $\Delta EZ$ .

**ii.** Τα τρίγωνα  $AH\Gamma$  και  $\Delta\Theta Z$ , έχουν:

- $AH = \Delta\Theta$ , ως αποστάσεις παραλλήλων ευθειών
- $A\Gamma = \Delta Z$ ,
- $\hat{H} = \hat{\Theta} = 90^\circ$ .



Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση.

Οπότε  $H\Gamma = \Theta Z$ .

**β.** Το σημείο  $H$  είναι εσωτερικό του τμήματος  $B\Gamma$  γιατί το τρίγωνο είναι οξυγώνιο, οπότε  $H\Gamma < B\Gamma$ .

Το σημείο  $\Theta$  είναι εξωτερικό του τμήματος  $EZ$  γιατί η γωνία  $\hat{E}$  είναι αμβλεία, οπότε  $EZ < \Theta Z$ .

Από το **α. ii.** ερώτημα έχουμε ότι  $H\Gamma = \Theta Z$ .

Άρα  $EZ < \Theta Z$ ,  $\Theta Z = H\Gamma$  και  $H\Gamma < B\Gamma$ , επομένως  $EZ < B\Gamma$ .

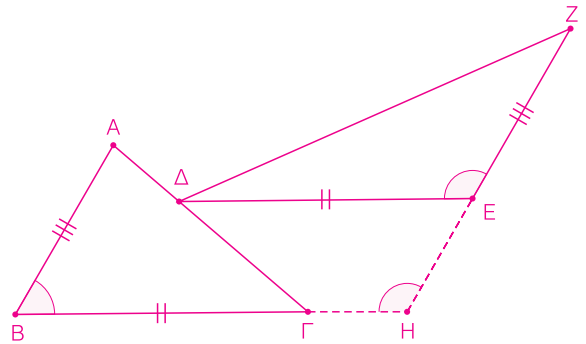
### 81 Θέμα 4 - 13752

**α. 1. Σ 2. Λ 3. Λ 4. Λ**

**β.** Η απάντηση στον συλλογισμό 2. είναι λάθος.

Προεκτείνουμε την  $ZE$  και τη  $B\Gamma$  και έστω  $H$  το σημείο τομής τους. Τότε:

- $\hat{Z\hat{E}\Delta} = \hat{E\hat{H}\Gamma}$ , ως εντός εκτός και επί τα αυτά.
- $\hat{E\hat{H}\Gamma} + \hat{A\hat{B}\Gamma} = 180^\circ$ , ως γωνίες εντός και επί τα αυτά.



Άρα  $\hat{Z\hat{E}\Delta} + \hat{A\hat{B}\Gamma} = 180^\circ$  και αφού  $\hat{B} < 90^\circ$ , τότε  $\hat{Z\hat{E}\Delta} > 90^\circ$ . Άρα οι γωνίες δεν είναι ίσες.

Η απάντηση στο συλλογισμό 3. είναι λάθος, γιατί τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μία, τις  $\Delta E$ ,  $B\Gamma$  και τις  $ZE$ ,  $AB$ , αλλά οι περιεχόμενες γωνίες αυτών των πλευρών δεν είναι ίσες αλλά παραπληρωματικές.

**γ.** Είναι  $\hat{Z\hat{E}\Delta} + \hat{B} = 180^\circ$

- Αν  $\hat{B} < 90^\circ$ , τότε  $\hat{Z\hat{E}\Delta} > 90^\circ$  και τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές άνισες. Οπότε, θα έχουν και τις τρίτες πλευρές τους ομοίως άνισες.

Δηλαδή, αφού  $\hat{B} < \hat{Z\hat{E}\Delta}$ , τότε  $A\Gamma < \Delta Z$ .

- Αν  $\hat{B} > 90^\circ$ , τότε  $\hat{Z\hat{E}\Delta} < 90^\circ$ , οπότε  $\hat{B} > \hat{Z\hat{E}\Delta}$ , άρα  $A\Gamma > \Delta Z$ .

- Αν  $\hat{B} = 90^\circ$ , τότε και  $\hat{Z\hat{E}\Delta} = 90^\circ$  και τα τρίγωνα είναι ορθογώνια με ίσες τις κάθετες πλευρές τους, οπότε θα είναι ίσα, άρα  $A\Gamma = \Delta Z$ .

Επομένως, είναι  $\Delta Z = A\Gamma$ , όταν  $\hat{Z\hat{E}\Delta} = \hat{A\hat{B}\Gamma} = 90^\circ$ .

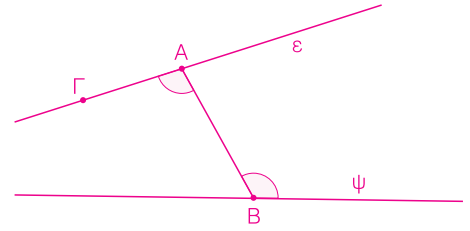
### 82 Θέμα 4 - 13822

**α. i.** Είναι  $\hat{B\hat{A}\epsilon} + \hat{B\hat{A}\Gamma} = 180^\circ$  και  $\hat{A\hat{B}\psi} < \hat{B\hat{A}\Gamma}$ , οπότε  $\hat{B\hat{A}\epsilon} + \hat{A\hat{B}\psi} < \hat{B\hat{A}\epsilon} + \hat{B\hat{A}\Gamma} \Leftrightarrow \hat{B\hat{A}\epsilon} + \hat{A\hat{B}\psi} < 180^\circ$ .

**ii.** Οι γωνίες  $\hat{B\hat{A}\epsilon}$  και  $\hat{A\hat{B}\psi}$  είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των  $\epsilon$  και  $\psi$  που τέμνονται από την  $AB$  και επειδή  $\hat{B\hat{A}\epsilon} + \hat{A\hat{B}\psi} < 180^\circ$  οι  $\epsilon$  και  $\psi$  τέμνονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την  $AB$  προς το μέρος που βρίσκεται η  $A\hat{B}\psi$ .

**β.** Στο **α.** αποδείξαμε ότι: αν δύο ευθείες τεμνόμενες από άλλη ευθεία σχηματίζουν εντός και εναλλάξ γωνίες που δεν είναι ίσες, τότε οι δύο αυτές ευθείες τέμνονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την τέμνουσα προς το μέρος που βρίσκεται η μικρότερη από τις δύο εντός και εναλλάξ γωνίες.

**γ.** Οι γωνίες  $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$  και  $\hat{A}\hat{B}\hat{\Psi}$  είναι εντός και εναλλάξ και  $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} < \hat{A}\hat{B}\hat{\Psi}$ .  
Άρα οι ευθείες  $\varepsilon$  και  $\psi$  τέμνονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την  $AB$  προς το μέρος της  $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$ , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



### 83 Θέμα 2 - 37014

**α.** Είναι  $\hat{A} = 180^\circ - 40^\circ - 70^\circ = 70^\circ$ .

Οπότε  $\hat{A} = \hat{B}$ , άρα το τρίγωνο  $\Gamma AB$  είναι ισοσκελές.

**β.** Από το τρίγωνο  $AE\Delta$ , έχουμε  $\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta} = 180^\circ - 20^\circ - 70^\circ = 90^\circ$ .

### 84 Θέμα 2 - 13535

**α.** Είναι: •  $\hat{A} = 38^\circ$ , ως εντός εναλλάξ γωνίες

$$\bullet \hat{B} + 109^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 71^\circ$$

$$\bullet \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 38^\circ + 71^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 180^\circ - 109^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 71^\circ$$

**β.** Είναι  $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 71^\circ$ , άρα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές. Οι ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου είναι οι  $A\Gamma$ ,  $AB$ , γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες  $\hat{B}$ ,  $\hat{\Gamma}$  αντίστοιχα.

### 85 Θέμα 2 - 12704

**α.** Έχουμε  $A\Delta = AB$ , οπότε το τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι ισοσκελές με:

$$\hat{B} = \hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} \Leftrightarrow \hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} = 70^\circ$$

Στο τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι:

$$\hat{B}\hat{A}\hat{\Delta} + \hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} + \hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B}\hat{A}\hat{\Delta} + 70^\circ + 70^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B}\hat{A}\hat{\Delta} = 180^\circ - 140^\circ \Leftrightarrow \hat{B}\hat{A}\hat{\Delta} = 40^\circ$$

**β.** Στο τρίγωνο  $AB\Delta$  η  $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$  είναι εξωτερική γωνία, οπότε  $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} + \hat{B}\hat{A}\hat{\Delta} = 70^\circ + 40^\circ = 110^\circ$ .

**γ.** Είναι  $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$ , ως παραπληρωματική της  $\hat{\Gamma}_{\text{εξ.}}$ .

Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι:

$$\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} + \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} + \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} - \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} \Leftrightarrow \hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 180^\circ - 70^\circ - 40^\circ \Leftrightarrow \hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 70^\circ.$$

Άρα  $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 70^\circ = \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ , δηλαδή το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές.

### 86 Θέμα 2 - 12707

**α.** Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχουμε  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + \hat{B} + 55^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 180^\circ - 70^\circ - 55^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 55^\circ$ .

Άρα  $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 55^\circ$ , οπότε το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $AB = A\Gamma$ .

**β.** Στο τρίγωνο  $BZ\Delta$  έχουμε

$$\hat{B} + \hat{B}\hat{Z}\hat{\Delta} + \hat{Z}\hat{\Delta}\hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 55^\circ + 35^\circ + \hat{Z}\hat{\Delta}\hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Z}\hat{\Delta}\hat{B} = 180^\circ - 90^\circ \Leftrightarrow \hat{Z}\hat{\Delta}\hat{B} = 90^\circ$$

**γ.** Η γωνία  $\hat{A}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι εξωτερική του τριγώνου  $AZE$ . Επομένως,



$$\hat{A} = \hat{A\acute{E}Z} + \hat{A\acute{Z}E} \Leftrightarrow 70^\circ = \hat{A\acute{E}Z} + 35^\circ \Leftrightarrow \hat{A\acute{E}Z} = 35^\circ$$

Άρα  $\hat{A\acute{E}Z} = \hat{A\acute{Z}E}$ , οπότε το τρίγωνο  $AZE$  είναι ισοσκελές.

### 87 Θέμα 2 - 13741

α. Οι γωνίες  $\hat{\alpha}$  και  $\hat{\beta}$  είναι εκτός εντός και επί τα αυτά, οπότε  $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = 76^\circ$ .

β. Η γωνία  $\hat{\Gamma}$  του τετράπλευρου  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραπληρωματική της γωνίας  $\hat{\gamma} = 120^\circ$ , οπότε  $\hat{\Gamma} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ .

Οι γωνίες  $\hat{\Gamma}$  και  $\hat{\Delta}$  του τετράπλευρου είναι εντός και επί τα αυτά, οπότε

$$\hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 180^\circ - 60^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 120^\circ$$

Η γωνία  $\hat{A}$  του τετράπλευρου  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραπληρωματική της γωνίας  $\hat{\alpha} = 76^\circ$ , οπότε

$$\hat{A} + \hat{\alpha} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + 76^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 180^\circ - 76^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 104^\circ.$$

γ. Στο τρίγωνο  $EAD$  έχουμε  $\hat{\alpha} = 76^\circ$ .

Είναι: •  $\hat{A\acute{D}E} + \hat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A\acute{D}E} = 180^\circ - 120^\circ \Leftrightarrow \hat{A\acute{D}E} = 60^\circ$ .

•  $\hat{A\acute{D}E} + \hat{\alpha} + \hat{E} = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + 76^\circ + \hat{E} = 180^\circ \Leftrightarrow 136^\circ + \hat{E} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{E} = 180^\circ - 136^\circ \Leftrightarrow \hat{E} = 44^\circ$ .

### 88 Θέμα 2 - 13442

α. Έστω  $\hat{\Delta}_1 = \hat{A\acute{\Delta}\Gamma}$ . Έχουμε  $A\Gamma = A\Delta$ , άρα το τρίγωνο  $A\Gamma\Delta$  είναι ισοσκελές με βάση  $\Gamma\Delta$ , οπότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή  $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$ .

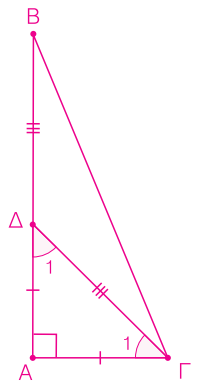
Οι γωνίες  $\hat{\Gamma}_1$ ,  $\hat{\Delta}_1$  του ορθογωνίου τριγώνου  $A\Gamma\Delta$  είναι συμπληρωματικές, οπότε

$$\hat{\Gamma}_1 + \hat{\Delta}_1 = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_1 = 90^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Delta}_1 = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 = 45^\circ$$

β. Έχουμε  $B\Delta = \Delta\Gamma$ , άρα το τρίγωνο  $B\Gamma\Delta$  είναι ισοσκελές με βάση  $B\Gamma$ , οπότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή  $\hat{B} = \hat{\Gamma}_2$ .

Η γωνία  $\hat{\Delta}_1$  είναι εξωτερική του τριγώνου  $B\Gamma\Delta$  άρα

$$\hat{\Delta}_1 = \hat{B} + \hat{\Gamma}_2 \Leftrightarrow 45^\circ = \hat{B} + \hat{B} \Leftrightarrow 2\hat{B} = 45^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 22,5^\circ.$$



### 89 Θέμα 2 - 13654

α. Για τις οξείες γωνίες  $\hat{A\acute{B}\Gamma}$  και  $\hat{A\acute{\Gamma}B}$  του ορθογωνίου τριγώνου  $AB\Gamma$  ισχύει:

•  $\hat{A\acute{B}\Gamma} + \hat{A\acute{\Gamma}B} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{A\acute{\Gamma}B} + 50^\circ + \hat{A\acute{\Gamma}B} = 90^\circ \Leftrightarrow 2\hat{A\acute{\Gamma}B} = 40^\circ \Leftrightarrow \hat{A\acute{\Gamma}B} = 20^\circ$

Επομένως  $\hat{A\acute{B}\Gamma} = 20^\circ + 50^\circ = 70^\circ$ .

β. Είναι

$$\hat{\Delta B\Gamma} + \hat{\Gamma B A} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta B\Gamma} + 70^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta B\Gamma} = 110^\circ.$$

Στο τρίγωνο  $\Delta B\Gamma$  ισχύει:

$$\hat{\Gamma \Delta B} + \hat{\Delta B\Gamma} + \hat{B\acute{\Gamma}\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + 110^\circ + \hat{B\acute{\Gamma}\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B\acute{\Gamma}\Delta} = 180^\circ - 50^\circ - 110^\circ \Leftrightarrow \hat{B\acute{\Gamma}\Delta} = 20^\circ$$

Αφού  $\hat{A\acute{\Gamma}B} = \hat{B\acute{\Gamma}\Delta} = 20^\circ$ , έχουμε ότι η  $\Gamma B$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A\acute{\Gamma}\Delta}$ .

**90 Θέμα 2 - 12709**

**α.** Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχουμε  $\hat{A} = 90^\circ$ ,  $\hat{B} = \hat{\Gamma}$  και  $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B} + \hat{B} = 90^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 45^\circ$ , οπότε και  $\hat{\Gamma} = 45^\circ$ .

**β.** Το τρίγωνο  $A\Gamma\Delta$  είναι ισόπλευρο οπότε  $A\Gamma = A\Delta = \Delta\Gamma$ .

Έχουμε  $AB = A\Gamma$  και  $A\Gamma = A\Delta$ , οπότε  $AB = A\Delta$ . Άρα το τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι ισοσκελές.

**γ.** Επειδή το τρίγωνο  $A\Gamma\Delta$  είναι ισόπλευρο έχουμε  $\hat{\Delta A\Gamma} = 60^\circ$ .

Οπότε  $\hat{B\Delta A} = \hat{B A\Gamma} + \hat{\Delta A\Gamma} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$ .

Στο ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Delta$  έχουμε  $\hat{A B\Delta} = \hat{A \Delta B}$  και

$\hat{A B\Delta} + \hat{A \Delta B} + \hat{B\Delta A} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{A B\Delta} + 150^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{A B\Delta} = 30^\circ \Leftrightarrow \hat{A B\Delta} = 15^\circ$ .

**91 Θέμα 2 13687**

**α.** Το τρίγωνο  $OAB$  είναι ισοσκελές, αφού οι πλευρές  $OA = OB = R$ , οπότε

$$\hat{OAB} = \hat{OBA}$$

Στο τρίγωνο  $OAB$  ισχύει:

$$\hat{O} + \hat{OAB} + \hat{OBA} = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 2\hat{OAB} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{OAB} = 140^\circ \Leftrightarrow \hat{OAB} = 70^\circ \text{ και } \hat{OBA} = 70^\circ.$$

**β.** Είναι  $O\Gamma = O\Delta$ , ως αθροίσματα ίσων τμημάτων, αφού

$$O\Gamma = OA + A\Gamma = 2R \text{ και } O\Delta = OB + B\Delta = 2R$$

Επομένως, το τρίγωνο  $O\Gamma\Delta$  είναι ισοσκελές με βάση  $\Gamma\Delta$ .

Στο τρίγωνο  $O\Gamma\Delta$  ισχύει:

$$\hat{O} + \hat{O\Gamma\Delta} + \hat{O\Delta\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 2\hat{O\Gamma\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{O\Gamma\Delta} = 140^\circ \Leftrightarrow \hat{O\Gamma\Delta} = 70^\circ \text{ και } \hat{O\Delta\Gamma} = 70^\circ.$$

**γ.** Οι  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  τέμνονται από την  $A\Gamma$  και σχηματίζουν τις εκτός εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους  $\hat{OAB}$  και  $\hat{O\Gamma\Delta}$  ίσες. Επομένως,  $AB \parallel \Gamma\Delta$ .

**92 Θέμα 2 - 36167**

**α.** Είναι  $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$  και  $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$ , οπότε  $3\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B} \Leftrightarrow 4\hat{\Gamma} = 2\hat{B} \Leftrightarrow \hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ .

Έχουμε  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma} + 2\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 6\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$ .

Οπότε  $\hat{B} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$ .

**β.** Είναι  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$  και  $\hat{EBA} = \frac{\hat{B}}{2} = 30^\circ$ .

Στο τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$  είναι  $\hat{\Delta A\Gamma} = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 60^\circ$ .

Στο τρίγωνο  $ABE$  είναι  $\hat{AEB} + \hat{A} + \hat{EBA} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{AEB} + 90^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{AEB} = 60^\circ$ .

Στο τρίγωνο  $AEZ$  είναι  $\hat{AZE} + \hat{ZAE} + \hat{AEZ} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{AZE} + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{AEZ} = 60^\circ$ .

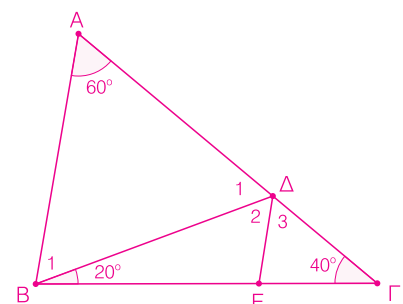
Άρα το τρίγωνο  $AZE$  είναι ισόπλευρο.

**93 Θέμα 2 - 13443**

**α.** Η γωνία  $\hat{\Delta}_1$  είναι εξωτερική του τριγώνου  $B\Gamma\Delta$ , άρα

$$\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma B\Delta} + \hat{\Gamma} = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ.$$

Οπότε οι γωνίες  $\hat{A}$ ,  $\hat{\Delta}_1$  του τριγώνου  $AB\Delta$  είναι  $60^\circ$ .



Επομένως και η τρίτη γωνία  $\hat{B}_1$  θα είναι  $60^\circ$ , οπότε το τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι ισόπλευρο.

**β. i.** Είναι  $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_2$ , ως εντός εναλλάξ γωνίες και  $\hat{B}_1 = 60^\circ$ , άρα  $\hat{\Delta}_2 = 60^\circ \Leftrightarrow \hat{B}\hat{\Delta}E = 60^\circ$ .

**ii.** Είναι  $\hat{A} = \hat{\Delta}_3$ , ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη και  $\hat{A} = 60^\circ$ , άρα  $\hat{\Delta}_3 = 60^\circ$ .

Αφού  $\hat{\Delta}_2 = \hat{\Delta}_3 = 60^\circ$ , η  $\Delta E$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B}\hat{\Delta}\Gamma$ .

### 94 Θέμα 2 - 36101

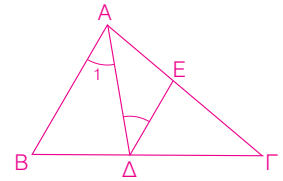
**α.** Είναι: 

- $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$
- $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + 20^\circ + \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} = 80^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 40^\circ$

Οπότε  $\hat{B} = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ$ .

**β.** Είναι: 

- $\hat{A}_1 = \frac{\hat{A}}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$
- $\hat{A}\hat{\Delta}E = \hat{A}_1 = 40^\circ$ , ως εντός εναλλάξ
- $\hat{E}\hat{\Delta}\Gamma = \hat{B} = 60^\circ$ , ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη



### 95 Θέμα 2 - 34787

**α.** Είναι: 

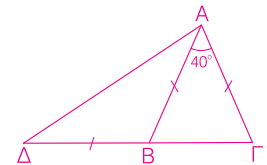
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$
- $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + \hat{B} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B} = 140^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 70^\circ$

Οπότε  $\hat{\Gamma} = 70^\circ$ .

**β.** Είναι: 

- $\hat{\Delta}\hat{A}B = \hat{\Delta}$ , αφού  $AB = B\Delta$
- $\hat{A}\hat{B}\Delta = 180^\circ - \hat{B} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$
- $\hat{\Delta}\hat{A}B + \hat{\Delta} + \hat{A}\hat{B}\Delta = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta}\hat{A}B + \hat{\Delta}\hat{A}B + 110^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Delta}\hat{A}B = 70^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta}\hat{A}B = 35^\circ$

Οπότε  $\hat{\Delta}\hat{A}\Gamma = 40^\circ + 35^\circ = 75^\circ$ .



### 96 Θέμα 2 - 34785

**α.** Είναι  $\hat{B} = \hat{\Gamma}$  και  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + \hat{B} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B} = 130^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 65^\circ$ .

Οπότε και  $\hat{\Gamma} = 65^\circ$ .

**β.** Στο ισοσκελές τρίγωνο  $B\Gamma\Delta$  είναι  $\hat{B}\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\Gamma} = 65^\circ$  και  $\hat{\Delta}\hat{B}\Gamma + \hat{B}\hat{\Delta}\Gamma + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta}\hat{B}\Gamma + 65^\circ + 65^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta}\hat{B}\Gamma = 50^\circ$ .

Άρα  $\hat{\Delta}\hat{B}\Gamma = \hat{A}$ .

### 97 Θέμα 2 - 34775

**α.** Τα τρίγωνα  $BKA$  και  $\Gamma KA$  έχουν: 

- $AB = A\Gamma$
- $KB = K\Gamma$
- $AK$  κοινή

Οπότε είναι ίσα (ΠΠΠ).

**β.** Είναι: 

- $AK$  διχοτόμος, άρα  $\hat{B}\hat{A}K = \frac{\hat{A}}{2} = 40^\circ$

•  $KA = KB$ , άρα  $\hat{A}\hat{B}K = \hat{B}\hat{A}K = 40^\circ$

•  $KA = K\Gamma$ , άρα  $\hat{A}\hat{\Gamma}K = \hat{K}\hat{A}\Gamma = 40^\circ$

**γ.** Στο τρίγωνο  $AKB$  είναι  $\hat{A}\hat{K}B = 180^\circ - 40^\circ - 40^\circ = 100^\circ$ .

Στο τρίγωνο  $AK\Gamma$  είναι  $\hat{A}\hat{K}\Gamma = 180^\circ - 40^\circ - 40^\circ = 100^\circ$ .

Οπότε  $\hat{B}\hat{K}\Gamma = 360^\circ - \hat{A}\hat{K}B - \hat{A}\hat{K}\Gamma = 360^\circ - 100^\circ - 100^\circ = 160^\circ$ .

**98 Θέμα 2 - 34397**

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα  $AB\Delta$ ,  $E\Delta B$  έχουν:

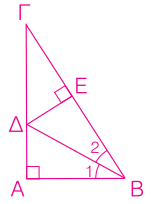
- $B\Delta$  κοινή
- $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ , αφού  $B\Delta$  διχοτόμος

Οπότε είναι ίσα, άρα  $BE = AB$ .

β. Επειδή τα τρίγωνα  $AB\Delta$ ,  $E\Delta B$  είναι ίσα, έχουμε

$$\hat{B}\hat{\Delta}E = \hat{B}\hat{\Delta}A \Rightarrow \hat{B}\hat{\Delta}E = 55^\circ$$

- Οπότε:
- $\hat{\Gamma}\hat{\Delta}E = 180^\circ - 55^\circ - 55^\circ = 70^\circ$
  - $\hat{\Gamma} = 90^\circ - \hat{\Gamma}\hat{\Delta}E = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$ .



**99 Θέμα 2 - 37009**

α. Επειδή  $\Delta E \parallel AB$  και  $AB \perp AG$ , είναι  $\Delta E \perp AG$ .

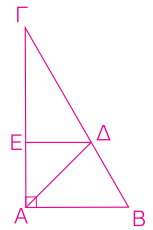
Οπότε το τρίγωνο  $\Gamma\Delta E$  είναι ορθογώνιο.

- β. Είναι:
- $\hat{\Delta}\hat{A}E = \hat{\Delta}\hat{A}B = \frac{\hat{A}}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$
  - $\hat{A}\hat{\Delta}E = \hat{\Delta}\hat{A}B = 45^\circ$ , ως εντός εναλλάξ

γ. Έχουμε  $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$ .  
Είναι

$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 20^\circ + \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} = 70^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 35^\circ$$

Άρα  $\hat{E}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$ .



**100 Θέμα 2 - 34770**

α. Έστω  $K$  το σημείο τομής της  $AB$  με την  $E\Gamma$ .

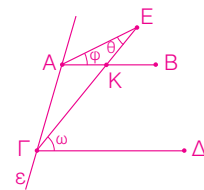
Είναι  $\hat{\omega} = \hat{A}\hat{K}\hat{\Gamma}$ , ως εντός εναλλάξ και  $\hat{A}\hat{K}\hat{\Gamma} = \hat{\phi} + \hat{\theta}$ ,

αφού η  $A\hat{K}\hat{\Gamma}$  είναι εξωτερική στο τρίγωνο  $AKE$ .

Οπότε  $\hat{\omega} = \hat{\phi} + \hat{\theta}$ .

- β. Είναι:
- $\hat{\omega} = \hat{Z}\hat{E}\hat{\Gamma}$ , ως εντός εναλλάξ
  - $\hat{\phi} = \hat{A}\hat{E}\hat{Z}$ , ως εντός εναλλάξ

Οπότε  $\hat{\theta} = \hat{Z}\hat{E}\hat{\Gamma} + \hat{Z}\hat{E}\hat{A} = \hat{\omega} + \hat{\phi}$ .



**101 Θέμα 2 - 12708**

- α. Τα τρίγωνα  $BEH$  και  $\Gamma Z\Delta$  έχουν:
- $BE = \Gamma Z$
  - $BH = \Gamma\Delta$
  - $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$ , αφού το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισόπλευρο.

Άρα είναι ίσα, (ΠΓΠ) επομένως,  $EH = Z\Delta$  και  $BE = \Gamma Z$ , οπότε  $\hat{B}\hat{H}E = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}Z$ .

β. Επειδή τα τρίγωνα  $BEH$  και  $\Gamma Z\Delta$  είναι ίσα, έχουμε  $\hat{H} = \hat{\Delta}$ .

Τα τρίγωνα  $KE\Delta$  και  $BEH$  έχουν τη γωνία  $\hat{E}$  κοινή και  $\hat{\Delta} = \hat{H}$ .

Επομένως, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες, δηλαδή,  $\hat{\Delta}\hat{K}E = \hat{B}$ .

### 102 Θέμα 2 - 34413

Το τρίγωνο  $OAB$  είναι ισοσκελές διότι  $OA = OB$  ως ακτίνες του ίδιου κύκλου.

Άρα  $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ .

Στο τρίγωνο  $OAB$  είναι

$$\hat{O} + \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 180^\circ - \hat{O} \Leftrightarrow 2\hat{B}_1 = 180^\circ - \hat{O} \Leftrightarrow \hat{B}_1 = \frac{180^\circ - \hat{O}}{2}, \quad (1)$$

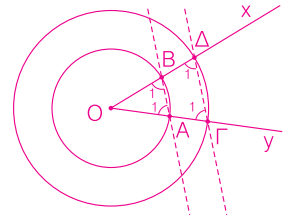
Το τρίγωνο  $O\Gamma\Delta$  είναι ισοσκελές διότι  $O\Gamma = O\Delta$ , ως ακτίνες του ίδιου κύκλου.

Άρα  $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$ .

Στο τρίγωνο  $O\Gamma\Delta$  είναι  $\hat{O} + \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Delta}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Delta}_1 = 180^\circ - \hat{O} \Leftrightarrow 2\hat{\Delta}_1 = 180^\circ - \hat{O} \Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 = \frac{180^\circ - \hat{O}}{2}, \quad (2).$

Από τις (1) και (2) έχουμε  $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$ .

Αφού επιπλέον είναι εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη, προκύπτει  $AB \parallel \Gamma\Delta$ .



### 103 Θέμα 2 - 34776

**α. i.** Επειδή  $\Delta E \parallel B\Gamma$  έχουμε:

- $\hat{E}\hat{\Delta}B = \hat{\Delta}B\hat{\Gamma}$ , ως εντός εναλλάξ
- $\hat{E}\hat{\Delta}A = \hat{\Gamma}$ , ως εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη

**ii.** Είναι  $\hat{A}\hat{\Delta}E = \hat{E}\hat{\Delta}B$ , αφού  $\Delta E$  διχοτόμος της  $A\hat{\Delta}B$ , οπότε  $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}B\hat{\Gamma}$ .

Άρα το  $B\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$  είναι ισοσκελές.

**β.** Η  $A\hat{\Delta}B$  είναι εξωτερική στο τρίγωνο  $B\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$ , άρα  $A\hat{\Delta}B = \hat{\Delta}B\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow 60^\circ = 2\hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$ .

### 104 Θέμα 2 - 34418

**α.** Είναι  $\hat{A}_{εξ} = \hat{B} + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow 2\hat{B} = \hat{B} + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma}$ .

Οπότε το τρίγωνο  $AB\hat{\Gamma}$  είναι ισοσκελές με  $AB = A\hat{\Gamma}$ .

**β.** Είναι: 

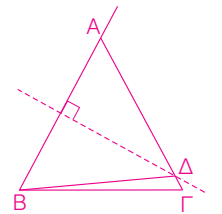
- $A\hat{\Delta}B = 80^\circ$
- $\Delta A = \Delta B$ , αφού το  $\Delta$  ανήκει στη μεσοκάθετο του  $AB$

Οπότε  $\hat{A} = A\hat{B}\hat{\Delta}$ .

Στο  $A\hat{B}\hat{\Delta}$  είναι  $\hat{A} + A\hat{B}\hat{\Delta} + A\hat{\Delta}B = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{A} + 80^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{A} = 100^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 50^\circ$ .

Στο  $A\hat{B}\hat{\Gamma}$  είναι  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + \hat{B} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B} = 130^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 65^\circ$ .

Οπότε και  $\hat{\Gamma} = 65^\circ$ .



### 105 Θέμα 2 - 34505

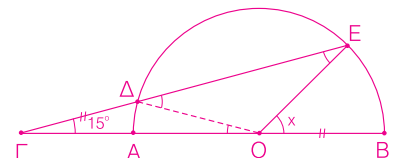
**α.** Είναι  $\Gamma\Delta = OB = O\Delta = OE = \rho$ .

• Το τρίγωνο  $\Delta\Gamma O$  είναι ισοσκελές, άρα  $\hat{\Delta}O\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}\hat{\Gamma}O = 15^\circ$ .

• Στο τρίγωνο  $\Delta\Gamma O$ , η γωνία  $O\hat{\Delta}E$  είναι εξωτερική, οπότε  $O\hat{\Delta}E = 15^\circ + 15^\circ = 30^\circ$ .

**β.** • Το τρίγωνο  $O\Delta E$  είναι ισοσκελές, οπότε  $\hat{E} = O\hat{\Delta}E = 30^\circ$ .

• Στο τρίγωνο  $O\Delta E$  η  $B\hat{O}E$  είναι εξωτερική, οπότε  $B\hat{O}E = x = \hat{\Gamma} + \hat{E} = 15^\circ + 30^\circ = 45^\circ$ .



### 106 Θέμα 2 - 36087

α. Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με βάση τη  $B\Gamma$ , οπότε  $\hat{B} = \hat{\Gamma}$  και  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + \hat{B} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B} = 140^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 70^\circ$ .  
 Οπότε και  $\hat{\Gamma} = 70^\circ$ .

Είναι: •  $\hat{AB\Delta} = 180^\circ - \hat{B} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$ .

•  $\hat{A\Gamma E} = 180^\circ - \hat{\Gamma} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$ .

β. Τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Gamma E$  έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- $B\Delta = \Gamma E$
- $\hat{AB\Delta} = \hat{A\Gamma E}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

γ. Επειδή τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Gamma E$  είναι ίσα, έχουμε  $A\Delta = AE$ .  
 Άρα το τρίγωνο  $\Delta AE$  είναι ισοσκελές.

### 107 Θέμα 2 - 34500

α. Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές, οπότε  $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ .

ι. Τα ορθογώνια τρίγωνα  $ZB\Delta$  και  $H\Gamma E$  έχουν:

- $B\Delta = \Gamma E$
- $\hat{\Delta BZ} = \hat{H\Gamma E}$ , ως κατακορυφήν των ίσων γωνιών  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$

Οπότε είναι ίσα, άρα  $BZ = \Gamma H$ .

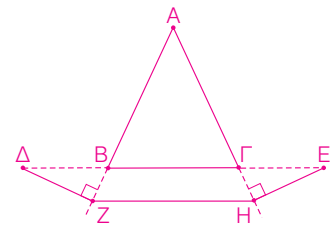
ii. Είναι  $AZ = AB + BZ \stackrel{a.i.}{=} A\Gamma + \Gamma H = AH$ .

Άρα το τρίγωνο  $AZH$  είναι ισοσκελές.

β. Το τρίγωνο  $AZH$  είναι ισοσκελές, οπότε  $\hat{Z} = \hat{H}$ .

Στο τρίγωνο  $AZH$  είναι  $\hat{A} + \hat{Z} + \hat{H} = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + \hat{Z} + \hat{Z} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{Z} = 130^\circ \Leftrightarrow \hat{Z} = 65^\circ$ .

Οπότε και  $\hat{H} = 65^\circ$ .



### 108 Θέμα 2 - 37013

α. Έστω  $\Delta, E$  τα μέσα των πλευρών  $AB, A\Gamma$  και  $\Delta Z \perp B\Gamma, EH \perp B\Gamma$ .  
 Τα ορθογώνια τρίγωνα  $ZB\Delta$  και  $H\Gamma E$  έχουν:

- $\Delta B = E\Gamma$
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ , αφού το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές.

Άρα είναι ίσα, οπότε  $\Delta Z = EH$ .

β. Είναι  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 75^\circ + \hat{B} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 3\hat{B} = 105^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 35^\circ$ .

Οπότε  $\hat{\Gamma} = \hat{B} = 35^\circ$  και  $\hat{A} = 75^\circ + \hat{B} = 75^\circ + 35^\circ = 110^\circ$ .

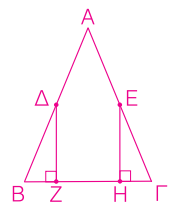
### 109 Θέμα 2 - 36114

α. Η  $PO$  είναι διακεντρική ευθεία, οπότε είναι η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{P}$ .  
 Η ακτίνα  $OM$  είναι κάθετη στην εφαπτόμενη  $\Delta\Gamma$ , οπότε  $OM \perp \Delta\Gamma$ .  
 Στο τρίγωνο  $P\Delta\Gamma$  η  $PM$  είναι διχοτόμος και ύψος, οπότε το τρίγωνο  $P\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελές.

β. Είναι  $OA \perp AP$  και  $OB \perp BP$ , οπότε  $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$ .

Στο τετράπλευρο  $OAPB$  είναι

$$\hat{O} + \hat{A} + \hat{P} + \hat{B} = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{O} + 90^\circ + 40^\circ + 90^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{O} + 220^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{O} = 140^\circ$$



**110 Θέμα 2 - 36117**

α. • Στο τρίγωνο  $\Delta\Delta\text{E}$  είναι  $\hat{E} = 90^\circ - \hat{\Delta} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ .

Στο τρίγωνο  $\Delta\text{B}\Gamma$  είναι  $\hat{\Gamma} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ .

• Στο τετράπλευρο  $\Delta\text{E}\text{Z}\Gamma$  είναι

$$\hat{A} + \hat{E} + \hat{Z} + \hat{\Gamma} = 360^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 60^\circ + \hat{Z} + 60^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{Z} + 210^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{Z} = 360^\circ - 210^\circ \Leftrightarrow \hat{Z} = 150^\circ.$$

β. • Είναι  $\hat{\Delta} = 30^\circ$  και  $\text{E}\hat{Z}\Gamma + \Delta\hat{Z}\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 150^\circ + \Delta\hat{Z}\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta\hat{Z}\Gamma = 30^\circ$ .

Άρα  $\hat{\Delta} = \Delta\hat{Z}\Gamma$ , οπότε το τρίγωνο  $\Gamma\text{Z}\Delta$  είναι ισοσκελές.

• Είναι  $\text{E}\hat{Z}\text{B} = \Gamma\hat{Z}\Delta = 30^\circ$  και  $\hat{B} = 30^\circ$ , οπότε  $\text{E}\hat{Z}\text{B} = \hat{B}$ .

Άρα το τρίγωνο  $\text{E}\text{B}\text{Z}$  είναι ισοσκελές.

**111 Θέμα 2 - 34422**

α. Το τρίγωνο  $\Delta\text{B}\Gamma$  είναι ισοσκελές, οπότε  $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ .

Άρα  $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$  ως συμπληρώματα ίσων γωνιών.

Τα ορθογώνια τρίγωνα  $\Delta\text{B}\Delta$  και  $\Delta\Gamma\text{E}$  έχουν:

- $\Delta\text{B} = \Delta\Gamma$
- $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$

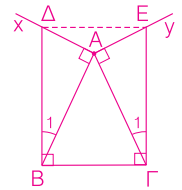
Οπότε είναι ίσα, άρα  $\Delta\text{B} = \Delta\Gamma$ .

β. Επειδή τα τρίγωνα  $\Delta\text{B}\Delta$  και  $\Delta\Gamma\text{E}$  είναι ίσα, έχουμε  $\Delta\text{D} = \Delta\text{E}$ , οπότε  $\Delta\hat{\Delta}\text{E} = \Delta\hat{\text{E}}\Delta$ .

$$\text{Eίναι } \Delta\hat{\Delta}\text{E} = 360^\circ - \Delta\hat{\text{B}}\Delta - \Delta\hat{\Delta}\text{B} - \text{E}\hat{\Delta}\Gamma = 360^\circ - 80^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 100^\circ.$$

$$\text{Στο τρίγωνο } \Delta\Delta\text{E} \text{ είναι } \Delta\hat{\Delta}\text{E} + \Delta\hat{\Delta}\text{E} + \Delta\hat{\text{E}}\Delta = 180^\circ \Leftrightarrow 100^\circ + \Delta\hat{\Delta}\text{E} + \Delta\hat{\Delta}\text{E} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Delta\hat{\Delta}\text{E} = 80^\circ \Leftrightarrow \Delta\hat{\Delta}\text{E} = 40^\circ.$$

Οπότε και  $\Delta\hat{\text{E}}\Delta = 40^\circ$ .

**112 Θέμα 2 - 36163**

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα  $\Delta\Gamma\Delta$  και  $\text{B}\Gamma\text{E}$  έχουν:

- $\Delta\Delta = \text{B}\Gamma$

- $\Delta\Gamma = \text{B}\text{E}$

Οπότε είναι ίσα.

β. Επειδή τα τρίγωνα  $\Delta\Gamma\Delta$ ,  $\text{B}\Gamma\text{E}$  είναι ίσα, έχουμε:

- $\Delta\hat{\Delta}\Gamma = \text{E}\hat{\Gamma}\text{B} = 40^\circ$

- $\Gamma\Delta = \Gamma\text{E}$

Οπότε το τρίγωνο  $\Delta\Gamma\text{E}$  είναι ισοσκελές.

$$\text{Στο τρίγωνο } \Delta\Delta\Gamma \text{ είναι } \Delta\hat{\Delta}\Gamma + \Delta\hat{\Gamma}\Delta = 90^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + \Delta\hat{\Gamma}\Delta = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta\hat{\Gamma}\Delta = 50^\circ.$$

$$\text{Είναι } \Delta\hat{\Gamma}\Delta + \text{E}\hat{\Gamma}\text{B} + \Delta\hat{\Gamma}\text{E} = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + 40^\circ + \Delta\hat{\Gamma}\text{E} = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta\hat{\Gamma}\text{E} = 90^\circ.$$

Άρα το τρίγωνο  $\Delta\Gamma\text{E}$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

**113 Θέμα 2 - 36336**

α. Επειδή  $\Delta\text{B} = \Delta\Gamma$ , το τρίγωνο  $\Delta\text{B}\Gamma$  είναι ισοσκελές, άρα η διάμεσος  $\Delta\Delta$  είναι ύψος και διχοτόμος του τριγώνου. Επειδή η  $\Delta\Delta$  είναι διχοτόμος του τριγώνου  $\Delta\text{B}\Gamma$ , είναι  $\Delta\hat{\Delta}\Gamma = \Delta\hat{\Delta}\text{B} = 30^\circ$ , οπότε  $\hat{\Delta} = 60^\circ$ .

$$\text{Είναι } \hat{\Delta} + \hat{\text{B}} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \hat{\text{B}} + \hat{\text{B}} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\text{B}} = 120^\circ \Leftrightarrow \hat{\text{B}} = 60^\circ.$$

Οπότε και  $\hat{\Gamma} = 60^\circ$ .

Για το τρίγωνο  $\Delta\text{B}\Gamma$  ισχύει  $\hat{\Delta} = \hat{\text{B}} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$ , άρα είναι ισόπλευρο.

β. Επειδή  $\Delta\Delta = \Delta\text{E}$  το τρίγωνο  $\Delta\Delta\text{E}$  είναι ισοσκελές, οπότε  $\Delta\hat{\Delta}\text{E} = \Delta\hat{\text{E}}\Delta$ .

Στο τρίγωνο  $\Delta\Delta\text{E}$  έχουμε:

$$\Delta\hat{\Delta}\text{E} + \Delta\hat{\Delta}\text{E} + \Delta\hat{\text{E}}\Delta = 180^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + 2\Delta\hat{\Delta}\text{E} = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta\hat{\Delta}\text{E} = 75^\circ, \text{ οπότε και } \Delta\hat{\text{E}}\Delta = 75^\circ.$$

γ. Είναι  $\text{E}\hat{\Delta}\Gamma = \Delta\hat{\Delta}\Gamma - \Delta\hat{\Delta}\text{E} = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$ .

### 114 Θέμα 2 - 36118

α. • Επειδή  $AD = AZ$ , έχουμε  $\hat{\Delta} = \hat{\Delta ZA}$ .

Στο τρίγωνο  $A\Delta Z$ , είναι:  $\hat{A} + \hat{\Delta} + \hat{\Delta ZA} = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + 2\hat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Delta} = 110^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 55^\circ$ .

Οπότε  $\hat{\Delta ZA} = \hat{\Delta} = 55^\circ$ .

• Οι γωνίες  $\hat{A}$  και  $\hat{B}$  είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων  $AD, BE$  που τέμνονται από την  $AB$ , οπότε είναι παραπληρωματικές.

Άρα  $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 110^\circ$ .

• Επειδή  $BE = BZ$ , έχουμε  $\hat{EZB} = \hat{E}$ .

Στο τρίγωνο  $BEZ$ , είναι  $\hat{B} + \hat{E} + \hat{EZB} = 180^\circ \Leftrightarrow 110^\circ + 2\hat{E} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{E} = 70^\circ \Leftrightarrow \hat{E} = 35^\circ$ .

Οπότε  $\hat{EZB} = \hat{E} = 35^\circ$ .

β. Είναι  $\hat{\Delta ZE} = 180^\circ - \hat{\Delta ZA} - \hat{EZB} = 180^\circ - 55^\circ - 35^\circ = 90^\circ$ .

### 115 Θέμα 2 - 36228

α. Είναι  $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$  και  $\hat{\Delta AE} = 180^\circ - \hat{A} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ .

Επειδή το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισοσκελές, ισχύει ότι  $\hat{\Delta AE} = \hat{E}$ .

Στο τρίγωνο  $A\Delta E$  έχουμε  $\hat{\Delta AE} + \hat{E} + \hat{\Delta AE} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Delta AE} + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Delta AE} = 60^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta AE} = 30^\circ$ .

Οπότε και  $\hat{E} = 30^\circ$ .

β. Είναι  $\hat{\Delta AE} = \hat{\Delta Z\Gamma} = 30^\circ$ , ως κατακορυφήν και  $\hat{\Gamma} = 60^\circ$ .

Στο τρίγωνο  $\Delta Z\Gamma$  έχουμε  $\hat{\Delta Z\Gamma} + \hat{\Delta Z\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + \hat{\Delta Z\Gamma} + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta Z\Gamma} = 90^\circ$ , άρα  $EZ \perp B\Gamma$ .

### 116 Θέμα 2 - 34786

α. Στο τρίγωνο  $\Delta E\Gamma$  είναι  $\hat{E} = 90^\circ$  και  $\hat{E\Delta\Gamma} = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$ .

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\hat{B} = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 50^\circ$ .

Είναι  $\hat{\Delta AE} = 180^\circ - \hat{E\Delta\Gamma} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$ .

Οπότε στο  $A\Delta EB$  έχουμε  $\hat{A} = \hat{E} = 90^\circ$ ,  $\hat{B} = 50^\circ$  και  $\hat{\Delta} = 130^\circ$ .

### 117 Θέμα 2 - 34778

α. i. Είναι  $\hat{AB\Delta} = \hat{BAx} = \frac{\hat{A_{εξ}}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$ , ως εντός εναλλάξ.

ii. Είναι  $\hat{BA\Delta} = 180^\circ - \hat{A_{εξ}} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ .

Στο τρίγωνο  $AB\Delta$  έχουμε

$\hat{BA\Delta} + \hat{AB\Delta} + \hat{A\Delta B} = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + 60^\circ + \hat{A\Delta B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A\Delta B} = 60^\circ$

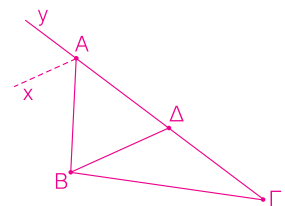
Άρα  $\hat{AB\Delta} = \hat{A\Delta B}$ , οπότε το τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι ισόπλευρο.

iii. Είναι  $A\Gamma - AB = A\Gamma - A\Delta = \Delta\Gamma$ .

β. Είναι: •  $\hat{B\Delta A} = 2\hat{\Gamma} \Leftrightarrow 60^\circ = 2\hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$

•  $\hat{A\Delta B} = 60^\circ$ , οπότε  $\hat{B\Delta\Gamma} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

•  $\hat{\Delta B\Gamma} = 180^\circ - \hat{B\Delta\Gamma} - \hat{\Gamma} = 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ$



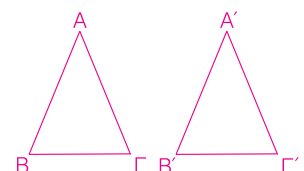
### 118 Θέμα 2 - 34493

α. Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  έχουν:

- $AB = A'B'$
- $A\Gamma = A'\Gamma'$
- $\hat{A} = \hat{A}'$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Επειδή τα τρίγωνα είναι ισοσκελή έχουμε  $\hat{B} = \hat{\Gamma}$  και  $\hat{B}' = \hat{\Gamma}'$ .





Επειδή  $\hat{B} = \hat{B}'$ , έχουμε  $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$ .

Επειδή τα τρίγωνα έχουν τις δύο γωνίες τους ίσες θα έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες, δηλαδή  $\hat{A} = \hat{A}'$ .  
Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  έχουν:

- $A\Gamma = A'\Gamma'$
- $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$
- $\hat{A} = \hat{A}'$

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ).

### 119 Θέμα 2 - 14884

- α. Τα τρίγωνα  $AEZ$  και  $AB\Delta$  έχουν:
- $AE = AB$
  - $AZ = A\Delta$
  - $\hat{EAZ} = \hat{\Delta AB}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Είναι:

- $\hat{\Delta AB} + \hat{BAE} = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$ , οπότε τα  $\Delta, A$  και  $E$  είναι συνευθειακά.
- $\hat{BEA} = 60^\circ$  και  $\hat{Z\Delta A} = 60^\circ$ , οπότε  $\hat{BEA} = \hat{Z\Delta A}$ .

Επειδή οι εντός εναλλάξ γωνίες  $\hat{B\hat{E}\Delta}$  και  $\hat{Z\hat{\Delta}E}$  είναι ίσες, έχουμε  $EB // Z\Delta$ .

### 120 Θέμα 2 - 1851

- α. Είναι  $\hat{B}_1 = 70^\circ$  και  $2\hat{\Gamma EB} = 70^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma EB} = 35^\circ$ .

Η  $BE$  είναι διχοτόμος της  $\hat{B}_{εξ}$  άρα  $\hat{B}_2 = \hat{B}_1 = 70^\circ$ .

Η γωνία  $\hat{B}_2$  είναι η εξωτερική του τριγώνου  $EB\Gamma$ , άρα  $\hat{B}_2 = \hat{E\Gamma B} + \hat{\Gamma EB} \Leftrightarrow 70^\circ = \hat{E\Gamma B} + 35^\circ \Leftrightarrow \hat{E\Gamma B} = 35^\circ$ .

Δηλαδή  $\hat{E\Gamma B} = \hat{\Gamma EB} = 35^\circ$ , άρα το τρίγωνο  $\Gamma BE$  είναι ισοσκελές.

- β. • Η  $BE$  είναι εξωτερική διχοτόμος, άρα  $\hat{B}_{εξ} = 2\hat{B}_1 = 2 \cdot 70^\circ = 140^\circ$ , οπότε  $B = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$ .
- Η  $\Gamma E$  διχοτομεί τη γωνία  $\hat{\Gamma}$ , άρα  $\hat{\Gamma} = 2\hat{E\Gamma B} = 70^\circ$ .
  - Είναι  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + 40^\circ + 70^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 70^\circ$ .

### 121 Θέμα 2 - 12640

- α. Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου με  $n$  πλευρές είναι  $2 \cdot n - 4$  ορθές.

Το άθροισμα των γωνιών του πενταγώνου  $AB\Gamma\Delta E$  είναι:

$$(2n - 4) \cdot 90^\circ = (2 \cdot 5 - 4) \cdot 90^\circ = 6 \cdot 90^\circ = 540^\circ$$

Δηλαδή έχουμε:  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} + \hat{E} = 540^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{B} + 100^\circ + 140^\circ + 80^\circ = 540^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{B} = 220^\circ$

- β. Στο τρίγωνο  $AOB$  είναι:  $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{O} = 180^\circ$  (1).

Όμως  $AO$  και  $BO$  είναι διχοτόμοι των γωνιών  $A$  και  $B$  αντίστοιχα, άρα:

$$\hat{A}_1 = \frac{\hat{A}}{2} \text{ και } \hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}. \text{ Έτσι } \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \stackrel{\alpha.}{=} \frac{220^\circ}{2} = 110^\circ.$$

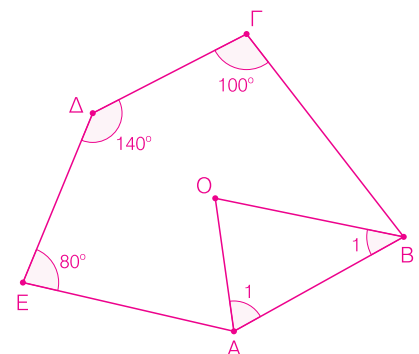
Οπότε η (1)  $\Leftrightarrow 110^\circ + \hat{O} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{O} = 70^\circ$ , δηλαδή  $\hat{AOB} = 70^\circ$ .

### 122 Θέμα 2 - 12644

- α. Είναι: •  $\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}_{εξ} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} + 130^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 50^\circ$

- $\hat{\Delta} + \hat{\Delta}_{εξ} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta} + 110^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 70^\circ$

- β. Στο τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$ , έχουμε:  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{B} + 50^\circ + 70^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{B} = 240^\circ$ .



γ. Στο τρίγωνο AOB είναι:  $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{O} = 180^\circ$  (1).

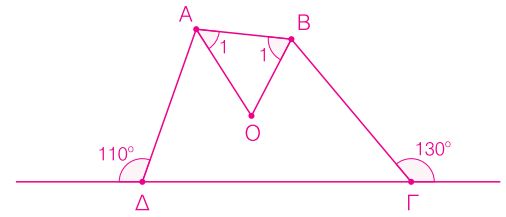
Οι AO και BO είναι διχοτόμοι των γωνιών A και B αντίστοιχα,

$$\text{άρα: } \hat{A}_1 = \frac{\hat{A}}{2} \text{ και } \hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}.$$

$$\text{Οπότε } \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} = \frac{240^\circ}{2} = 120^\circ.$$

$$\text{Άρα η (1)} \Leftrightarrow 120^\circ + \hat{O} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{O} = 60^\circ.$$

Δηλαδή  $\hat{AOB} = 60^\circ$ .



### 123 Θέμα 2 - 13619

α. • Είναι:  $\hat{A}_{εξ} + \hat{A} = 180^\circ \Leftrightarrow 100^\circ + \hat{A} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 80^\circ$

• Στο τετράπλευρο ABΓΔ ισχύει:

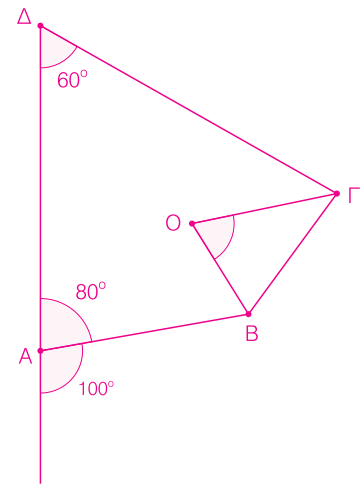
$$\begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} &= 360^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + 220^\circ + \hat{\Delta} = 360^\circ \\ &\Leftrightarrow \hat{\Delta} = 360^\circ - 80^\circ - 220^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 60^\circ \end{aligned}$$

β. Στο τρίγωνο BΓO ισχύει:

$$\hat{OB\Gamma} + \hat{B\Gamma O} + \hat{BO\Gamma} = 180^\circ, (1)$$

$$\text{Είναι } \hat{OB\Gamma} + \hat{B\Gamma O} = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \frac{\hat{B} + \hat{\Gamma}}{2} = \frac{220^\circ}{2} = 110^\circ.$$

$$\text{Οπότε η (1)} \Leftrightarrow 110^\circ + \hat{BO\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{BO\Gamma} = 70^\circ.$$



### 124 Θέμα 2 - 13749

α. Στο τετράπλευρο ABΓΔ έχουμε  $\hat{\alpha} + 130^\circ + 65^\circ + 85^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 360^\circ - 280^\circ \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 80^\circ$ .

β. Είναι  $24^\circ + \hat{\omega} + \hat{\alpha} = 180^\circ \Leftrightarrow 24^\circ + \hat{\omega} + 80^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\omega} = 76^\circ$

γ. Είναι: •  $AD = AE$  άρα το τρίγωνο AΔE είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά EΔ, οπότε  $\hat{\phi} = \hat{A\Delta E}$ .

$$\bullet \phi + \hat{A\Delta E} + \hat{\omega} = 180^\circ \Leftrightarrow \phi + \phi + 76^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\phi = 180^\circ - 76^\circ \Leftrightarrow 2\phi = 104^\circ \Leftrightarrow \phi = 52^\circ$$

### 125 Θέμα 4 - 1708

α. i. Στο τρίγωνο ABE, το AD είναι ύψος και διάμεσος. Οπότε το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.

ii. Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές, οπότε  $\hat{A\epsilon B} = \hat{B} = 50^\circ$ .

$$\text{Είναι } \hat{E\hat{A}B} + \hat{B} + \hat{A\epsilon B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{E\hat{A}B} + 50^\circ + 50^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{E\hat{A}B} = 80^\circ.$$

$$\text{Οπότε } \hat{\Gamma\hat{A}E} = \hat{\Gamma\hat{A}B} - \hat{E\hat{A}B} = 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ.$$

β. Είναι: •  $\hat{Z} = 90^\circ$

$$\bullet \hat{Z\epsilon\Gamma} = \hat{A\epsilon B} = 50^\circ$$

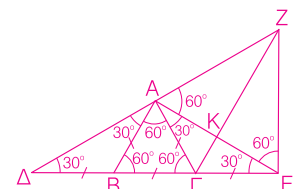
$$\bullet \hat{Z\hat{E}E} + \hat{Z} + \hat{Z\epsilon\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Z\hat{E}E} + 90^\circ + 50^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Z\hat{E}E} = 40^\circ$$

### 126 Θέμα 4 - 1819

α. Είναι  $AB = B\Gamma = \Gamma A = B\Delta = \Gamma E$ .

Από τα ισοσκελή τρίγωνα ΓAE και BΔA έχουμε αντίστοιχα:

$$\bullet \hat{A\Gamma E} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$



$$\bullet \hat{\Gamma}\hat{A}E = \hat{A}E\hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

$$\bullet \hat{A}B\hat{\Delta} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\bullet \hat{B}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{B}\hat{\Delta}\hat{A} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

$$\beta. \text{Είναι: } \bullet \hat{Z}\hat{A}E = 180^\circ - \hat{\Delta}\hat{A}E = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$\bullet \hat{A}\hat{E}Z = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

Οπότε  $\hat{Z}\hat{A}E = \hat{A}\hat{E}Z$ , άρα  $ZA = ZE$ .

Επειδή  $ZA = ZE$  και  $GA = GE$  τα  $\Gamma, Z$  ανήκουν στη μεσοκάθετο του  $AE$ .

Άρα η  $GZ$  είναι η μεσοκάθετος του  $AE$ .

$\gamma.$  Είναι:  $\bullet GZ \perp AE$ , αφού η  $GZ$  μεσοκάθετη του  $AE$

$$\bullet \hat{B}\hat{A}E = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ, \text{ άρα } BA \perp AE$$

Επομένως  $AB \parallel GZ$ .

### 127 Θέμα 4 - 13537

$\alpha.$  Έστω  $\hat{A} = \omega$  (1).

$i.$  Είναι  $AD = BD$ , άρα το τρίγωνο  $ABD$  είναι ισοσκελές με βάση  $AB$  και

$$\hat{B}_1 = \omega \quad (2).$$

Η γωνία  $\hat{\Delta}_1$  είναι εξωτερική στο τρίγωνο  $ABD$ , άρα είναι

$$\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1 + \hat{A} = \omega + \omega = 2\omega \quad (3).$$

Είναι  $B\Gamma = BD$ , άρα το τρίγωνο  $B\Gamma D$  είναι ισοσκελές με βάση  $\Gamma D$  και

$$\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_1 \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 2\omega \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 2\hat{A}.$$

$ii.$  Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $AB = A\Gamma$ , οπότε  $\hat{B} = \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{B} = 2\omega$ .

Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει ότι  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \omega + 2\omega + 2\omega = 180^\circ \Leftrightarrow 5\omega = 180^\circ \Leftrightarrow \omega = 36^\circ$ .

Άρα  $\hat{A} = 36^\circ$ .

$iii.$  Για να αποδείξουμε ότι το τρίγωνο  $ADE$  είναι ισοσκελές θα αποδείξουμε ότι  $AE = DE$ .

Είναι  $AE = \Delta\Gamma$ , οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι  $DE = \Delta\Gamma$ .

Τα τρίγωνα  $B\Gamma D$  και  $BE\Delta$  τα οποία έχουν:

$$\bullet BD = B\Delta$$

$$\bullet B\Gamma = BE, \text{ γιατί } B\Gamma = AD \text{ και } BE = AD \text{ ως διαφορές των ίσων τμημάτων } AB = A\Gamma \text{ και } AE = \Gamma\Delta$$

$$\bullet \hat{B}_1 = \hat{B}_2, \text{ αφού } \hat{B}_1 = \omega = 36^\circ \text{ και } \hat{B}_2 = \hat{B} - \hat{B}_1 = 2\omega - \omega = 36^\circ$$

Άρα είναι ίσα, (ΠΓΠ), οπότε  $DE = \Delta\Gamma$ .

$\beta.$  Είναι  $B\Gamma = BE$ , οπότε  $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ .

Έχουμε ότι  $\hat{\Delta}_1 = 72^\circ$ , άρα  $\hat{\Delta}_2 = 72^\circ$ .

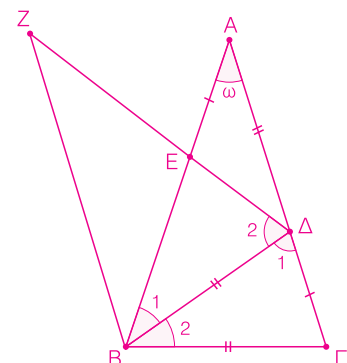
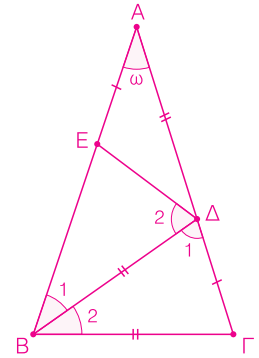
Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $ZB\Delta$  έχουν:

$$\bullet B\Gamma = B\Delta,$$

$$\bullet A\Gamma = Z\Delta,$$

$$\bullet \hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_2 = 72^\circ,$$

Άρα είναι ίσα, (ΠΓΠ). Όμως το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές, οπότε και το τρίγωνο  $B\Delta Z$  είναι ισοσκελές.



### 128 Θέμα 4 - 1707

α. Η  $ME$  είναι η μεσοκάθετος του  $BΓ$ , οπότε  $EB = EG$ , άρα το τρίγωνο  $EBΓ$  είναι ισοσκελές.

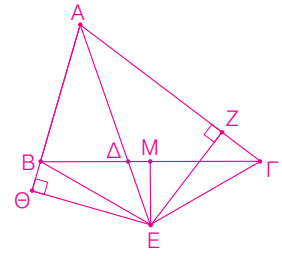
β. Επειδή το  $E$  ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας  $\hat{A}$ , θα ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας, οπότε  $EΘ = EZ$ . Τα ορθογώνια τρίγωνα  $ΘBE$  και  $ZΓE$  έχουν:

- $EB = EG$
- $EΘ = EZ$

Οπότε είναι ίσα.

γ. Επειδή τα τρίγωνα  $ΘBE$  και  $ZΓE$  είναι ίσα, έχουμε  $\hat{AΓE} = \hat{ΘBE}$ .

Οπότε  $\hat{AΓE} + \hat{ABE} = \hat{ΘBE} + \hat{ABE} = 180^\circ$ .



### 129 Θέμα 4 - 1792

α. Η  $\hat{ZΔΓ}$  είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο  $AEΔ$ , οπότε  $\hat{ZΔΓ} = \hat{ΔEA} + \hat{EΔA} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ .

β. Στο τρίγωνο  $AZΔ$  η  $AE$  είναι διχοτόμος και ύψος, άρα είναι και διάμεσος.

Οπότε η  $AE$  είναι μεσοκάθετος του  $ZΔ$ .

Επειδή το  $K$  ανήκει στη μεσοκάθετο του  $ZΔ$ , έχουμε  $KZ = KΔ$ .

γ. Στο τρίγωνο  $ΔΗΓ$  είναι  $\hat{ZHΓ} = 180^\circ - \hat{ZΔΓ} - \hat{\Gamma} = 180^\circ - (90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}) - \hat{\Gamma} = 180^\circ - 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} - \hat{\Gamma}$   
 $= 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} - \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - \hat{A} - 2\hat{\Gamma}}{2} = \frac{\hat{B} + \hat{\Gamma} - 2\hat{\Gamma}}{2} = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$

### 130 Θέμα 4 - 37097

α. • Στο ισοπλευρο τρίγωνο  $ABΓ$  το ύψος  $ΓE$  είναι και διάμεσος, οπότε το  $E$  είναι το μέσο της  $AB$ .

Οπότε  $BΔ = \frac{BΓ}{2} \Leftrightarrow BΔ = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow BΔ = BE$ .

Άρα το τρίγωνο  $BΔE$  είναι ισοσκελές.

- Είναι:
  - $\hat{AΘZ} = \hat{B} = 60^\circ$ , ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη
  - $\hat{AZΘ} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$ , ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη
  - $\hat{A} = 60^\circ$

Άρα το τρίγωνο  $AΘZ$  είναι ισόπλευρο.

β. Το τρίγωνο  $BΔE$  είναι ισοσκελές με  $\hat{\Delta} = \hat{ΔEB}$  και η  $\hat{B}$  είναι εξωτερική γωνία, οπότε

$\hat{B} = \hat{\Delta} + \hat{ΔEB} \Leftrightarrow 60^\circ = \hat{\Delta} + \hat{\Delta} \Leftrightarrow 2\hat{\Delta} = 60^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 30^\circ$ .

Οπότε και  $\hat{ΔEB} = 30^\circ$ .

- Είναι:
- $\hat{EΘZ} = 180^\circ - \hat{AΘZ} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
  - $\hat{ΘEZ} = \hat{ΔEB} = 30^\circ$
  - $\hat{ΘZE} = \hat{\Delta} = 30^\circ$ , ως εντός εναλλάξ

γ. Επειδή:
 

- $\hat{ΘEZ} = \hat{ΘZE}$  το τρίγωνο  $ΘEZ$  είναι ισοσκελές, οπότε  $ΘZ = ΘE$
- $AΘ = ΘZ$ , αφού το τρίγωνο  $AΘZ$  είναι ισόπλευρο έχουμε  $AΘ = ΘE$

Άρα  $AE = AΘ + ΘE = 2AΘ = 2ΘZ$ .

- δ. Είναι:
- $AB = 2AE = 2 \cdot 2ΘE = 4ΘE$ , άρα  $3AB = 12ΘE$
  - $ΘB = EΘ + EB = EΘ + AE = 3ΘE$ , άρα  $4ΘB = 12ΘE$

Οπότε  $3AB = 4ΘB$ .

### 131 Θέμα 4 - 37164

**α.** Επειδή το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές και η  $AM$  είναι διάμεσος, θα είναι και ύψος. Αφού  $AM \perp B\Gamma$  και  $\Delta\Gamma \perp B\Gamma$ , προκύπτει  $AM \parallel \Gamma\Delta$ .

**β.** Είναι: •  $\Gamma\Delta = AB$  και  $AB = A\Gamma$ , οπότε  $\Gamma\Delta = \Gamma A$ , άρα  $\widehat{\Gamma\Delta A} = \widehat{\Gamma\Delta A}$   
•  $\widehat{\Gamma\Delta A} = \widehat{\Delta\Delta M}$ , ως εντός εναλλάξ

Άρα  $\widehat{\Gamma\Delta A} = \widehat{\Delta\Delta M}$ , οπότε η  $A\Delta$  είναι η διχοτόμος της  $M\Delta\Gamma$ .

**γ.** Είναι  $\widehat{\Delta A\Gamma} = \frac{\widehat{M\Delta\Gamma}}{2} = \frac{90^\circ - \widehat{\Gamma}}{2} = 45^\circ - \frac{\widehat{\Gamma}}{2} = 45^\circ - \frac{\widehat{B}}{2}$ , αφού το τρίγωνο  $M\Delta\Gamma$  είναι ορθογώνιο και  $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ .

**δ.** Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο  $A\Gamma\Delta$  είναι:  $A\Delta < A\Gamma + \Gamma\Delta \Leftrightarrow A\Delta < AB + AB \Leftrightarrow A\Delta < 2AB$ .

### 132 Θέμα 4 - 1874

**α.** Φέρουμε τις  $OB$  και  $OG$ . Τα τρίγωνα  $OAB$  και  $OAG$  είναι ισόπλευρα, οπότε  $\widehat{B\Delta\Gamma} = \widehat{B\Delta O} + \widehat{O\Delta\Gamma} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$ .

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $\Delta AO$  είναι  $\widehat{\Delta} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$  και  $\widehat{B\Delta O} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ .

Άρα  $\widehat{\Delta} = \widehat{B\Delta O}$ , οπότε το τρίγωνο  $BO\Delta$  είναι ισοσκελές με  $B\Delta = BO$ .

Επομένως  $B\Delta = BA$ , άρα το  $B$  είναι το μέσο του  $A\Delta$ .

Όμοια το  $\Gamma$  είναι το μέσο του  $A\Gamma$ .

**γ.** Είναι  $\widehat{A\Delta\Gamma} = 60^\circ$  και  $\widehat{B\Delta O} = 60^\circ$  επειδή τα τρίγωνα  $A\Delta\Gamma$  και  $A\Delta O$  είναι ισόπλευρα.

Οπότε: •  $\widehat{K\Delta\Gamma} = \widehat{K\Delta O} + \widehat{A\Delta\Gamma} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$

•  $\widehat{B\Delta\Gamma} = \widehat{B\Delta O} + \widehat{A\Delta\Gamma} = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$

Άρα οι επίκεντρες γωνίες  $\widehat{K\Delta\Gamma}$  και  $\widehat{B\Delta\Gamma}$  είναι ίσες.

Οπότε τα τόξα  $\widehat{K\Gamma}$  και  $\widehat{B\Gamma}$  είναι ίσα, άρα και οι αντίστοιχες χορδές  $K\Gamma$  και  $B\Gamma$  είναι ίσες, δηλαδή  $K\Gamma = B\Gamma$ .

### 133 Θέμα 4 - 1894

**α. i.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο: •  $\widehat{A\Delta\Gamma}$  έχουμε  $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{B} = 90^\circ - \widehat{\Gamma}$   
•  $\widehat{\Delta\Delta\Gamma}$  έχουμε  $\widehat{\Delta\Delta\Gamma} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Delta\Delta\Gamma} = 90^\circ - \widehat{\Gamma}$

Οπότε  $\widehat{B} = \widehat{\Delta\Delta\Gamma}$ .

**ii.** Τα ορθογώνια τρίγωνα  $\Delta\Delta\Gamma$  και  $\Delta\Delta\Gamma$  έχουν:

•  $\widehat{\Delta\Delta\Gamma} = \widehat{B}$

•  $\Delta\Delta = \Delta\Delta$ , αφού η  $A\Delta$  είναι διχοτόμος της  $\widehat{A}$

Οπότε είναι ίσα, άρα  $\Delta\Gamma = \Delta\Gamma$ .

**β.** Τα ορθογώνια τρίγωνα  $\Delta\Delta\Gamma$  και  $\Delta\Delta\Gamma$  έχουν:

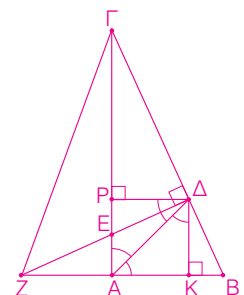
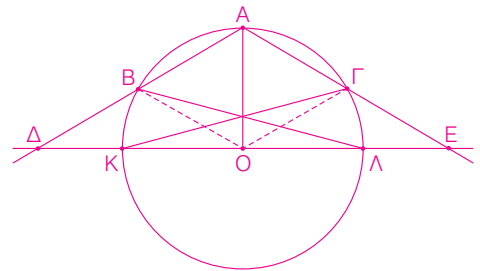
•  $\widehat{\Delta\Delta\Gamma} = \widehat{B}$ , από το **α.i.**

•  $\Delta\Delta = \Delta\Delta$ , από το **α.ii.**

Οπότε τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα  $\Delta\Gamma = \Delta\Gamma$ .

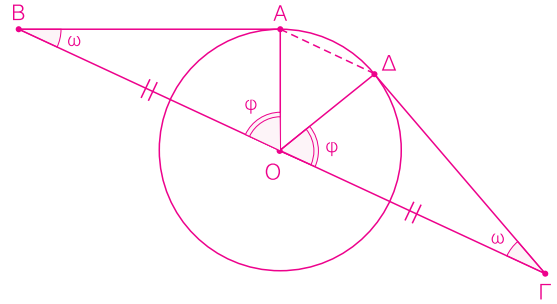
Επομένως, το τρίγωνο  $\Delta\Gamma\Gamma$  είναι ισοσκελές και ορθογώνιο.

Άρα  $\widehat{\Delta\Gamma\Gamma} = \widehat{\Delta\Gamma\Gamma}$  και  $\widehat{\Delta\Gamma\Gamma} + \widehat{\Delta\Gamma\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{\Delta\Gamma\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Delta\Gamma\Gamma} = 45^\circ$ .



**134 Θέμα 4 - 13750**

**α. i.** Είναι  $OA \perp AB$  και  $OD \perp \Delta\Gamma$  διότι  $OA$  και  $OD$  είναι ακτίνες στα σημεία επαφής  $A$  και  $\Delta$  αντίστοιχα.



Τα τρίγωνα  $OAB$  και  $OD\Gamma$ , έχουν:

- $OA = OD = R$ ,
- $OB = O\Gamma$ ,
- $\widehat{OAB} = \widehat{OD\Gamma} = 90^\circ$ .

Άρα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση, οπότε  $AB = \Delta\Gamma$ .

**ii.** Από την ισότητα των ορθογωνίων τριγώνων του **α. i.** ερωτήματος προκύπτει ότι  $\widehat{OBA} = \widehat{O\Gamma\Delta} = \omega$  και  $\widehat{AOB} = \widehat{DO\Gamma} = \varphi$  με  $\omega + \varphi = 90^\circ$  (1), ως άθροισμα οξείων γωνιών ορθογωνίων τριγώνων.

Για τη γωνία  $\widehat{AOD}$  έχουμε:  $\widehat{AOD} = 180^\circ - 2\varphi = 2(90^\circ - \varphi) = 2\omega$ , λόγω της (1).

Το τρίγωνο  $AO\Delta$  είναι ισοσκελές, αφού  $OA = OD = R$ , οπότε

$$\widehat{OAD} = \widehat{ODA} = \frac{180^\circ - \widehat{AOD}}{2} = \frac{180^\circ - 2\omega}{2} = 90^\circ - \omega = \varphi, \text{ λόγω της (1).}$$

Άρα  $\widehat{OAD} = \widehat{AOB} = \varphi$  και είναι γωνίες εντός εναλλάξ των  $AD$  και  $B\Gamma$  που τέμνονται από την  $OA$ , οπότε  $AD \parallel B\Gamma$ .

**β.** Αν  $BA = R$  τότε από το **α.** ερώτημα τα ίσα ορθογώνια τρίγωνα  $OAB$  και  $OD\Gamma$  θα είναι και ισοσκελή, αφού  $OA = AB = OD = \Delta\Gamma = R$ .

Επομένως  $\omega = \varphi = 45^\circ$ , άρα  $\widehat{AOD} = 180^\circ - 2\varphi = 90^\circ$ , οπότε το ισοσκελές τρίγωνο  $OAD$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

**135 Θέμα 4 - 13697**

**α.** Είναι: •  $\widehat{AKB} + \widehat{BKE} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{AKB} + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{AKB} = 180^\circ - 120^\circ$   
 $\Leftrightarrow \widehat{AKB} = 60^\circ$

- $\widehat{AKB} = \widehat{KBL}$ , ως εντός εναλλάξ, οπότε  $\widehat{KBL} = 60^\circ$ .
- $\widehat{KBL} = \widehat{BL\Gamma}$ , ως εντός εναλλάξ, οπότε  $\widehat{BL\Gamma} = 60^\circ$ .

Επομένως  $\widehat{AKB} = \widehat{KBL} = \widehat{BL\Gamma} = 60^\circ$  (4).

**β.** Τα τρίγωνα  $AKB$  και  $BL\Gamma$  έχουν:

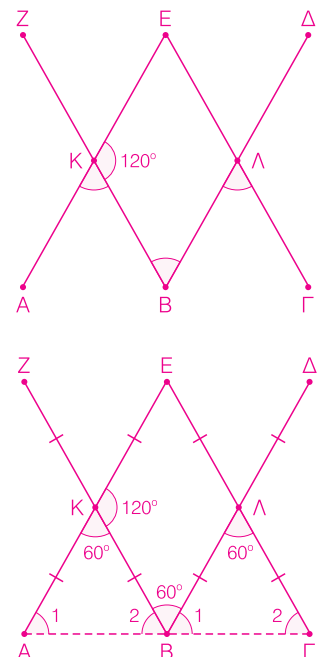
- $AK = BL = 20\text{ cm}$ , ως μισά των ίσων τμημάτων  $AE$  και  $BD$ .
- $KB = L\Gamma = 20\text{ cm}$ , ως μισά των ίσων τμημάτων  $BZ$  και  $GE$ .
- $\widehat{AKB} = \widehat{BL\Gamma} = 60^\circ$

Επομένως είναι ίσα, (ΠΓΠ), οπότε  $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$  και  $\widehat{B_2} = \widehat{\Gamma_2}$ .

Είναι  $AK = KB = 20\text{ cm}$ , άρα το τρίγωνο  $AKB$  θα είναι ισοσκελές με βάση  $AB$ , οπότε  $\widehat{A_1} = \widehat{B_2}$ .

Για τις γωνίες του τριγώνου  $AKB$  ισχύει ότι

$$\widehat{A_1} + \widehat{AKB} + \widehat{B_2} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{A_1} + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{A_1} = 180^\circ - 60^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{A_1} = 120^\circ \Leftrightarrow \widehat{A_1} = 60^\circ$$



Άρα  $\hat{A}KB = \hat{A}_1 = \hat{B}_2 = 60^\circ$ , οπότε το τρίγωνο  $AKB$  θα είναι ισόπλευρο.

Επομένως και το ίσο του τρίγωνο  $B\Lambda\Gamma$  θα είναι και αυτό ισόπλευρο, οπότε  $\hat{B}\Lambda\Gamma = \hat{\Gamma}_2 = \hat{B}_1 = 60^\circ$ .

γ. Είναι  $\hat{A}B\Gamma = \hat{B}_2 + \hat{K}B\Lambda + \hat{B}_1 = 3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$ , αφού είναι  $\hat{B}_2 = \hat{B}_1 = 60^\circ$ , ως γωνίες ισοπλεύρων τριγώνων  $AKB$  και  $B\Lambda\Gamma$ . Επομένως, τα σημεία  $A, B$  και  $\Gamma$  ανήκουν στην ίδια ευθεία.

### 136 Θέμα 4 - 37125

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα  $BAE$  και  $\Gamma AZ$  έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- $\hat{BAE} = \hat{\Gamma AZ}$

Οπότε είναι ίσα, άρα  $AE = AZ$ .

Επομένως το τρίγωνο  $EAZ$  είναι ισοσκελές.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα  $A\Delta B$  και  $A\Delta\Gamma$  έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- $A\Delta$  κοινή

Οπότε είναι ίσα, άρα  $\hat{BA\Delta} = \hat{\Delta A\Gamma}$ .

Επομένως η  $A\Delta$  είναι η διχοτόμος της  $x'Ax$ .

γ. Έστω  $K$  το σημείο τομής των  $A\Delta$  και  $B\Gamma$ .

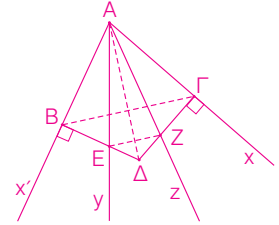
Στο ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  η  $AK$  είναι διχοτόμος άρα και ύψος.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $AK\Gamma$  είναι  $\hat{\Gamma AK} + \hat{A\Gamma K} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma A\Delta} = 90^\circ - \hat{A\Gamma K}$ .

Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με βάση την  $B\Gamma$ , οπότε  $\hat{A\Gamma B} = \hat{A\hat{B}\Gamma}$ .

Είναι  $\hat{\Gamma B\Delta} = 90^\circ - \hat{A\hat{B}\Gamma} = 90^\circ - \hat{A\Gamma B} = 90^\circ - \hat{A\Gamma K}$ .

Άρα  $\hat{\Gamma A\Delta} = \hat{\Gamma B\Delta}$ .



### 137 Θέμα 2 - 34394

α. Είναι:

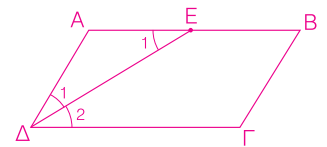
- $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ , αφού η  $BE$  διχοτόμος
- $\hat{E}_1 = \hat{\Delta}_2$ , ως εντός εναλλάξ.

Οπότε  $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$  άρα το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισοσκελές.

β. Έχουμε:

- $A\Delta = AE$ , αφού το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισοσκελές
- $AB = 2A\Delta \Leftrightarrow AB = 2AE$

Οπότε το  $E$  είναι το μέσο του  $AB$ .



### 138 Θέμα 2 - 36090

α. Είναι  $\hat{HBZ} = 180^\circ - \hat{B} = 180^\circ - \hat{\Delta} = \hat{E\Delta\Theta}$ .

β. Είναι:

- $\hat{\Gamma ZE} = \hat{A EZ}$ , ως εντός εναλλάξ
- $\hat{BZH} = \hat{\Gamma ZE}$ , ως κατακορυφήν
- $\hat{\Delta E\Theta} = \hat{A EZ}$ , ως κατακορυφήν

Οπότε  $\hat{BZH} = \hat{\Delta E\Theta}$ .

γ. Είναι  $A\Delta = B\Gamma$  και  $AE = \Gamma Z$ .

Οπότε  $\Delta E = A\Delta - AE = B\Gamma - \Gamma Z = BZ$ .

Τα τρίγωνα  $\Delta E\Theta$  και  $BZH$  έχουν:

- $\Delta E = BZ$
- $\hat{HBZ} = \hat{E\Delta\Theta}$
- $\hat{BZH} = \hat{\Delta E\Theta}$

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ), άρα  $BH = \Theta\Delta$ .

### 139 Θέμα 2 - 13755

α. Είναι  $ZA \parallel \Delta\Gamma$  και  $Z\Delta \parallel A\Gamma$ .

Άρα το τετράπλευρο  $Z\Delta\Gamma A$  έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

Είναι  $AE \parallel B\Delta$  και  $\Delta E \parallel BA$ .

Άρα το τετράπλευρο  $AB\Delta E$  έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

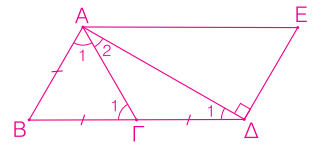
β. Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  έχουν:

- $AB = \Delta E$ , ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου  $AB\Delta E$
- $A\Gamma = \Delta Z$ , ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου  $Z\Delta\Gamma A$
- $B\Gamma = ZE$ , διότι  $B\Gamma = B\Delta + \Delta\Gamma$  και  $ZE = ZA + AE + \Delta\Gamma + B\Delta$

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΠΠ τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  είναι ίσα.

### 140 Θέμα 2 - 36115

- α. Είναι:
- $\hat{A}_1 = \hat{B} = \hat{\Gamma}_1 = 60^\circ$
  - $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = 180^\circ - \hat{\Gamma}_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
  - $\Gamma A = \Gamma\Delta$ , άρα  $\hat{A}_2 = \hat{\Delta}_1$



Στο τρίγωνο  $A\Gamma\Delta$  είναι  $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} + \hat{\Delta}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Delta}_1 = 60^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 = 30^\circ$ .

Οπότε  $\hat{A}_2 = \hat{\Delta}_1 = 30^\circ$  και  $B\hat{A}\hat{\Delta} = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ .

- β. Είναι:
- $B\hat{A}\hat{\Delta} = 90^\circ$ , οπότε  $BA \perp A\Delta$  και  $E\Delta \perp A\Delta$ , άρα  $AB \parallel \Delta E$
  - $B\Gamma = \Delta E \Rightarrow AB = \Delta E$

Άρα το  $AB\Delta E$  είναι παραλληλόγραμμο.

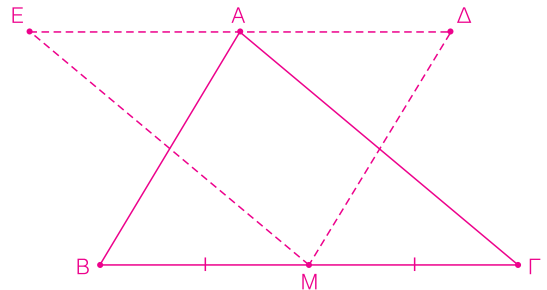
### 141 Θέμα 2 - 13825

α. Το τετράπλευρο  $A\Delta M B$  έχει  $AB = \Delta M$  και  $AB \parallel \Delta M$  άρα είναι παραλληλόγραμμο.

Το τετράπλευρο  $A\Gamma M E$  έχει  $A\Gamma = EM$  και  $A\Gamma \parallel EM$  άρα είναι παραλληλόγραμμο.

- β. Είναι:
- $\Delta A = BM$ , ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου  $A\Delta M B$
  - $A E = \Gamma M$ , ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου  $A\Gamma M E$
  - το σημείο  $M$  το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$ , επομένως  $BM = \Gamma M$ .

Άρα  $\Delta A = A E$ .



### 142 Θέμα 2 - 1654

α. Επειδή τα  $AB\Delta\Gamma$  και  $B\Delta EZ$  είναι παραλληλόγραμμα έχουμε  $A\Gamma \parallel B\Delta$  και  $B\Delta \parallel ZE$  αντίστοιχα. Άρα  $A\Gamma \parallel ZE$ , οπότε το  $A\Gamma EZ$  είναι παραλληλόγραμμο.

β. Τα τρίγωνα  $ABZ$  και  $\Gamma\Delta E$  έχουν:

- $AB = \Gamma\Delta$ , αφού το  $AB\Delta\Gamma$  είναι παραλληλόγραμμο
- $BZ = \Delta E$ , αφού το  $BZ\Delta E$  είναι παραλληλόγραμμο
- $AZ = \Gamma E$ , αφού το  $AZ\Gamma E$  είναι παραλληλόγραμμο

Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ), οπότε  $\hat{A}\hat{B}\hat{Z} = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{E}$ .



### 143 Θέμα 2 - 36225

**α.** Τα τρίγωνα  $\triangle ADE$  και  $\triangle BZG$  έχουν:

- $AD = BG$ , ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου.
- $AE = GZ$ , αφού  $AE = AB$ ,  $GD = GZ$  και  $AB = GD$ , ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου.

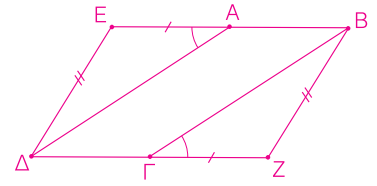
•  $\widehat{BZG} = \widehat{EAD}$ , ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{G}$  του παραλληλογράμμου  $ABGD$ .

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

**β.** Από την ισότητα των τριγώνων  $\triangle ADE$  και  $\triangle BZG$  έχουμε  $BZ = ED$ .

Είναι  $EB = 2AB = 2GD = 2ZG$ .

Οπότε το τετράπλευρο  $EBZD$  έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.



### 144 Θέμα 2 - 36105

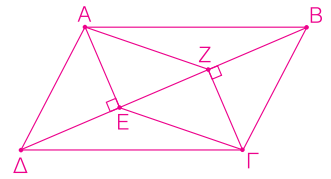
**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα  $\triangle EAD$  και  $\triangle ZGB$  έχουν:

- $AD = BG$ , αφού το  $ABGD$  είναι παραλληλόγραμμο
- $\widehat{ADE} = \widehat{GBZ}$  ως εντός εναλλάξ των παράλληλων  $AD$ ,  $BG$  που τέμνονται από τη  $BD$ .

Άρα είναι ίσα, οπότε  $AE = GZ$ .

**β.** Είναι: •  $AE \perp BD$  και  $GZ \perp BD$ , οπότε  $AE \parallel GZ$   
•  $AE = GZ$  (από το **α.** ερώτημα)

Άρα το  $AEGZ$  είναι παραλληλόγραμμο.



### 145 Θέμα 2 - 36348

**α.** Είναι: •  $GO \perp OA$  και  $BA \perp OA$ , οπότε  $OG \parallel AB$   
•  $OG = AB$

Άρα το  $ABOG$  είναι παραλληλόγραμμο, οπότε τα  $AO$  και  $BG$  διχοτομούνται.

**β.** Το ορθογώνιο τρίγωνο  $\triangle OAG$  είναι ισοσκελές, αφού  $OA = OG = \rho$ , οπότε  $\widehat{OAG} = \widehat{OGA} = 45^\circ$ .

Το  $ABOG$  είναι παραλληλόγραμμο, οπότε:

- $\widehat{ABO} = \widehat{OGA} = 45^\circ$
- $\widehat{GAB} = \widehat{GOB} = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$

### 146 Θέμα 2 - 34425

**α.** Είναι  $DA = DG$  και  $DE = DM$ .

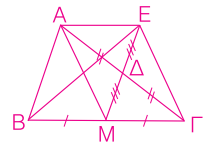
Οπότε το  $AMGE$  είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

**β.** Είναι  $AE \parallel MG$ , οπότε  $AE \parallel BM$ .

Άρα το  $AEMB$  είναι παραλληλόγραμμο.

Οπότε οι διαγώνιοί του  $BE$  και  $AM$  διχοτομούνται.

Άρα η  $BE$  διέρχεται από το μέσο της  $AM$ .



### 147 Θέμα 2 - 34388

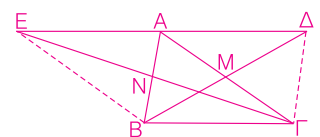
**α.** Είναι  $MA = MG$  και  $MD = MB$ , οπότε το  $ADGB$  είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Άρα  $AD \parallel BG$ .

Είναι  $NA = NB$  και  $NE = GN$ , οπότε το  $AEBG$  είναι παραλληλόγραμμο,

αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Άρα  $AE \parallel BG$ .

**β.** Από το **α.** ερώτημα αποδείξαμε ότι από το σημείο  $A$  διέρχονται τα τμήματα  $AE$  και  $AD$  που είναι παράλληλα στη  $BG$ .



Όμως από ένα σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική παράλληλη σ' αυτήν, οπότε τα τμήματα  $ΑΔ$  και  $ΑΕ$  έχουν τον ίδιο φορέα.

Άρα τα σημεία  $Ε$ ,  $Α$  και  $Δ$  είναι συνευθειακά.

### 148 Θέμα 2 - 34783

**α.** Επειδή  $ΑΑ' \perp ΒΔ$  και  $ΓΓ' \perp ΒΔ$ , έχουμε  $ΑΑ' \parallel ΓΓ'$ .

**β.** Τα ορθογώνια τρίγωνα  $ΑΑ'Δ$  και  $ΓΓ'Β$  έχουν:

- $ΑΔ = ΒΓ$ , ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου
  - $\hat{ΑΔΑ'} = \hat{ΓΒΓ'}$ , ως εντός εναλλάξ των παράλληλων  $ΑΔ$ ,  $ΒΓ$  που τέμνονται από τη  $ΒΔ$
- Άρα είναι ίσα, οπότε  $ΑΑ' = ΓΓ'$ .

**γ.** Από το **α.** και **β.** ερώτημα έχουμε

$ΑΑ' \parallel = ΓΓ'$ , οπότε το  $ΑΓ'ΓΑ'$  είναι παραλληλόγραμμο.

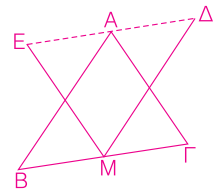
### 149 Θέμα 2 - 34391

**α.** • Επειδή  $ΜΔ \parallel = ΑΒ$ , το  $ΑΔΜΒ$  είναι παραλληλόγραμμο. Οπότε  $ΔΑ = ΜΒ$ .

- Αφού  $ΜΕ \parallel = ΑΓ$ , το  $ΑΕΜΓ$  είναι παραλληλόγραμμο. Οπότε  $ΑΕ = ΜΓ$ .
- Επειδή  $ΜΒ = ΜΓ$ , έχουμε  $ΑΔ = ΑΕ$ .

**β.** Τα τετράπλευρα  $ΑΔΜΒ$ ,  $ΑΕΜΓ$  είναι παραλληλόγραμμα, οπότε  $ΑΔ \parallel ΒΓ$  και  $ΑΕ \parallel ΒΓ$ . Επειδή από το  $Α$  διέρχεται μοναδική παράλληλη της  $ΒΓ$ , τα τμήματα  $ΑΔ$  και  $ΑΕ$  βρίσκονται στον ίδιο φορέα. Άρα τα  $Δ$ ,  $Α$ ,  $Ε$  είναι συνευθειακά.

**γ.** Είναι  $ΔΕ = ΑΔ + ΑΕ = ΜΒ + ΜΓ = ΒΓ$ .



### 150 Θέμα 2 - 34389

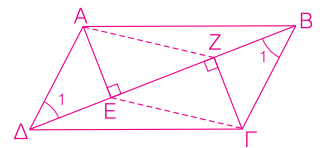
**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα  $ΑΔΕ$  και  $ΓΒΖ$  έχουν:

- $ΑΔ = ΒΓ$ , αφού το  $ΑΒΓΔ$  είναι παραλληλόγραμμο
  - $\hat{Δ}_1 = \hat{Β}_1$ , ως εντός εναλλάξ των παράλληλων  $ΑΔ$  και  $ΒΓ$  που τέμνονται από τη  $ΒΔ$
- Άρα είναι ίσα.

**β.** Επειδή  $ΑΕ \perp ΒΔ$  και  $ΓΖ \perp ΒΔ$ , έχουμε  $ΑΕ \parallel ΓΖ$ .

Αφού τα τρίγωνα  $ΑΔΕ$ ,  $ΓΒΖ$  είναι ίσα, έχουμε  $ΑΕ = ΓΖ$ .

Άρα  $ΑΕ \parallel = ΓΖ$ , οπότε το  $ΑΕΓΖ$  είναι παραλληλόγραμμο.



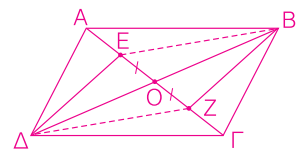
### 151 Θέμα 2 - 34395

- α.** Τα τρίγωνα  $ΟΔΕ$  και  $ΟΒΖ$  έχουν:
- $ΟΔ = ΟΒ$
  - $ΟΕ = ΟΖ$
  - $\hat{ΔΟΕ} = \hat{ΒΟΖ}$ , ως κατακορυφήν γωνίες

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε  $ΔΕ = ΒΖ$ .

**β.** Είναι  $ΟΕ = ΟΖ$  και  $ΟΒ = ΟΔ$ .

Οπότε το  $ΔΕΒΖ$  είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.



### 152 Θέμα 2 - 13816

**α.** Το σημείο  $Μ$  είναι το μέσο του  $ΒΓ$  και του  $ΑΕ$ , οπότε στο τετράπλευρο  $ΑΒΕΓ$  οι διαγώνιοι του διχοτομούνται. Άρα είναι παραλληλόγραμμο.

**β.** Από το παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$  έχουμε  $ΔΓ \parallel ΑΒ$  και από το παραλληλόγραμμο  $ΑΒΕΓ$  έχουμε  $ΑΒ \parallel ΓΕ$ .

Άρα τα ευθύγραμμα τμήματα  $ΔΓ$  και  $ΓΕ$  είναι παράλληλα στην  $ΑΒ$  και επειδή έχουν κοινό σημείο το  $Γ$ , τα σημεία  $Δ$ ,  $Γ$  και  $Ε$  είναι συνευθειακά.

### 153 Θέμα 2 - 13829

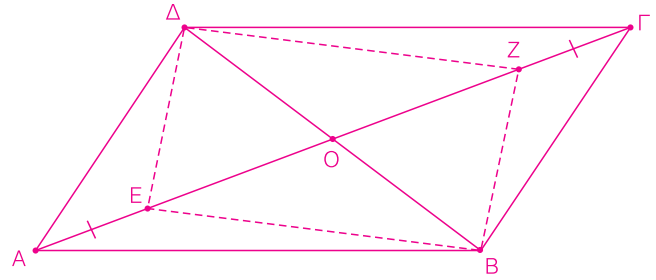
α. Τα τρίγωνα  $\triangle AED$  και  $\triangle ZB$  έχουν:

i.  $AE = ZB$

ii.  $AD = BG$ , απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου

iii.  $\hat{EAD} = \hat{ZGB}$ , ως εντός εναλλάξ

Άρα είναι ίσα αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες (ΠΓΠ).



β. Είναι  $OE = OA - AE$  και  $OZ = OG - ZG$ . Επειδή  $OA = OG$ , αφού το  $O$  είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου  $ABGD$  και  $AE = ZG$  έχουμε  $OE = OZ$  ως διαφορές ίσων τμημάτων.

Επιπλέον  $BO = OD$  αφού το  $O$  είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου  $ABGD$ . Επομένως οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου  $DEBZ$  διχοτομούνται άρα το τετράπλευρο  $DEBZ$  είναι παραλληλόγραμμο.

### 154 Θέμα 2 - 36096

α. Τα τρίγωνα  $\triangle AOB$  και  $\triangle OGD$  έχουν:

- $OB = OD$ , αφού  $O$  μέσο του  $BD$

- $\hat{AOB} = \hat{GOD}$ , ως κατακορυφήν

- $\hat{B} = \hat{D}$ , ως εντός εναλλάξ

Άρα είναι ίσα (ΓΠΓ) και έχουν:  $AB = GD$ ,  $OA = OG$ ,  $\hat{A} = \hat{G}$ .

β. Επειδή τα τρίγωνα  $\triangle AOB$  και  $\triangle OGD$  είναι ίσα, έχουμε  $AB = GD$ .

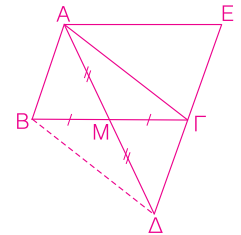
Οπότε  $AB \parallel GD$ , επομένως το  $ABGD$  είναι παραλληλόγραμμο.

### 155 Θέμα 2 - 37015

α. Είναι  $MB = MG$  και  $MA = MD$ , οπότε το  $ABDG$  είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

β. Είναι  $AB \parallel GD$  και  $AE \parallel BG$ , οπότε το  $AEBG$  είναι παραλληλόγραμμο.

Επομένως  $BG = AE$ , οπότε  $BM = \frac{BG}{2} = \frac{AE}{2}$ .



### 156 Θέμα 2 - 36164

α. Επειδή  $DB = DM$  και  $DA = DE$ , το  $ABEM$  είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

β. Επειδή το  $ABEM$  είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε  $ME = AB$ .

Είναι  $BG = 2AB \Leftrightarrow AB = \frac{BG}{2} \Leftrightarrow AB = MG \Leftrightarrow ME = MG$ .

### 157 Θέμα 2 - 34423

α. Είναι  $E$  το μέσο του  $AB$  και  $AB = 2BG \Leftrightarrow 2AE = 2BG \Leftrightarrow AE = BG$ .

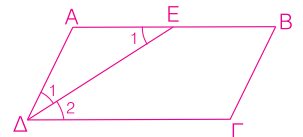
Αφού το  $ABGD$  είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε  $BG = AD$ .

Άρα  $AE = AD$ , οπότε το τρίγωνο  $EAD$  είναι ισοσκελές.

β. Είναι:

- $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$ , αφού το τρίγωνο  $EAD$  είναι ισοσκελές με  $AE = AD$ .
- $\hat{\Delta}_2 = \hat{E}_1$ , ως εντός εναλλάξ

Οπότε  $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ , άρα η  $DE$  είναι διχοτόμος της  $\hat{\Delta}$ .



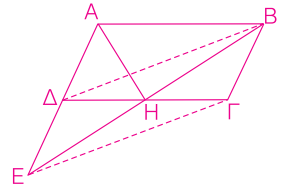
**158 Θέμα 2 - 34386**

**α.** Είναι  $AB = 2B\Gamma \Leftrightarrow AB = 2A\Delta \Leftrightarrow AB = AE$  .  
 Άρα το τρίγωνο BAE είναι ισοσκελές με  $AB = AE$  .

**β.** Είναι  $\Delta E = A\Delta$  και  $A\Delta \parallel B\Gamma$  .  
 Οπότε  $\Delta E \parallel B\Gamma$  , άρα το ΔΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο.

**γ.** Επειδή το ΔΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο, οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, άρα  $EH = HB$  .

Οπότε η ΑΗ είναι διάμεσος του τριγώνου BAE .



**159 Θέμα 2 - 36089**

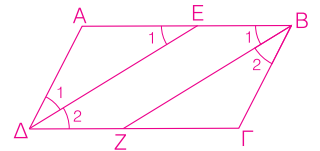
**α.** Τα τρίγωνα AED και BΓZ έχουν:

- $A\Delta = B\Gamma$
- $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_2$  , ως μισά των ίσων γωνιών  $\hat{B}$  και  $\hat{\Delta}$
- $\hat{A} = \hat{\Gamma}$

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ).

**β.** Επειδή  $AB = \Gamma\Delta$  και  $AE = \Gamma Z$  , αφού τα τρίγωνα AΔE και BΓZ είναι ίσα, έχουμε  $BE = \Delta Z$  , ως διαφορές ίσων τμημάτων.

Αφού  $BE \parallel \Delta Z$  το ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.



**160 Θέμα 2 - 13833**

**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα AΓΔ και AΕΗ έχουν:

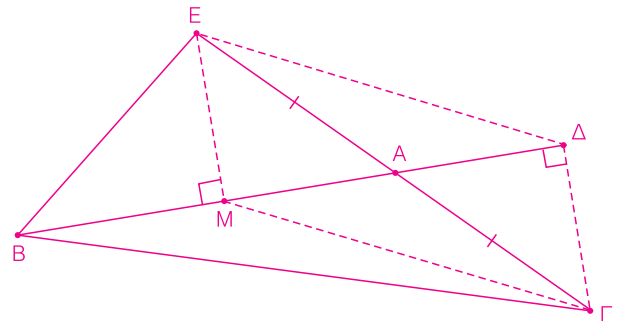
- i.  $\hat{H} = \hat{\Delta} = 90^\circ$  (γιατί ΓΔ και ΕΗ ύψη)
- ii.  $A\Gamma = AE$  (γιατί ΒΑ διάμεσος από υπόθεση)
- iii.  $\Delta\hat{A}\Gamma = E\hat{A}H$  (ως κατακορυφήν)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, αφού είναι ορθογώνια που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

**β.** Από την ισότητα των τριγώνων AΓΔ και AΕΗ προκύπτει ότι  $A\hat{E}H = A\hat{\Gamma}\Delta$  άρα και  $AH = A\Delta$  ως πλευρές ίσων τριγώνων απέναντι από ίσες γωνίες.

**γ.** Η ΒΑ είναι διάμεσος του τριγώνου EBG άρα  $EA = \Gamma A$  και από το **β.** ερώτημα έχουμε ότι  $AH = A\Delta$ .

Άρα το τετράπλευρο ΓΔΕΗ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοι του ΕΓ και ΔΗ διχοτομούνται.



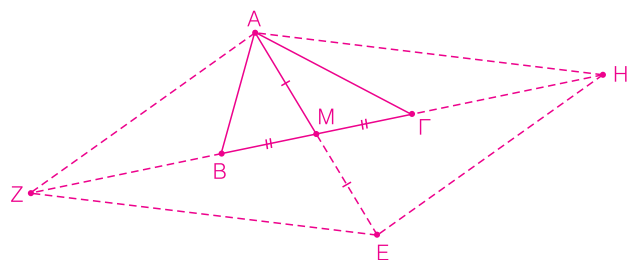
**161 Θέμα 2 - 13834**

**α.** Τα τρίγωνα AMZ και EMH έχουν:

- i.  $AM = ME$
- ii.  $MZ = MH$ , άθροισμα ίσων τμημάτων  $MB + BZ$  και  $M\Gamma + \Gamma H$
- iii.  $A\hat{M}Z = E\hat{M}H$  , ως κατακορυφήν

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.

**β.** Έχουμε  $AM = ME$  και  $MZ = MH$ . Επομένως στο τετράπλευρο AHEZ οι διαγώνιοι ΑΕ και ΖΗ διχοτομούνται στο σημείο Μ, άρα το τετράπλευρο AHEZ είναι παραλληλόγραμμο.



### 162 Θέμα 4 - 13742

α. Στο ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$ , το τμήμα  $AM$  είναι διάμεσος προς τη βάση του  $B\Gamma$ , οπότε είναι και ύψος και διχοτόμος της γωνίας  $A$ . Δηλαδή  $AM \perp B\Gamma$  και  $\widehat{BAM} = \widehat{GAM}$ .

Είναι: •  $KB \perp B\Gamma$  και  $AM \perp B\Gamma$ , οπότε  $AM \parallel KB$ .

•  $BK = A\Gamma$  και  $AB = A\Gamma$ , οπότε  $AB = BK$ .

β. Έχουμε: •  $AB = BK$  άρα το τρίγωνο  $ABK$  είναι ισοσκελές, οπότε  $\widehat{BAK} = \widehat{BKA}$ .

•  $\widehat{KAM} = \widehat{BKA}$ , ως εντός εναλλάξ. Άρα  $\widehat{BAK} = \widehat{BKA} = \widehat{KAM}$  (1), οπότε η  $AK$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $BAM$ .

γ. Στο ισοσκελές τρίγωνο  $ABK$  είναι

$$\widehat{BAK} + \widehat{KBA} + \widehat{BKA} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{BKA} + \widehat{B} + 90^\circ + \widehat{BKA} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{BKA} + \widehat{B} + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow$$

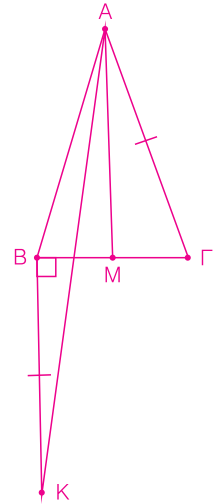
$$2\widehat{BKA} + \widehat{B} = 90^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{BKA} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{BKA} = 90^\circ - \widehat{\Gamma} \Leftrightarrow \widehat{BKA} = 45^\circ - \frac{\widehat{\Gamma}}{2}$$

δ. Το τετράπλευρο  $ABKM$  έχει τις δυο απέναντι πλευρές του  $AM$  και  $BK$  παράλληλες.

Αν ήταν παραλληλόγραμμο οι  $AM$  και  $BK$  θα ήταν και ίσες. Αν  $AM = BK$  τότε θα ισχύει ότι  $AM = AB$ .

Όμως τα τμήματα  $AM$  και  $AB$  είναι κάθετο και πλάγιο τμήμα αντίστοιχα προς τη  $B\Gamma$ , οπότε ισχύει ότι  $AM < AB$ .

Επομένως  $AM < KB$  και το τετράπλευρο  $ABKM$  δεν μπορεί να είναι παραλληλόγραμμο.



### 163 Θέμα 4 - 1785

α. Επειδή  $AK = AL$  το τρίγωνο  $AKL$  είναι ισοσκελές, οπότε η διάμεσος  $AM$  είναι και διχοτόμος της  $\widehat{A}$ , οπότε  $\widehat{DAE} = \widehat{LAM}$ .

Είναι  $\widehat{LAM} = \widehat{DEA}$ , ως εντός εναλλάξ, οπότε  $\widehat{AED} = \widehat{DAE}$ .

Άρα  $AD = DE$ .

β. Είναι  $B\Gamma + GE = AD + GE = DE + GE = DG = AB$ .

γ. Είναι: •  $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{B} = 180^\circ - \widehat{A}$ , ως εντός και επί τα αυτά μέρη

$$\bullet \widehat{A} + \widehat{ALK} + \widehat{AKL} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{ALK} + \widehat{AKL} = 180^\circ - \widehat{A} \Leftrightarrow 2\widehat{ALK} = \widehat{B}$$

Άρα  $\widehat{B} = 2\widehat{ALK}$ .

### 164 Θέμα 4 - 37108

α. Επειδή  $AE \parallel B\Gamma$  το  $AEG\Gamma$  είναι παραλληλόγραμμο.

β. Τα τρίγωνα  $\Delta H\Theta$  και  $BEZ$  έχουν:

•  $\Delta H = BE$ , αφού  $\Delta H = \Delta\Gamma - H\Gamma = AB - AE = BE$

•  $\widehat{\Delta} = \widehat{B}$ , ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου

•  $\Delta\Theta = BZ$ , από υπόθεση

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα  $\Theta H = EZ$ , (1).

Τα τρίγωνα  $A\Theta E$  και  $\Gamma H Z$  έχουν:

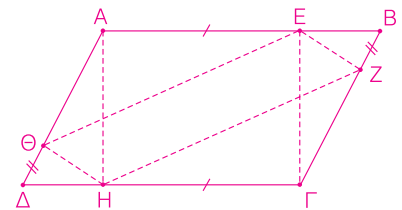
•  $AE = \Gamma H$ , από υπόθεση

•  $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$ , ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου

•  $A\Theta = \Gamma Z$ , αφού  $A\Theta = A\Delta - \Delta\Theta = B\Gamma - BZ = \Gamma Z$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα  $\Theta E = HZ$ .

Επομένως το τετράπλευρο  $EZH\Theta$  έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.



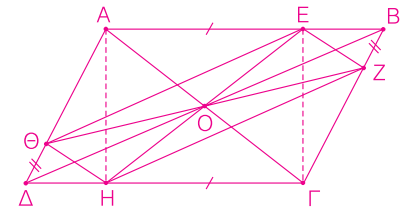
γ. Έστω  $O$  το μέσον της  $AG$ .

• Επειδή το  $ABGD$  είναι παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, άρα η  $BD$  διέρχεται από το  $O$ .

• Επειδή το  $AEGH$  είναι παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, άρα η  $EH$  διέρχεται από το  $O$  που είναι το μέσον της  $AG$ .

• Επειδή το  $EZHΘ$  είναι παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, άρα η  $ΘZ$  διέρχεται από το μέσον της  $EH$  που είναι το  $O$ .

Άρα οι  $AG$ ,  $BD$ ,  $EH$  και  $ZΘ$  διέρχονται από το ίδιο σημείο.



**165 Θέμα 4 - 1877**

α. Επειδή  $KO = KZ$  και  $KΔ = KΓ$ , το  $ΟΓΖΔ$  είναι παραλληλόγραμμο, οπότε  $ΓΖ // = ΟΔ$ .

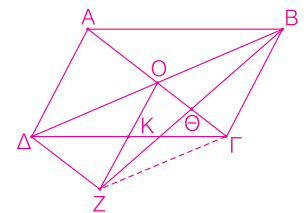
Οπότε  $ΓΖ // = ΟΒ$ , επομένως το  $ΟΒΓΖ$  είναι παραλληλόγραμμο.

Άρα τα  $ΟΓ$  και  $ΒΖ$  διχοτομούνται.

β. Επειδή το  $ΟΔΖΓ$  είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε  $ΔΖ = ΟΓ$  και αφού  $ΟΓ = ΑΟ$ , έχουμε  $ΑΟ = ΔΖ$ .

- γ. Τα τρίγωνα  $ΑΟΒ$  και  $ΔΖΓ$  έχουν:
- $ΟΑ = ΔΖ$
  - $ΟΒ = ΓΖ$
  - $ΑΒ = ΓΔ$

Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ).



**166 Θέμα 4 - 37131**

- α. Είναι:
- $\hat{B}\hat{A}\hat{D} = \hat{D}\hat{A}\hat{E}$ , αφού  $AD$  διχοτόμος της  $\hat{A}$
  - $\hat{B}\hat{A}\hat{D} = \hat{A}\hat{D}\hat{E}$ , ως εντός εναλλάξ

Άρα  $\hat{D}\hat{A}\hat{E} = \hat{A}\hat{D}\hat{E}$ , οπότε το τρίγωνο  $ΑΕΔ$  είναι ισοσκελές.

β. Στο ισοσκελές τρίγωνο  $ΑΕΔ$  η  $EK$  είναι διάμεσος, οπότε είναι και ύψος. Άρα η  $EK$  είναι η μεσοκάθετος του  $AD$ .

- γ. Τα τρίγωνα  $AKB$ ,  $KΔZ$  έχουν:
- $KΑ = KΔ$
  - $\hat{A}\hat{K}\hat{B} = \hat{D}\hat{K}\hat{Z}$
  - $\hat{B}\hat{A}\hat{K} = \hat{K}\hat{D}\hat{Z}$ , ως εντός εναλλάξ

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ).

δ. Επειδή τα τρίγωνα  $AKB$  και  $KΔZ$  είναι ίσα, έχουμε  $KΒ = KΖ$ .

Επειδή  $KΑ = KΔ$  και  $KΒ = KΖ$ , το  $AZΔB$  είναι παραλληλόγραμμο.

**167 Θέμα 4 - 37166**

α. i. Έχουμε  $EB = EG$  και  $EA = ED$ , οπότε το  $ΑΒΔΓ$  είναι παραλληλόγραμμο, επομένως  $ΑΒ = ΓΔ$ . Άρα η απόσταση των χωριών  $A$  και  $B$  είναι ίση με την απόσταση των χωριών  $Γ$  και  $Δ$ .

ii. Επειδή το  $ΑΒΔΓ$  είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε  $ΑΒ // ΓΔ$ , οπότε οι δρόμοι  $ΑΒ$  και  $ΓΔ$  όσο και να προεκταθούν αποκλείεται να συναντηθούν.

iii. Φέρουμε  $BK \perp AD$  και  $ΓΛ \perp AD$ .

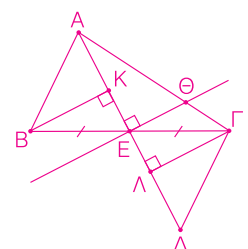
- Τα ορθογώνια τρίγωνα  $BKE$  και  $ΓΛΕ$  έχουν:
- $EB = EG$
  - $\hat{B}\hat{E}\hat{K} = \hat{Γ}\hat{E}\hat{Λ}$

Οπότε είναι ίσα, άρα  $BK = ΓΛ$ .

Δηλαδή τα χωριά  $B$ ,  $Γ$  ισαπέχουν από το δρόμο  $AD$ .

β. Για να ισαπέχει κάποιο σημείο από τα  $A$  και  $Δ$ , θα πρέπει να ανήκει στη μεσοκάθετο του  $AD$ .

Αφού το σημείο αυτό ανήκει στο δρόμο  $ΑΓ$ , θα είναι το σημείο τομής  $Θ$  της  $ΑΓ$  με τη μεσοκάθετο του  $AD$ .



**168 Θέμα 4 - 1882**

**α.** Στο τρίγωνο ΑΕΜ η ΑΔ είναι διχοτόμος και ύψος, οπότε είναι ισοσκελές.

- Είναι:
- $\widehat{AEM} = \widehat{AME}$  , αφού  $AE = AM$
  - $\widehat{AEM} = \widehat{MLB}$  , ως εντός εναλλάξ
  - $\widehat{AME} = \widehat{BML}$  , ως κατακορυφήν.

Άρα  $\widehat{BML} = \widehat{MLB}$  , οπότε το τρίγωνο ΒΜΛ είναι ισοσκελές.

- Είναι:
- $\widehat{K} = \widehat{GAD}$  , ως εντός εναλλάξ.
  - $\widehat{GAD} = \widehat{DAB}$  , γιατί η ΑΔ είναι διχοτόμος της  $\widehat{A}$  .

Άρα  $\widehat{DAB} = \widehat{K}$  , οπότε το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ισοσκελές.

**β.** Από τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΕΜ και ΜΒΛ και επειδή το Μ είναι μέσο του ΑΒ , έχουμε  $AE = AM = MB = BL$  .

Οπότε  $AE \parallel BL$  , άρα το ΑΛΒΕ είναι παραλληλόγραμμο.

**169 Θέμα 4 - 13845**

**α.** Το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ισοσκελές με  $KB = KA$  , άρα  $\widehat{KBA} = \widehat{KAB}$  (1).

Το τρίγωνο ΑΛΓ είναι ισοσκελές με  $LA = LG$  , άρα  $\widehat{LAG} = \widehat{LGA}$  (2).

Είναι  $\widehat{KAB} = \widehat{LAG}$  , ως κατακορυφήν, οπότε είναι ίσες, άρα  $\widehat{KBA} = \widehat{LGA}$  .

**β.** Έστω  $\omega$  και  $\phi$  οι γωνίες όπως φαίνονται στο σχήμα, οπότε  $\widehat{\omega} = 90^\circ + \widehat{KBA}$  και  $\widehat{\phi} = 90^\circ + \widehat{LGA}$  . Επειδή  $\widehat{KBA} = \widehat{LGA}$  έχουμε  $\omega = \phi$  .

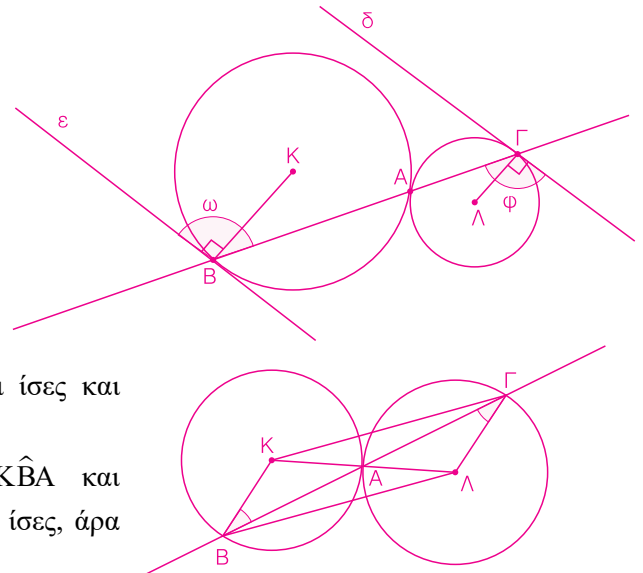
Οι ίσες γωνίες  $\omega$  και  $\phi$  είναι εντός εναλλάξ των ευθειών (ε) και (δ) που τέμνονται από τη ΒΓ, άρα (ε)  $\parallel$  (δ).

**γ.** Για να είναι το τετράπλευρο ΚΓΛΒ παραλληλόγραμμο, θα πρέπει οι απέναντι πλευρές του ΚΒ και ΓΛ να είναι ίσες και παράλληλες.

Από το ερώτημα (α) έχουμε ότι οι εντός εναλλάξ γωνίες  $\widehat{KBA}$  και  $\widehat{LGA}$  των ΚΒ και ΓΛ που τέμνονται από τη ΒΓ είναι ίσες, άρα  $KB \parallel GL$  .

Τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΒ και ΓΛ είναι ακτίνες των δύο κύκλων, οπότε για να είναι ίσα θα πρέπει οι κύκλοι να είναι ίσοι μεταξύ τους.

Άρα για να είναι το τετράπλευρο ΚΓΛΒ παραλληλόγραμμο θα πρέπει  $R = r$  .



**170 Θέμα 4 - 1746**

**α.** Το άθροισμα των γωνιών του εξαγώνου είναι  $(2 \cdot 6 - 4)$  ορθές, δηλαδή  $(2 \cdot 6 - 4) \cdot 90^\circ = 8 \cdot 90^\circ = 720^\circ$  .

Οπότε  $\widehat{\alpha} + \widehat{\gamma} + \widehat{\epsilon} + \widehat{\beta} + \widehat{\delta} + \widehat{\zeta} = 720^\circ \Rightarrow \widehat{\alpha} + \widehat{\gamma} + \widehat{\epsilon} + \widehat{\alpha} + \widehat{\gamma} + \widehat{\epsilon} = 720^\circ \Rightarrow 2(\widehat{\alpha} + \widehat{\gamma} + \widehat{\epsilon}) = 720^\circ \Rightarrow \widehat{\alpha} + \widehat{\gamma} + \widehat{\epsilon} = 360^\circ$  .

**β. i.** Είναι  $\widehat{A} + \widehat{H} = \widehat{\alpha} + 180^\circ - \widehat{HZE} - \widehat{HEZ} = \widehat{\alpha} + 180^\circ - (180^\circ - \widehat{\zeta}) - (180^\circ - \widehat{\delta}) = \widehat{\alpha} + 180^\circ - 180^\circ + \widehat{\zeta} - 180^\circ + \widehat{\delta}$   
 $= \widehat{\alpha} + \widehat{\zeta} + \widehat{\delta} - 180^\circ = \widehat{\alpha} + \widehat{\epsilon} + \widehat{\gamma} - 180^\circ = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$

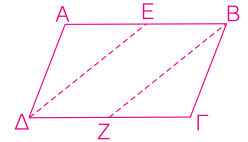
**ii.** Επειδή οι γωνίες  $\widehat{A}$  ,  $\widehat{H}$  είναι εντός και επί τα αυτά μέρη και παραπληρωματικές, προκύπτει  $A\Theta \parallel H\Delta$  .

Όμοια έχουμε ότι  $\widehat{A} + \widehat{\Theta} = 180^\circ$  , οπότε  $AH \parallel \Theta\Delta$  .

Άρα το ΑΘΔΗ είναι παραλληλόγραμμο.

## 171 Θέμα 4 - 1730

α. • Επειδή το  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε  $AB \parallel \Gamma\Delta \Rightarrow \frac{AB}{2} \parallel = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow EB \parallel \Delta Z$ , άρα το  $\Delta EBZ$  είναι παραλληλόγραμμο.



Οπότε ο ισχυρισμός 1 είναι αληθής.

- Είναι:
  - $\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta} = \hat{E}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$ , ως εντός εναλλάξ
  - $\hat{E}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = \hat{B}\hat{Z}\hat{\Gamma}$ , ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη

Επομένως  $\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta} = \hat{B}\hat{Z}\hat{\Gamma}$ . Άρα ο ισχυρισμός 2 είναι αληθής.

- Ο ισχυρισμός 3 δεν είναι αληθής.

β. Ο ισχυρισμός 3 είναι αληθής, αν και μόνο αν  $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{E} = \hat{E}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$  και  $\hat{A}\hat{B}\hat{Z} = \hat{Z}\hat{B}\hat{\Gamma}$ .

Επειδή  $AB \parallel \Gamma\Delta$  έχουμε  $\hat{E}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{E}\hat{\Delta}$ , δηλαδή  $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{E} = \hat{A}\hat{E}\hat{\Delta}$ .

Οπότε το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισοσκελές με  $AE = A\Delta \Leftrightarrow \frac{AB}{2} = A\Delta \Leftrightarrow AB = 2A\Delta$ .

Στην περίπτωση αυτή και η  $BZ$  είναι η διχοτόμος της  $\hat{B}$ .

Άρα η ζητούμενη σχέση είναι  $AB = 2A\Delta$ .

## 172 Θέμα 4 - 1805

α. i. • Το τρίγωνο  $B\Gamma Z$  είναι ισοσκελές, οπότε  $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{Z} = \hat{B}\hat{Z}\hat{\Gamma}$  και η  $\hat{B}$  είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο  $B\Gamma Z$ , οπότε  $\hat{B} = \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{Z} + \hat{B}\hat{Z}\hat{\Gamma} = 2\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{Z}$ .

• Το τρίγωνο  $\Delta\Gamma E$  είναι ισοσκελές, οπότε  $\hat{\Delta}\hat{\Gamma}E = \hat{\Delta}E\hat{\Gamma}$  και η  $\hat{\Delta}$  είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο  $\Delta\Gamma E$ , οπότε  $\hat{\Delta} = \hat{\Delta}\hat{\Gamma}E + \hat{\Delta}E\hat{\Gamma} = 2\hat{\Delta}\hat{\Gamma}E$ .

Έχουμε  $\hat{B} = \hat{\Delta} \Leftrightarrow 2\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{Z} = 2\hat{\Delta}\hat{\Gamma}E \Leftrightarrow \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{Z} = \hat{\Delta}\hat{\Gamma}E$ .

ii. Είναι  $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{Z} + \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} + \hat{\Delta}\hat{\Gamma}E = \hat{B}\hat{Z}\hat{\Gamma} + \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} + \hat{B}\hat{Z}\hat{\Gamma} = 2\hat{B}\hat{Z}\hat{\Gamma} + \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} + \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = 180^\circ$ .

Άρα τα  $Z, \Gamma, E$  είναι συνευθειακά.

β. Το λάθος είναι ότι θεώρησε ως δεδομένο ότι τα σημεία  $Z, \Gamma, E$  είναι συνευθειακά, ώστε να αποδείξει ότι  $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{Z} = \hat{\Delta}E\hat{\Gamma}$ .

## 173 Θέμα 4 - 1731

α. • Είναι  $EB \parallel \Delta Z$  και  $AB = \Gamma\Delta \Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Rightarrow EB = \Delta Z$ .

Οπότε το  $\Delta EBZ$  είναι παραλληλόγραμμο.

Άρα ο ισχυρισμός 1 είναι αληθής.

- Τα τρίγωνα  $A\Delta E$  και  $B\Gamma Z$  έχουν:
  - $A\Delta = B\Gamma$
  - $AE = \Gamma Z$ , ως μισά ίσων τμημάτων
  - $\hat{A} = \hat{\Gamma}$

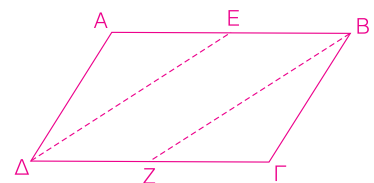
Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα ο ισχυρισμός 2 είναι αληθής.

β. Έστω ότι τα τρίγωνα  $A\Delta E$  και  $B\Gamma Z$  είναι ισοσκελή.

Τότε θα ισχύει  $A\Delta = AE \Leftrightarrow A\Delta = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow AB = 2A\Delta$ .

Και αντιστρόφως, αν  $AB = 2A\Delta$ , τότε  $A\Delta = AE$ , οπότε τα τρίγωνα  $A\Delta E$  και  $B\Gamma Z$  θα είναι ισοσκελή.

Άρα τα τρίγωνα  $A\Delta E$  και  $B\Gamma Z$  είναι ισοσκελή αν και μόνο αν η μία πλευρά του παραλληλογράμμου είναι διπλάσια της άλλης.





**174 Θέμα 4 - 1810**

- α. Επειδή: •  $M\Delta // = AB$ , το  $ABM\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο, οπότε  $A\Delta // B\Gamma$ , (1)  
 •  $ME // = A\Gamma$ , το  $A\Gamma M E$  είναι παραλληλόγραμμο, οπότε  $A E // B\Gamma$ , (2)

Από το  $A$  διέρχεται μόνο μία παράλληλη προς τη  $B\Gamma$ , οπότε από τις (1) και (2) έχουμε ότι τα σημεία  $\Delta$ ,  $A$ ,  $E$  είναι συνευθειακά.

- β. Επειδή τα  $ABM\Delta$  και  $A\Gamma M E$  είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε  $\Delta A = MB$  και  $A E = M\Gamma$ .

Είναι  $\Delta E = \Delta A + A E = MB + M\Gamma = B\Gamma$ .

Άρα  $\Pi_{\Delta A E} = M\Delta + M E + \Delta E = AB + A\Gamma + B\Gamma = \Pi_{A B \Gamma}$ .

- γ. Το λάθος του μαθητή βρίσκεται στον ισχυρισμό του ότι  $\widehat{A\Delta Z} = \widehat{A}_2$ , θεωρώντας ότι η ευθεία  $\Delta E$  διέρχεται από το  $A$ . Δηλαδή θεώρησε δεδομένο ότι τα σημεία  $\Delta$ ,  $A$ ,  $E$  είναι συνευθειακά.

**175 Θέμα 4 - 1709**

- α. Επειδή  $A\Delta // = B\Gamma$ , το  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγώνιοι του διχοτομούνται.

Άρα η  $B\Delta$  διέρχεται από το μέσο του τμήματος  $A\Gamma$ .

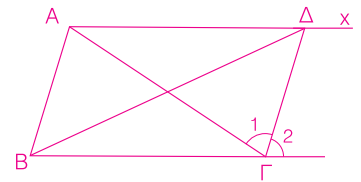
- β. Επειδή  $AB // \Gamma\Delta$ , είναι  $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{A}$  ως εντός εναλλάξ.

Έχουμε  $\widehat{\Gamma}_{εξ} = 2\widehat{A} \Leftrightarrow \widehat{\Gamma}_1 + \widehat{\Gamma}_2 = 2\widehat{A} \Leftrightarrow \widehat{A} + \widehat{\Gamma}_2 = 2\widehat{A} \Leftrightarrow \widehat{\Gamma}_2 = \widehat{A}$ .

Άρα η  $\Gamma\Delta$  είναι διχοτόμος της  $\widehat{\Gamma}_{εξ}$ .

- γ. Είναι  $\widehat{\Gamma}_{εξ} = \widehat{A} + \widehat{B}$ , οπότε  $\widehat{\Gamma}_{εξ} = 2\widehat{A} \Leftrightarrow \widehat{A} + \widehat{B} = 2\widehat{A} \Leftrightarrow \widehat{B} = \widehat{A}$ .

Άρα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές.

**176 Θέμα 2 - 34781**

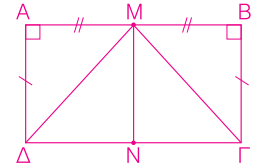
- α. Τα τρίγωνα  $AM\Delta$  και  $MB\Gamma$  είναι ορθογώνια και έχουν:

- $A\Delta = B\Gamma$ , ως απέναντι πλευρές ορθογωνίου
- $AM = MB$ , διότι το  $M$  είναι μέσο του  $AB$

Άρα είναι ίσα, οπότε  $M\Delta = M\Gamma$ .

- β. Στο ισοσκελές  $M\Gamma\Delta$  η  $MN$  είναι διάμεσος, οπότε και ύψος.

Άρα η ευθεία  $MN$  είναι η μεσοκάθετος του  $\Gamma\Delta$ .

**177 Θέμα 2 - 37008**

- α. Επειδή το  $AB\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνιο, έχουμε  $\widehat{A} = \widehat{\Gamma} = 90^\circ$  και  $A\Delta = B\Gamma$ .

Τα ορθογώνια τρίγωνα  $AN\Delta$  και  $B\Gamma K$  έχουν:

- $A\Delta = B\Gamma$
- $AN = \Gamma K$

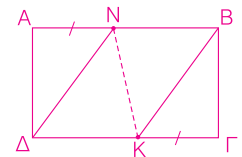
Οπότε είναι ίσα.

- β. Επειδή το  $AB\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνιο, έχουμε  $AB // \Gamma\Delta$ .

Είναι  $AN = \Gamma K$ , οπότε  $BN = AB - AN = \Gamma\Delta - \Gamma K = K\Delta$

Επομένως  $NB // K\Delta$ .

Άρα το  $NB K\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο.

**178 Θέμα 2 - 1653**

- α. Είναι: •  $AB = \Gamma\Delta$ , (1) και  $AB // \Gamma\Delta$ , (2) ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ .  
 •  $AE = \Gamma\Delta$ , (3) και  $AE // \Gamma\Delta$ , (4) ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου  $A\Gamma\Delta E$ .

Από τις (2), (4) έχουμε  $AB // AE$ , οπότε τα  $B$ ,  $A$  και  $E$  είναι συνευθειακά.

Επειδή  $AB = AE$ , από τις (1), (3) έχουμε ότι  $A$  είναι μέσο του  $BE$ .

- β. Στο τρίγωνο  $BE\Gamma$  το  $\Gamma A$  είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

- γ. Είναι:
- $\widehat{B\Gamma A} = \widehat{\Gamma\Delta\Delta}$  , ως εντός εναλλάξ
  - $\widehat{\Gamma\Delta\Delta} = \widehat{A\Delta E}$  , ως εντός εναλλάξ

Άρα  $\widehat{B\Gamma A} = \widehat{A\Delta E}$  .

### 179 Θέμα 2 - 1668

- α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ έχουν:
- $M\Delta = ME$
  - $MB = MG$

Οπότε είναι ίσα, άρα  $B\Delta = GE$  .

- β. Είναι  $B\Delta \perp B\Gamma$  και  $GE \perp B\Gamma$  , οπότε  $B\Delta // GE$  .

Επειδή  $B\Delta // GE$  , το ΒΔΕΓ είναι παραλληλόγραμμο και αφού επιπλέον είναι  $\widehat{\Delta B\Gamma} = 90^\circ$  , είναι ορθογώνιο.

### 180 Θέμα 2 - 36353

- α. Είναι  $\widehat{A\hat{O}\Gamma} = \widehat{B\hat{O}\Delta}$  , οπότε  $\widehat{A\Gamma} = \widehat{B\Delta}$  , άρα  $A\Gamma = \Delta B$  .

- β. Στο τετράπλευρο ΑΓΒΔ οι διαγώνιοι ΑΒ και ΓΔ διχοτομούνται και είναι ίσες.  
Άρα το ΑΓΒΔ είναι ορθογώνιο.

### 181 Θέμα 4 - 1729

- α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο:
- ΑΔΓ είναι  $\widehat{\Delta\hat{\Gamma}A} = 30^\circ$  , οπότε  $\widehat{\Delta\hat{A}\Gamma} = 60^\circ$
  - ΔΑΕ είναι  $\widehat{\Delta\hat{A}\Gamma} = 60^\circ$  , οπότε  $\widehat{A\hat{\Delta}E} = 30^\circ$

Οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι ίσες και διχοτομούνται, άρα  $O\Gamma = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{B\Delta}{2} = O\Delta$  .

Επομένως το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές με βάση ΔΓ, οπότε  $\widehat{O\hat{\Delta}\Gamma} = \widehat{O\hat{\Gamma}\Delta} = 30^\circ$  .

Είναι:  $\widehat{A\hat{\Delta}E} + \widehat{E\hat{\Delta}O} + \widehat{O\hat{\Delta}\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + \widehat{E\hat{\Delta}O} + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{E\hat{\Delta}O} = 30^\circ$  .

Επομένως  $\widehat{A\hat{\Delta}E} = \widehat{E\hat{\Delta}O} = \widehat{O\hat{\Delta}\Gamma} = 30^\circ$  .

Άρα η γωνία  $\widehat{A\hat{\Delta}\Gamma}$  χωρίζεται από τις ΔΕ και ΔΒ σε τρεις ίσες γωνίες.

- β. Το τρίγωνο ΟΑΔ είναι ισοσκελές με  $OA = OD$  και είναι  $\widehat{\Delta\hat{A}\Gamma} = 60^\circ$  οπότε  $\widehat{\Delta\hat{A}E} = 60^\circ$  .

Άρα το ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΔ είναι ισόπλευρο με  $OA = OD = AD$  .

Όμως  $AD = B\Gamma$  , οπότε  $OA = B\Gamma$  .

- Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΖΟ και ΑΒΓ έχουν:
- $OA = B\Gamma$
  - $\widehat{A\hat{\Gamma}B} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ = \widehat{Z\hat{A}O}$

Άρα είναι ίσα.

### 182 Θέμα 4 - 14887

- α. Το ΑΗΜΔ είναι ορθογώνιο, αφού  $\widehat{\Delta} = \widehat{M} = \widehat{H} = 90^\circ$  .

Άρα  $\widehat{\Delta\hat{A}H} = 90^\circ$  .

- β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΜΒ έχουμε  $\widehat{E} = 90^\circ - \widehat{B} \Rightarrow \widehat{E} = 90^\circ - \widehat{\Gamma}$  , αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Είναι  $\widehat{A\hat{\Theta}E} = \widehat{M\hat{\Theta}\Gamma}$  , ως κατακορυφήν και  $\widehat{M\hat{\Theta}\Gamma} = 90^\circ - \widehat{\Gamma}$  από το ορθογώνιο τρίγωνο ΜΘΓ,

οπότε  $\widehat{A\hat{\Theta}E} = 90^\circ - \widehat{\Gamma}$  .

Επομένως  $\widehat{E} = \widehat{A\hat{\Theta}E}$  , άρα το τρίγωνο ΑΘΕ είναι ισοσκελές.

- γ. Το ΑΔΜΗ είναι ορθογώνιο, οπότε  $MH = AD$  .

Το τρίγωνο ΑΘΕ είναι ισοσκελές, οπότε το ύψος ΑΗ είναι και διάμεσος, άρα  $\Theta H = HE$  .

Είναι  $M\Theta + ME = MH - H\Theta + MH + HE = 2MH - H\Theta + H\Theta = 2AD$  .

**183 Θέμα 4 - 37102**

**α.** Επειδή  $MA = MD$  και  $MG = MB$ , το  $ABΔΓ$  είναι παραλληλόγραμμο και επειδή επιπλέον έχει  $\hat{A} = 90^\circ$  είναι ορθογώνιο.

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $KEB$  έχουμε  $\hat{KEB} = 90^\circ - \hat{KBE} \Leftrightarrow \hat{KEB} = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$ .

**γ.** Είναι  $\hat{\Delta BE} = 90^\circ - \hat{EBA} = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$ .

Οπότε  $\hat{\Delta BE} = \hat{KEB}$ . Άρα  $\Delta E = \Delta \Delta$ .

**184 Θέμα 4 - 1800**

**α.** Στο τετράπλευρο  $MEH\Theta$  είναι  $\hat{E} = \hat{H} = \hat{\Theta} = 90^\circ$ , οπότε είναι ορθογώνιο.

**β.** Είναι  $M\Theta \perp BH$  και  $GH \perp BH$ , άρα  $M\Theta \parallel AG$ .

Οπότε  $\hat{BM\Theta} = \hat{\Gamma}$ , ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη και αφού  $\hat{\Gamma} = \hat{B}$  έχουμε  $\hat{BM\Theta} = \hat{B}$ .

Τα ορθογώνια τρίγωνα  $\Theta BM$  και  $\Delta BM$  έχουν:

- $MB$  κοινή
- $\hat{BM\Theta} = \hat{B}$

Οπότε είναι ίσα, άρα  $B\Theta = M\Delta$ .

**γ.** Είναι  $M\Delta + ME = B\Theta + \Theta H = BH$ .

**185 Θέμα 4 - 13746**

**α. i.** Τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $E\Gamma\Delta$  έχουν:

- $A\Delta = \Delta E$ ,
- $B\Delta = \Delta\Gamma$ ,
- $\hat{A\Delta B} = \hat{E\Delta\Gamma}$ , ως κατακορυφήν γωνίες

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε  $AB = \Gamma E$  (1)

**i.** Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο  $AG\Gamma$  έχουμε:

$$AE < AG + \Gamma E \Leftrightarrow AE < AG + AB \Leftrightarrow 2A\Delta < AB + AG \Leftrightarrow A\Delta < \frac{AB + AG}{2}.$$

Άρα η διάμεσος  $A\Delta$  είναι μικρότερη από το ημιάθροισμα των πλευρών  $AB$  και  $AG$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  που την περιέχουν.

**β.** • Έχουμε  $2A\Delta = B\Gamma \Leftrightarrow AE = B\Gamma$ , άρα στο τετράπλευρο  $ABE\Gamma$  οι διαγωνίες του είναι ίσες.

• Είναι  $A\Delta = \Delta E$  και  $B\Delta = \Delta\Gamma$ , δηλαδή οι διαγωνίες του τετράπλευρου  $ABE\Gamma$  διχοτομούνται, οπότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο και επιπλέον είναι ίσες, άρα το τετράπλευρο  $ABE\Gamma$  είναι ορθογώνιο.

Επομένως στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\hat{A} = 90^\circ$ , αφού το  $ABE\Gamma$  ορθογώνιο, άρα το  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο τρίγωνο.

**186 Θέμα 4 - 1879**

**α.** Επειδή το σημείο  $K$  είναι το μέσο της χορδής  $\Gamma\Delta$ , έχουμε  $OK \perp \Gamma\Delta$ .

Είναι  $AB \parallel \Delta\Gamma$  και  $\Delta E \perp AB$ , άρα  $\Delta E \perp \Delta\Gamma$ .

Στο  $\Delta KOE$  είναι  $\hat{\Delta} = \hat{E} = \hat{K} = 90^\circ$ , οπότε είναι ορθογώνιο.

Άρα  $EO = \Delta K$  και αφού  $\Delta K = K\Gamma$  έχουμε  $EO = K\Gamma$ .

Επομένως  $EO \parallel K\Gamma$ , άρα το  $K\Gamma OE$  είναι παραλληλόγραμμο.

**β.** Στο ισοσκελές τρίγωνο  $O\Gamma\Delta$  ( $O\Gamma = O\Delta$ ), η  $OK$  είναι διάμεσος, οπότε είναι και διχοτόμος, άρα  $\hat{K\Omega\Gamma} = \frac{\hat{\Delta O\Gamma}}{2}$ .

Οι γωνίες  $\hat{\Delta\hat{E}K}$  και  $\hat{K\hat{O}\hat{\Gamma}}$  είναι ίσες, ως οξείες με πλευρές παράλληλες, άρα  $\hat{\Delta\hat{E}K} = \hat{K\hat{O}\hat{\Gamma}}$ .

Επομένως  $\hat{\Delta\hat{E}K} = \frac{\hat{\Delta\hat{O}\hat{\Gamma}}}{2}$ .

γ. Είναι  $KE = OD$ , ως διαγώνιοι του ορθογώνιου  $\Delta EOK$  και  $OD = OB$ , ως ακτίνες του κύκλου.  
Άρα  $KE = OB$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $OBK$ , η  $KB$  είναι υποτείνουσά του, οπότε  $OB < KB$ .

Άρα  $KE < KB$

2<sup>ος</sup> τρόπος

Είναι  $KO \perp AB$  και  $EO < AO = OB$ , άρα για τα πλάγια τμήματα  $KE$  και  $KB$  έχουμε  $KE < KB$ .

**187 Θέμα 4 - 1733**

α. i. Η ευθεία  $\epsilon_1$  είναι η μεσοκάθετος του  $MM_1$ , οπότε  $OM = OM_1$ .

ii. Στο ισοσκελές τρίγωνο  $OMM_1$  η διάμεσος  $OK$  είναι και διχοτόμος, άρα  $M\hat{O}M_1 = 2\hat{O}_2$ .  
Επειδή στο τρίγωνο  $M_1OM_2$  η  $OL$  είναι διάμεσος και ύψος το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Άρα η  $OL$  είναι και διχοτόμος και ισχύει  $M_1\hat{O}M_2 = 2\hat{O}_3$ .

Τότε  $M\hat{O}M_2 = M\hat{O}M_1 + M_1\hat{O}M_2 = 2\hat{O}_2 + 2\hat{O}_3 = 2(\hat{O}_2 + \hat{O}_3) = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$ .

Αφού η γωνία  $M\hat{O}M_2$  είναι ευθεία γωνία, τα σημεία  $M, O$  και  $M_2$  είναι συνευθειακά.

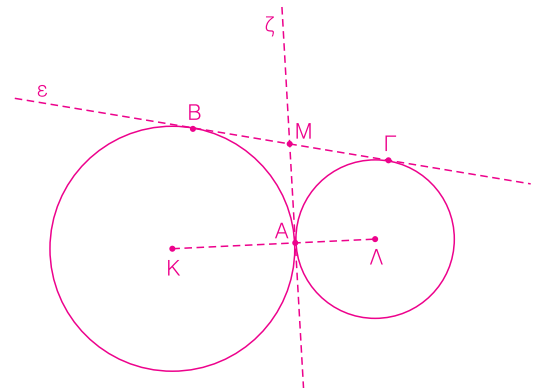
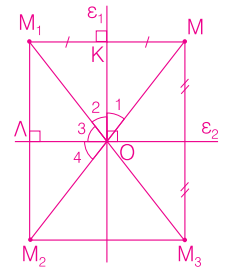
iii. Το  $KM_1LO$  είναι ορθογώνιο, αφού έχει τρεις ορθές γωνίες

$\hat{K} = \hat{\Lambda} = \hat{O} = 90^\circ$ .

Επειδή το  $KM_1LO$  είναι ορθογώνιο έχουμε  $M_1\hat{A} = 90^\circ$ , οπότε το τρίγωνο  $MM_1M_2$  είναι ορθογώνιο.

β. Τα  $M_1$  και  $M_3$  είναι τα συμμετρικά του  $M$  ως προς τις  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$ . Από το α.ii. ερώτημα έχουμε ότι τα  $M_1, O$  και  $M_3$  είναι συνευθειακά. Είναι

$OM_1 = OM = OM_2 = OM_3$ , οπότε στο  $MM_1M_2M_3$  οι διαγώνιοι διχοτομούνται και είναι ίσες, άρα είναι ορθογώνιο.



**188 Θέμα 4 - 37167**

α. Είναι:

•  $\hat{A\hat{\Delta}T} = \hat{T\hat{\Delta}E}$  και  $\hat{T\hat{\Delta}E} = \hat{A\hat{T}\Delta}$ , ως εντός εναλλάξ, οπότε  $\hat{A\hat{\Delta}T} = \hat{A\hat{T}\Delta}$ , άρα το τρίγωνο  $\Delta\hat{A}T$  είναι ισοσκελές με  $A\Delta = AT$ .

•  $\hat{G\hat{B}E} = \hat{E\hat{B}T}$  και  $\hat{E\hat{B}T} = \hat{B\hat{E}\Gamma}$ , ως εντός εναλλάξ, οπότε  $\hat{G\hat{B}E} = \hat{B\hat{E}\Gamma}$ .

Άρα το τρίγωνο  $B\hat{G}E$  είναι ισοσκελές με  $GB = GE$ .

Είναι  $BT = AB - AT = AB - A\Delta = \Gamma\Delta - B\Gamma = \Gamma\Delta - GE = \Delta E$

Επειδή  $BT \parallel \Delta E$ , το  $\Delta EBT$  είναι παραλληλόγραμμο.

β. • Στο ισοσκελές τρίγωνο  $\Delta\hat{A}T$  η διχοτόμος του  $AN$  είναι και ύψος, οπότε  $AN \perp \Delta T$ , άρα  $M\hat{N}K = 90^\circ$ , και  $\Delta T \parallel BE$ , οπότε είναι  $AN \perp BE$ , άρα  $N\hat{K}\Lambda = 90^\circ$ .

• Στο ισοσκελές τρίγωνο  $B\hat{G}E$  η διχοτόμος της  $\Gamma\Lambda$  είναι και ύψος, οπότε  $\Gamma\Lambda \perp BE$ , άρα  $M\hat{\Lambda}K = 90^\circ$ .

Επειδή το  $K\hat{A}M\hat{N}$  έχει τρεις ορθές γωνίες, είναι ορθογώνιο.

γ. Το  $\Delta EBT$  είναι παραλληλόγραμμο και τα  $N, \Lambda$  είναι τα μέσα των τμημάτων  $\Delta T, BE$  που είναι ίσα.

Άρα  $NT \parallel B\Lambda$ , οπότε το  $T\hat{B}A\hat{N}$  είναι παραλληλόγραμμο, επομένως  $N\Lambda \parallel AB$ .

δ. Είναι  $N\Lambda = BT = AB - AT = AB - A\Delta$ .

### 189 Θέμα 4 - 13699

**α.** Οι ακτίνες των δυο κύκλων στα σημεία επαφής Β και Γ είναι κάθετες στην (ε), οπότε θα είναι  $KB \parallel \Lambda\Gamma$ .

Η ΛΜ δεν είναι κάθετη στην (ε), γιατί αν η ΛΜ ήταν κάθετη στη (ε) τότε από το σημείο Λ θα άγονταν δυο κάθετες στην (ε), η ΛΜ και η ΛΓ ως ακτίνα στο σημείο επαφής Γ του κύκλου (Λ, ρ<sub>2</sub>) με την ευθεία (ε), που είναι άτοπο, και αφού η ΛΜ τέμνει την ΛΓ στο Λ θα τέμνει και την παράλληλή της την ΚΒ έστω σε σημείο Δ.

**β.** • Είναι  $ΚΔ \parallel \Lambda\Gamma$ , οπότε  $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$  (1) ως γωνίες εντός εναλλάξ.

• Η ΔΛ είναι διακεντρική ευθεία του σημείου Μ στον κύκλο (Λ, ρ<sub>2</sub>), οπότε θα διχοτομεί τη γωνία  $\hat{\Gamma\Lambda\Delta}$  δηλαδή  $\hat{\Delta}_2 = \hat{\Delta}_1$  (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι  $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_1$ , οπότε το τρίγωνο ΔΚΛ είναι ισοσκελές.

**γ.** Το ισοσκελές τρίγωνο ΔΚΛ με ίσες πλευρές τις ΚΛ, ΚΒ θα είναι ορθογώνιο όταν  $\hat{\Delta\hat{K}\Lambda} = 90^\circ$ .

Αν  $\hat{\Delta\hat{K}\Lambda} = 90^\circ$  τότε  $ΚΛ \perp ΚΔ$ , οπότε  $ΚΛ \parallel (\varepsilon)$ , άρα το τετράπλευρο ΚΛΓΒ θα είναι ορθογώνιο γιατί θα είχε τρεις ορθές γωνίες, τις  $\hat{\Delta\hat{K}\Lambda}$ ,  $\hat{ΚΒ\Gamma}$  και  $\hat{\Lambda\hat{\Gamma}Β}$ .

Αν το ΚΛΓΒ είναι ορθογώνιο τότε  $ΚΒ = \Lambda\Gamma \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2$ .

Επομένως, αν οι κύκλοι είναι ίσοι, τότε το ισοσκελές τρίγωνο ΔΚΛ θα είναι ορθογώνιο.

### 190 Θέμα 4 - 37083

**α.** Επειδή στο ΓΗΖΔ οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και είναι ίσες, είναι ορθογώνιο.

**β.** Όμοια το ΑΓΔΒ είναι ορθογώνιο.

Είναι  $\hat{Β\hat{\Delta}Ζ} = \hat{Β\hat{\Delta}\Gamma} + \hat{\Gamma\hat{\Delta}Ζ} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ , οπότε τα Β, Δ, Ζ είναι συνευθειακά.

**γ.** Το ΓΘΔΕ είναι παραλληλόγραμμο, αφού έχει τις απέναντι πλευρές ίσες.

Οπότε  $\Theta\Delta \parallel \Gamma\epsilon \Rightarrow 2\Theta\Delta \parallel 2\Gamma\epsilon \Rightarrow \Lambda\Delta \parallel \Gamma\zeta$ , άρα το ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

### 191 Θέμα 4 - 1816

**α.** Επειδή  $\Gamma\zeta \perp Κ\Delta$  και  $ΑΒ \perp Κ\Delta$ , έχουμε  $\Gamma\zeta \parallel ΑΒ$ , οπότε  $\hat{Β} = \hat{Ζ\hat{\Gamma}\Delta}$ , ως εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη.

**β.** Είναι  $\hat{\Delta\hat{\Gamma}\epsilon} = \hat{\Gamma} = \hat{Β} = \hat{Ζ\hat{\Gamma}\Delta}$ , οπότε η ΓΔ είναι η διχοτόμος της  $\hat{Ζ\hat{\Gamma}\epsilon}$ .

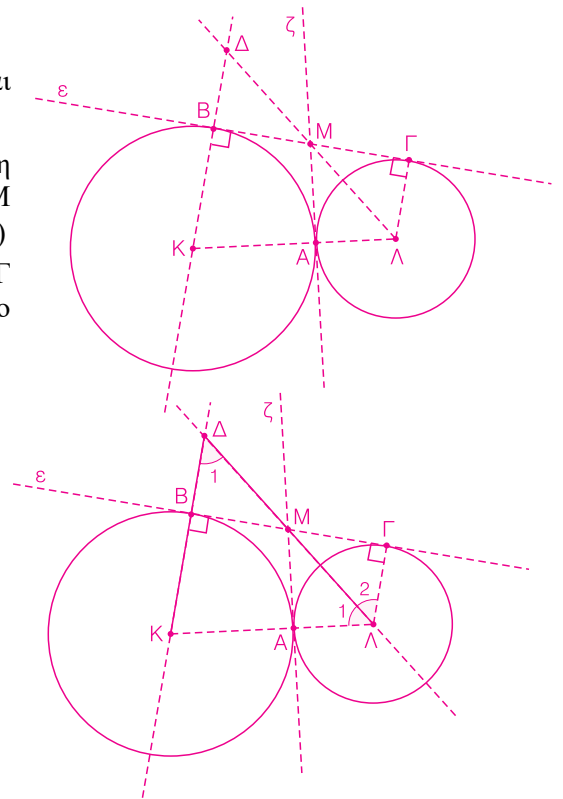
**γ.** Τα ορθογώνια τρίγωνα ΖΔΓ και ΕΔΓ έχουν:

- ΓΔ κοινή
- $\hat{Ζ\hat{\Gamma}\Delta} = \hat{\Delta\hat{\Gamma}\epsilon}$

Οπότε είναι ίσα, άρα το  $\hat{\Delta\hat{Ζ}\epsilon}$  είναι ισοσκελές.

**δ.** Το ΚΖΓΗ είναι ορθογώνιο, αφού έχει  $\hat{Κ} = \hat{Η} = \hat{Ζ} = 90^\circ$ , οπότε  $Η\Gamma = ΚΖ$ .

Είναι  $\Delta\hat{Κ} - \Delta\hat{\epsilon} = \Delta\hat{Κ} - \Delta\hat{Ζ} = ΚΖ = Η\Gamma$ .



**192 Θέμα 4 - 13523**

**α.** Στο εξάγωνο  $ΑΒΓΔΕΖ$  οι πλευρές και οι γωνίες του είναι ίσες. Έστω  $\lambda$  το μήκος της πλευράς του εξαγώνου και  $\varphi$  η γωνία του.

Τα τρίγωνα  $ΑΖΕ$  και  $ΒΓΔ$  έχουν:

- $AZ = BΓ = \lambda$
- $ZE = ΓΔ = \lambda$
- $\hat{AZE} = \hat{BΓΔ} = \varphi$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε  $AE = BΔ$ .

**β.** Το άθροισμα των γωνιών του εξάγωνου είναι  $(2n - 4)$  ορθές, δηλαδή  $(2 \cdot 6 - 4) \cdot 90^\circ = 720^\circ$ .

Επειδή όλες οι γωνίες ίσες, η κάθε μία θα είναι  $720^\circ : 6 = 120^\circ$ .

Στο ισοσκελές τρίγωνο  $AZE$  ( $AZ = ZE$ ) οι γωνίες της βάσης  $\hat{ZAE}$  και  $\hat{ZEA}$  θα είναι ίσες και ισχύει:

$$\hat{Z} + \hat{ZAE} + \hat{ZEA} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{ZAE} + \hat{ZEA} = 180^\circ - \hat{Z} \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2\hat{ZEA} = 180^\circ - 120^\circ \Leftrightarrow 2\hat{ZEA} = 60^\circ \Leftrightarrow \hat{ZEA} = 30^\circ$$

Άρα  $\hat{AED} = \hat{ZED} - \hat{ZEA} = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$ , οπότε  $AE \perp ED$ .

**γ. i.** Επειδή: •  $AB = ED$  και  $AE = BΔ$ , το  $AEDB$  είναι παραλληλόγραμμο, γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.

•  $AE \perp ED$  το  $AEDB$  έχει μία γωνία ορθή, άρα είναι ορθογώνιο.

Οι διαγώνιες του  $AD$  και  $BE$  είναι ίσες και διχοτομούνται, επομένως

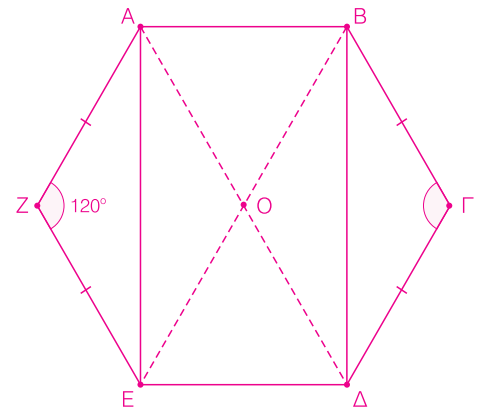
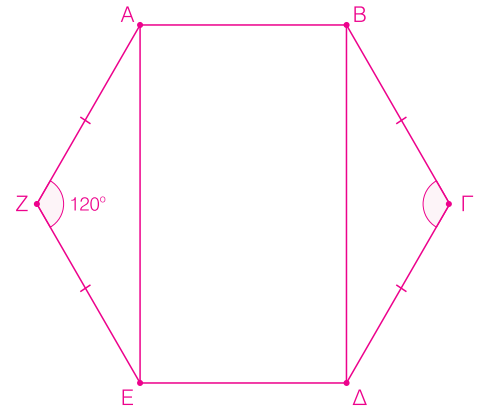
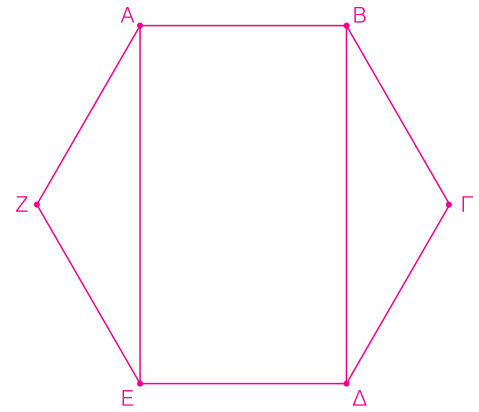
$$BO = \frac{BE}{2} = \frac{AD}{2}$$

Άρα  $2BO = AD$ .

**ii.** Από το **i.** έχουμε  $BO = AO = OD$ , επομένως, τα  $A, B, Δ$  ισαπέχουν από το  $O$ .

Άρα, βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο το  $O$  και ακτίνα  $OB$ .

Επομένως, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.



**193 Θέμα 2 - 36351**

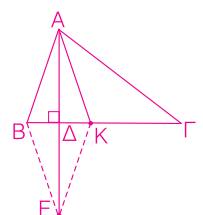
**α.** Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του, οπότε η  $EA$  είναι η διχοτόμος της  $\hat{A}$ , επομένως το  $E$  ισαπέχει από τις πλευρές  $AB$  και  $AG$  της  $\hat{A}$ .

**β.** Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούνται κάθετα, άρα  $EA$  είναι η μεσοκάθετος του  $BΓ$ , οπότε το  $E$  ισαπέχει από τα  $B$  και  $Γ$ .

**194 Θέμα 2 - 34498**

**α.** Στο τρίγωνο  $ABK$  το  $AD$  είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

**β.** Είναι  $DA = DE$  και  $DB = DK$ , οπότε το  $AKEB$  είναι παραλληλόγραμμο και αφού έχει  $AB = AK$  είναι ρόμβος.



**195 Θέμα 2 - 36349**

**α.** Το  $OM$  είναι απόστημα της χορδής  $BΓ$ , οπότε το  $M$  είναι μέσο της  $BΓ$ .  
Στο τετράπλευρο  $ΑΓΟΒ$  οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και τέμνονται κάθετα.  
Άρα το  $ΑΓΟΒ$  είναι ρόμβος.

**β.** Είναι  $OA = OB = OG = ρ$ ,  $OG = AG$  και  $OB = AB$ .

Οπότε τα τρίγωνα  $ΟΑΓ$  και  $ΟΑΒ$  είναι ισόπλευρα.

Άρα στο  $ΑΓΟΒ$  είναι  $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$  και  $\hat{O} = \hat{A} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$ .

**196 Θέμα 36107**

**α.** Επειδή η  $ΔΕ$  είναι η μεσοκάθετος του  $AB$  έχουμε  $ΔA = ΔB$  και  $EA = EB$ .

**β.** Τα ορθογώνια τρίγωνα  $ΑΜΔ$  και  $ΕΜΒ$  έχουν:

- $MA = MB$
- $\hat{\Delta AM} = \hat{M BE}$  ως εντός εναλλάξ

Οπότε είναι ίσα.

**γ.** Από το **β.** ερώτημα προκύπτει  $AD = EB$ , οπότε το  $ΑΔΒΕ$  έχει όλες τις πλευρές του ίσες, άρα είναι ρόμβος.

**197 Θέμα 2 - 34513**

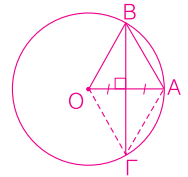
**α.** Είναι: •  $OA = OB = ρ$   
•  $BO = BA$ , αφού η  $BΓ$  είναι μεσοκάθετος της  $OA$

Άρα  $OA = OB = BA$ , οπότε το τρίγωνο  $OAB$  είναι ισόπλευρο.

**β.** Το  $Γ$  ανήκει στη μεσοκάθετο του  $OA$ , οπότε  $GA = GO = ρ$

Επομένως  $OB = BA = AG = GO = ρ$ .

Άρα το  $OBAΓ$  είναι ρόμβος.

**198 Θέμα 2 - 34504**

**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα  $AZΔ$  και  $AEB$  έχουν:

- $AD = AB$
- $\hat{\Delta} = \hat{B}$ , αφού το  $ΑΒΓΔ$  είναι ρόμβος. Άρα είναι ίσα, οπότε  $AZ = AE$ .

**β.** Τα ορθογώνια τρίγωνα  $AZΔ$  και  $AEB$  έχουν:

- $AZ = AE$
- $\hat{\Delta} = \hat{B}$ , αφού το  $ΑΒΓΔ$  είναι παραλληλόγραμμο. Οπότε είναι ίσα, άρα  $AD = AB$ . Επομένως το παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$  έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, άρα είναι ρόμβος.

**199 Θέμα 2 - 13767**

**α.** Οι γωνίες των ισόπλευρων τριγώνων  $ΑΒΔ$  και  $ΒΓΕ$  είναι  $60^\circ$  καθεμιά.

Είναι

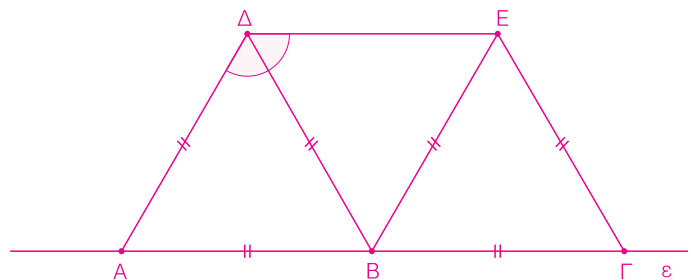
$$\hat{A}BD + \hat{\Delta}BE + \hat{E}BG = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \hat{\Delta}BE + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \hat{\Delta}BE = 60^\circ$$

**β.** Έχουμε

$$AB = AD = BD, \quad B\Gamma = BE = GE \quad \text{και} \quad AB = B\Gamma$$

Οπότε  $BD = BE$ , άρα το τρίγωνο  $BDE$  είναι ισοσκελές με βάση  $DE$ , οπότε  $\hat{B}DE = \hat{E}BD$ .



Στο τρίγωνο ΒΔΕ ισχύει:

$$\widehat{B\Delta E} + \widehat{B\hat{E}\Delta} + \widehat{\Delta B E} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{B\Delta E} + \widehat{B\Delta E} + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{B\Delta E} = 120^\circ \Leftrightarrow \widehat{B\Delta E} = 60^\circ \text{ \u0391\u03c1\u03b1 \u03ba\u03b1\u03b9 } \widehat{B\hat{E}\Delta} = 60^\circ$$

Αφ\u03bf\u03c5 \u03c9\u03b9 \u03b3\u03c9\u03bd\u03b9\u03b5\u03c2 \u03c4\u03bf\u03c5 \u03c4\u03c1\u03b9\u03b3\u03c9\u03bd\u03bf\u03c5 \u0392\u0394\u0395 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03b9\u03c3\u03b5\u03c2 \u03bc\u03b5  $60^\circ$  \u03c4\u03bf \u03c4\u03c1\u03b9\u03b3\u03c9\u03bd\u03bf \u0392\u0394\u0395 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03b9\u03c3\u03cc\u03c0\u03bb\u03b5\u03c5\u03c1\u03bf.

\u03b3. \u0395\u03b9\u03bd\u03b1  $\Delta E = BE = B\Delta$  , \u03cc\u03c0\u03cc\u03c4\u03b5 \u03c4\u03bf \u03c4\u03b5\u03c4\u03c1\u03ac\u03c0\u03bb\u03b5\u03c5\u03c1\u03bf \u0391\u0394\u0395\u0392 \u03b5\u03c7\u03b5\u03b9 \u03cc\u03bb\u03b5\u03c2 \u03c4\u03b9\u03c2 \u03c0\u03bb\u03b5\u03c5\u03c1\u03b5\u03c2 \u03c4\u03bf\u03c5 \u03b9\u03c3\u03b5\u03c2, \u03b1\u03c6\u03bf\u03c5  $A\Delta = AB = \Delta E$  \u03b1\u03c1\u03b1 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03c1\u03cc\u03bc\u03b2\u03bf\u03c2.

### 200 \u0398\u03b5\u03bc\u03b1 2 - 13832

\u03b1. i. \u0395\u03b9\u03bd\u03b1:  $\widehat{A\hat{M}B} = \widehat{\Gamma\hat{M}B}$

\u2022  $\widehat{A\hat{M}B} + \widehat{\Gamma\hat{M}B} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{A\hat{M}B} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{A\hat{M}B} = 90^\circ$  . \u0391\u03c1\u03b1  $\widehat{A\hat{M}B} = \widehat{\Gamma\hat{M}B} = 90^\circ$  . \u0395\u03c0\u03cc\u03bc\u03b5\u03bd\u03c9\u03c2 \u03c9\u03b9 \u0392\u0394 \u03ba\u03b1\u03b9 \u0391\u0393 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03ba\u03ac\u03b8\u03b5\u03c4\u03b5\u03c2.

ii. \u039c\u03bf \u039c \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03bc\u03b5\u03c3\u03c9 \u03c4\u03c9\u03bd \u03b4\u03b9\u03b1\u03b3\u03c9\u03bd\u03b9\u03c9\u03bd \u03c4\u03bf\u03c5 \u0391\u0392\u0393\u0394, \u03b1\u03c1\u03b1 \u03c9\u03b9 \u03b4\u03b9\u03b1\u03b3\u03c9\u03bd\u03b9\u03b5\u03c2 \u03c4\u03bf\u03c5 \u03b4\u03b9\u03c7\u03cc\u03c4\u03bf\u03bc\u03bf\u03bd\u03b1\u03b9.

\u0395\u03c0\u03cc\u03bc\u03b5\u03bd\u03c9\u03c2 \u03c4\u03bf \u0391\u0392\u0393\u0394 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03c0\u03b1\u03c1\u03b1\u03bb\u03b7\u03bb\u03cc\u03b3\u03c1\u03b1\u03bc\u03bc\u03bf.

\u0395\u03c0\u03cc\u03bc\u03b5\u03bd\u03c9\u03c2 \u03c4\u03bf \u0391\u0392\u0393\u0394 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03c1\u03cc\u03bc\u03b2\u03bf\u03c2, \u03b3\u03b9\u03b1\u03c4\u03b9 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03c0\u03b1\u03c1\u03b1\u03bb\u03b7\u03bb\u03cc\u03b3\u03c1\u03b1\u03bc\u03bc\u03bf \u03ba\u03b1\u03b9 \u03c9\u03b9 \u03b4\u03b9\u03b1\u03b3\u03c9\u03bd\u03b9\u03b5\u03c2 \u03c4\u03bf\u03c5 \u0391\u0393 \u03ba\u03b1\u03b9 \u0392\u0394 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03ba\u03ac\u03b8\u03b5\u03c4\u03b5\u03c2.

\u03b2. \u039c\u03bf \u0391\u0392\u0393\u0394 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03c1\u03cc\u03bc\u03b2\u03bf\u03c2, \u03b5\u03c0\u03cc\u03bc\u03b5\u03bd\u03c9\u03c2 \u03ba\u03ac\u03b8\u03b5 \u03c0\u03bb\u03b5\u03c5\u03c1\u03ac \u03b5\u03c7\u03b5\u03b9 \u03bc\u03b7\u03ba\u03cc\u03c2  $30 : 4 = 7,5$  \u03bc\u03b5\u03c4\u03c1\u03b1. \u0395\u03c0\u03cc\u03bc\u03b5\u03bd\u03c9\u03c2, \u03b1\u03bd \u03b1\u03c6\u03b7\u03c3\u03bf\u03c5\u03bc\u03b5 \u03c4\u03b7\u03bd \u03c0\u03bb\u03b5\u03c5\u03c1\u03ac \u0391\u0392 \u03c7\u03c9\u03c1\u03b9\u03c2 \u03c6\u03c1\u03ac\u03c7\u03b7, \u03b8\u03b1 \u03c7\u03c1\u03b5\u03b9\u03b1\u03c3\u03c4\u03cc\u03c5\u03bc\u03b5  $30 - 7,5 = 22,5$  \u03bc\u03b5\u03c4\u03c1\u03b1 \u03c6\u03c1\u03ac\u03c7\u03b7.

### 201 \u0398\u03b5\u03bc\u03b1 2 - 13842

\u03b1. \u039c\u03bf \u0391\u0392\u0397\u0397 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03c1\u03cc\u03bc\u03b2\u03bf\u03c2, \u03cc\u03c0\u03cc\u03c4\u03b5 \u03b7 \u03b4\u03b9\u03b1\u03b3\u03c9\u03bd\u03b9\u03bf\u03c2 \u03c4\u03bf\u03c5 \u0392\u0397 \u03b4\u03b9\u03c7\u03cc\u03c4\u03bf\u03bc\u03b5\u03b9 \u03c4\u03b7 \u03b3\u03c9\u03bd\u03b9\u03b1 \u03c4\u03bf\u03c5  $\widehat{A\hat{B}Z}$  , \u03b1\u03c1\u03b1  $\widehat{A\hat{B}H} = \widehat{Z\hat{B}H} = 51^\circ$  .

\u03b2. \u0395\u03b9\u03bd\u03b1  $\widehat{A\hat{B}Z} = \widehat{A\hat{B}H} + \widehat{Z\hat{B}H} = 102^\circ$  . \u0391\u03c1\u03b1 \u03c9\u03b9 \u03b5\u03bd\u03c4\u03cc\u03c2 \u03ba\u03b1\u03b9 \u03b5\u03c0\u03b9 \u03c4\u03b1 \u03b1\u03c5\u03c4\u03ac \u03b3\u03c9\u03bd\u03b9\u03b5\u03c2  $\widehat{A\hat{B}Z} = 102^\circ$  \u03ba\u03b1\u03b9  $\widehat{B\hat{A}H} = 78^\circ$  , \u03c4\u03c9\u03bd  $\epsilon_1$  \u03ba\u03b1\u03b9  $\epsilon_2$  \u03bc\u03b5 \u03c4\u03b5\u03bc\u03bd\u03bf\u03c5\u03c3\u03b1 \u03c4\u03b7\u03bd \u0391\u0392 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03c0\u03b1\u03c1\u03b1\u03c0\u03bb\u03b7\u03c1\u03c9\u03bc\u03b1\u03c4\u03b9\u03ba\u03b5\u03c2. \u0395\u03c0\u03cc\u03bc\u03b5\u03bd\u03c9\u03c2 \u03c9\u03b9 \u03b5\u03c5\u03b8\u03b5\u03b9\u03b5\u03c2  $\epsilon_1$  \u03ba\u03b1\u03b9  $\epsilon_2$  \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03c0\u03b1\u03c1\u03ac\u03bb\u03b7\u03bb\u03b5\u03c2.

\u03b3. \u0397 \u0393\u0394 \u03c4\u03b5\u03bc\u03bd\u03b5\u03b9 \u03ba\u03ac\u03b8\u03b5\u03c4\u03b1 \u03c4\u03b7\u03bd  $\epsilon_2$  , \u03b1\u03c1\u03b1 \u03c4\u03b5\u03bc\u03bd\u03b5\u03b9 \u03ba\u03ac\u03b8\u03b5\u03c4\u03b1 \u03ba\u03b1\u03b9 \u03c4\u03b7\u03bd  $\epsilon_1$  \u03c4\u03c9 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03c0\u03b1\u03c1\u03ac\u03bb\u03b7\u03bb\u03b7 \u03c4\u03b7\u03c2  $\epsilon_2$  .

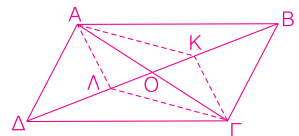
\u0395\u03c0\u03cc\u03bc\u03b5\u03bd\u03c9\u03c2 \u03c4\u03bf \u03c4\u03c1\u03b9\u03b3\u03c9\u03bd\u03bf \u0393\u0394\u0395 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03cc\u03c1\u03b8\u03cc\u03b3\u03c9\u03bd\u03b9\u03bf, \u03b1\u03c1\u03b1  $\widehat{\Gamma} = 90^\circ - \widehat{E} = 90^\circ - 56^\circ = 34^\circ$  .

### 202 \u0398\u03b5\u03bc\u03b1 4 - 37109

\u03b1. \u03a6\u03b5\u03c1\u03bf\u03c5\u03bc\u03b5 \u03c4\u03b7 \u03b4\u03b9\u03b1\u03b3\u03c9\u03bd\u03b9\u03bf \u0391\u0393 \u03c4\u03bf\u03c5 \u0391\u0392\u0393\u0394. \u0395\u03c0\u03b5\u03b9\u03b4\u03b9\u03c7\u03b9  $OB = OD$  \u03ba\u03b1\u03b9  $BK = \Delta\Lambda$  \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1

$$OB - BK = OD - \Delta\Lambda \Leftrightarrow OK = O\Lambda$$

\u0391\u03c6\u03bf\u03c5  $OK = O\Lambda$  \u03ba\u03b1\u03b9  $OA = OG$  , \u03c4\u03bf \u0391\u039a\u0393\u039b \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03c0\u03b1\u03c1\u03b1\u03bb\u03b7\u03bb\u03cc\u03b3\u03c1\u03b1\u03bc\u03bc\u03bf, \u03b1\u03c6\u03bf\u03c5 \u03c9\u03b9 \u03b4\u03b9\u03b1\u03b3\u03c9\u03bd\u03b9\u03bf\u03c2 \u03c4\u03bf\u03c5 \u03b4\u03b9\u03c7\u03cc\u03c4\u03bf\u03bc\u03bf\u03bd\u03b1\u03b9.



\u03b2. \u0391\u03bd \u03c4\u03bf \u0391\u0392\u0393\u0394 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03c1\u03cc\u03bc\u03b2\u03bf\u03c2, \u03c4\u03cc\u03c4\u03b5  $AG \perp BD$  , \u03cc\u03c0\u03cc\u03c4\u03b5 \u03ba\u03b9 \u03c4\u03bf \u03c0\u03b1\u03c1\u03b1\u03bb\u03b7\u03bb\u03cc\u03b3\u03c1\u03b1\u03bc\u03bc\u03bf \u0391\u039a\u0393\u039b \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1  $AG \perp \u039a\Lambda$  . \u0391\u03c1\u03b1 \u03c4\u03bf \u0391\u039a\u0393\u039b \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03c1\u03cc\u03bc\u03b2\u03bf\u03c2.

\u03b3. \u039c\u03bf \u03c0\u03b1\u03c1\u03b1\u03bb\u03b7\u03bb\u03cc\u03b3\u03c1\u03b1\u03bc\u03bc\u03bf \u0391\u039a\u0393\u039b \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03cc\u03c1\u03b8\u03cc\u03b3\u03c9\u03bd\u03b9\u03bf, \u03cc\u03c4\u03b1\u03bd  $AG = \u039a\Lambda \Leftrightarrow AG = \frac{1}{3}BD \Leftrightarrow BD = 3AG$  .

### 203 \u0398\u03b5\u03bc\u03b1 4 - 1740

\u03b1. \u0398\u03b5\u03c9\u03c1\u03bf\u03c5\u03bc\u03b5 \u03c4\u03bf \u03c0\u03b1\u03c1\u03b1\u03bb\u03b7\u03bb\u03cc\u03b3\u03c1\u03b1\u03bc\u03bc\u03bf \u0391\u0392\u0393\u0394 \u03ba\u03b9  $AE \perp \u0392\u0393$  ,  $AZ \perp \u0394\u0393$

\u0391\u03c0\u03cc\u03b4\u03b5\u03b9\u03be \u03c0\u03c1\u03cc\u03c4\u03b1\u03c3\u03b7\u03c2 \u039d\u0399:

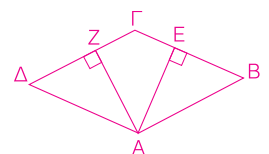
\u2022 \u038c\u03c3\u03c4\u03c9 \u03cc\u03c4\u03b9 \u03c4\u03bf \u0391\u0392\u0393\u0394 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03c1\u03cc\u03bc\u03b2\u03bf\u03c2.

\u039c\u03bf \u03cc\u03c1\u03b8\u03cc\u03b3\u03c9\u03bd\u03b9\u03b1 \u03c4\u03c1\u03b9\u03b3\u03c9\u03bd\u03b1 \u0391\u0397\u0394 \u03ba\u03b9 \u0391\u0395\u0392 \u03b5\u03c7\u03c9\u03bd:

\u2022  $A\Delta = AB$

\u2022  $\widehat{\Delta} = \widehat{B}$  , \u03b1\u03c6\u03bf\u03c5 \u03c4\u03bf \u0391\u0392\u0393\u0394 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03c1\u03cc\u03bc\u03b2\u03bf\u03c2

\u0391\u03c1\u03b1 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03b9\u03c3\u03b1, \u03cc\u03c0\u03cc\u03c4\u03b5  $AZ = AE$  .



\u0391\u03c0\u03cc\u03b4\u03b5\u03b9\u03be \u03c0\u03c1\u03cc\u03c4\u03b1\u03c3\u03b7\u03c2 \u039d\u0399\u0392:

\u2022 \u038c\u03c3\u03c4\u03c9 \u03cc\u03c4\u03b9  $AE = AZ$  .



Τα ορθογώνια τρίγωνα  $AZ\Delta$  και  $AEB$  έχουν:

- $AZ = AE$
- $\hat{\Delta} = \hat{B}$  αφού το  $AB\Gamma\Delta$  παραλληλόγραμμο.

Οπότε είναι ίσα, άρα  $A\Delta = AB$ .

Επομένως το παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  είναι ρόμβος.

**β.** Ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, αν και μόνο αν, οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

## 204 Θέμα 4 - 37117

- α.** Είναι:
- $\Delta A = \Delta \Gamma$ , οπότε  $\hat{\Delta A\Gamma} = \hat{\Gamma} = \hat{\phi}$
  - $\hat{A\Delta B}$  εξωτερική στο  $\hat{A\Delta\Gamma}$ , οπότε  $\hat{A\Delta B} = \hat{\Delta A\Gamma} + \hat{\Gamma} = 2\hat{\phi}$

Επειδή η  $\Delta E$  είναι η διχοτόμος της  $\hat{A\Delta B}$ , έχουμε  $\hat{E\Delta A} = \frac{\hat{A\Delta B}}{2} = \frac{2\hat{\phi}}{2} = \hat{\phi}$ .

Επομένως  $\hat{E\Delta A} = \hat{\Delta A\Gamma}$  οι οποίες είναι εντός εναλλάξ, άρα  $E\Delta // A\Gamma$ .

**β.** Είναι  $\hat{E\Delta\Delta} = \hat{\Delta A\Delta} = \phi$ , αφού η  $A\Delta$  διχοτόμος της  $\hat{A}$ .

Οπότε  $\hat{E\Delta\Delta} = \hat{E\Delta A} = \phi$ , άρα το τρίγωνο  $E\Delta\Delta$  είναι ισοσκελές.

**γ.** Επειδή  $\Delta E // AZ$  και  $Z\Delta // AE$ , το  $AZ\Delta E$  είναι παραλληλόγραμμο οπότε οι διαγώνιοι του  $A\Delta$  και  $EZ$  διχοτομούνται.

## 205 Θέμα 4 - 1823

**α.** Είναι  $A\Gamma = B\Gamma$  ως εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου που άγονται από το σημείο  $\Gamma$ .

Άρα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με βάση την  $AB$ .

Τα ορθογώνια τα τρίγωνα  $ABE$  και  $AB\Delta$  έχουν:

- $AB$  κοινή
- $\hat{A\Delta B} = \hat{B\Delta E}$ , ως γωνίες προσκείμενες στη βάση  $AB$  του ισοσκελούς τριγώνου  $AB\Gamma$ .

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε  $\hat{A\Delta E} = \hat{B\Delta\Delta}$ .

Επομένως το τρίγωνο  $BHA$  είναι ισοσκελές με βάση την  $AB$ .

- β.** Είναι:
- $OA = OB = \rho$
  - $OA \perp A\Gamma$  και  $BE \perp A\Gamma$ , οπότε  $OA // BE$
  - $OB \perp B\Gamma$  και  $A\Delta \perp B\Gamma$ , οπότε  $OB // A\Delta$

Επειδή  $OA // BH$  και  $OB // AH$ , το  $OBHA$  είναι παραλληλόγραμμο και επειδή  $OA = OB$  είναι ρόμβος.

**γ.** Αφού  $OA = OB$ ,  $HA = HB$  και  $\Gamma A = \Gamma B$ , τα  $O$ ,  $H$  και  $\Gamma$  ανήκουν στη μεσοκάθετο του  $BA$ , οπότε είναι συνευθειακά.

## 206 Θέμα 4 - 37141

- α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα  $BA\Delta$  ( $\hat{B} = 90^\circ$ ) και  $\Gamma AE$  ( $\hat{\Gamma} = 90^\circ$ ) έχουν:
- $AB = \Gamma E$
  - $B\Delta = A\Gamma$

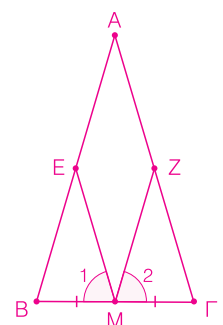
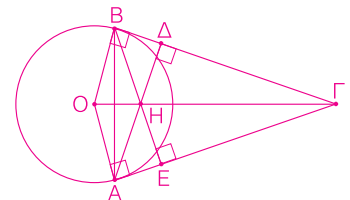
Οπότε είναι ίσα, άρα  $A\Delta = AE$ .

- β.** Τα τρίγωνα  $AKZ$  και  $A\Theta K$  έχουν:
- $AZ = A\Theta$  ως μισά ίσων τμημάτων
  - $AK$  κοινή
  - $\hat{ZAK} = \hat{K\Delta\Theta}$ , αφού η  $A\Delta$  διχοτόμος

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα  $KZ = K\Theta$ .

- γ.**
- $K\Theta = KZ$ , από το **β.** ερώτημα
  - $KZ = AZ$ , από υπόθεση
  - $AZ = A\Theta$ , ως μισά ίσων τμημάτων.

Άρα  $K\Theta = KZ = AZ = A\Theta$ , οπότε το  $AZK\Theta$  είναι ρόμβος.



**207 Θέμα 4 - 13745**

**α. i.** Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε:

- $ME \parallel AG$  , οπότε το Ε θα είναι μέσο της ΑΒ και  $ME = \frac{AG}{2}$  (1)
- $MZ \parallel AB$  , θα είναι Ζ το μέσο της ΑΓ και  $MZ = \frac{AB}{2}$  (2)

Είναι  $AB = AG$  , οπότε από τις (1) και (2) προκύπτει ότι  $ME = MZ$  .

**ii.** Είναι  $ME \parallel AG$  ή  $ME \parallel AZ$  και  $MZ \parallel AB$  ή  $MZ \parallel AE$  , οπότε το τετράπλευρο ΑΕΜΖ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

Επιπλέον οι διαδοχικές πλευρές του ΜΕ και ΜΖ είναι ίσες, οπότε το ΑΕΜΖ είναι ρόμβος.

Η περίμετρος του ρόμβου είναι  $AE + EM + MZ + AZ = 4AE = 4 \frac{AB}{2} = 2AB$  .

**β. i.** Οι απέναντι πλευρές του τετράπλευρου ΑΚΔΛ είναι παράλληλες, άρα το ΑΚΔΛ είναι παραλληλόγραμμο.

Θα αποδείξουμε ότι το ΑΚΔΛ , όταν το Δ δεν είναι το μέσο του ΒΓ δε μπορεί να είναι ρόμβος.

- Είναι  $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_1$  , ως εντός εκτός και επί τα αυτά, άρα  $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}$  .  
Οπότε το ΒΚΔ είναι ισοσκελές τρίγωνο με  $K\Delta = KB$  , (1).
- Είναι  $\hat{B} = \hat{\Delta}_2$  , ως εντός εκτός και επί τα αυτά, άρα  $\hat{\Delta}_2 = \hat{\Gamma}$  .  
Άρα το τρίγωνο ΔΛΓ είναι ισοσκελές με  $\Lambda\Delta = \Lambda\Gamma$  (2).

Επειδή  $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}$  ,  $\hat{\Delta}_2 = \hat{\Gamma}$  και  $\hat{B} = \hat{\Gamma}$  , προκύπτει ότι  $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = \hat{B} = \hat{\Gamma}$  .

Δηλαδή τα ισοσκελή τρίγωνα ΒΚΔ και ΓΛΔ έχουν τις γωνίες της βάσης τους ίσες μία προς μία, οπότε και οι τρίτες γωνίες τους,  $\hat{B}\hat{K}\hat{\Delta}$  και  $\hat{\Gamma}\hat{\Lambda}\hat{\Delta}$  , θα είναι μεταξύ τους ίσες.

Αν το Δ δεν ταυτίζεται με το μέσο Μ της ΒΓ τα τμήματα ΒΔ και ΔΓ δεν είναι ίσα, οπότε και τα τρίγωνα ΒΚΔ και ΓΛΔ δεν είναι ίσα. (Αν ήταν ίσα θα έπρεπε και οι πλευρές ΒΔ και ΔΓ που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες  $\hat{B}\hat{K}\hat{\Delta}$  και  $\hat{\Gamma}\hat{\Lambda}\hat{\Delta}$  αντίστοιχα, να είναι ίσες).

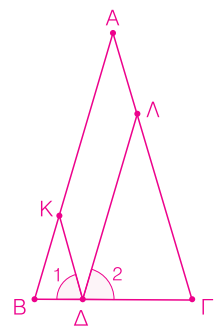
Οι πλευρές ΔΚ και ΔΛ δεν είναι ίσες, γιατί αν ήταν ίσες, τα τρίγωνα ΒΚΔ και ΓΛΔ θα ήταν ίσα από το κριτήριο ΓΠΓ. Άτοπο, αφού αποδείξαμε ότι τα τρίγωνα ΒΚΔ και ΓΛΔ δεν είναι ίσα.

Οπότε οι διαδοχικές πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΚΔΛ δεν είναι ίσες , επομένως αυτό δεν είναι πια ρόμβος.

**ii.** Η περίμετρος του παραλληλογράμμου ΑΚΔΛ είναι

$$AK + K\Delta + \Delta\Lambda + \Lambda A = AK + KB + \Gamma\Lambda + \Lambda A = AB + AG = AB + AB = 2AB$$

Παρατηρούμε ότι η περίμετρος του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται όταν το Δ είναι οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ είναι σταθερή και ίση με 2ΑΒ.



**208 Θέμα 4 - 13857**

**α.** Η ΒΔ είναι μεσοκάθετος της ΑΓ, άρα ΑΜ = ΜΓ.

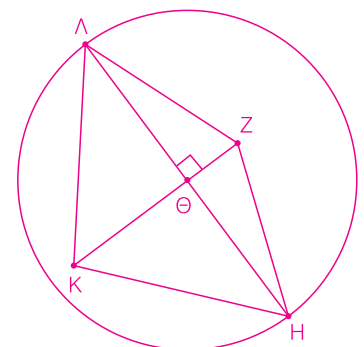
Επιπλέον ΒΜ = ΜΔ, οπότε οι διαγώνιοι του ΑΒΓΔ διχοτομούνται. Άρα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Είναι οι  $B\Delta \perp AG$  , οπότε οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι κάθετες, άρα το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

**β.** Η Πρόταση 1 έχει αποδειχθεί στο ερώτημα α., άρα είναι αληθής.

Η Πρόταση 2 είναι ψευδής.

Στο παρακάτω σχήμα η διαγώνιος ΛΗ του τετραπλεύρου ΚΛΖΗ είναι κάθετη στη διαγώνιό του ΖΚ και διάμετρος του κύκλου με κέντρο το Θ, σημείο τομής των διαγωνίων. Δηλαδή το ΚΛΖΗ πληροί την υπόθεση της Πρότασης 2.



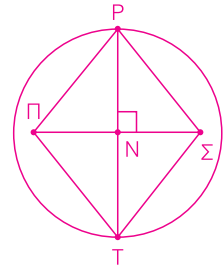
Ωστόσο το τετράπλευρο ΚΛΖΗ δεν είναι ρόμβος. Πράγματι ισχύει  $K\Theta > \Theta Z$ , άρα οι διαγώνιοι του ΚΛΖΗ δεν έχουν κοινό μέσο (το  $\Theta$  είναι μέσο της ΛΗ, αλλά όχι της ΖΚ). Άρα το ΚΛΖΗ δεν είναι παραλληλόγραμμο, επομένως δεν είναι και ρόμβος.

γ. Σχεδιάζουμε το τετράπλευρο ΠΡΣΤ.

Η διαγώνιος του ΡΤ είναι μεσοκάθετος της ΠΣ, εφόσον είναι κάθετες και  $ΠΝ = ΝΣ$ , από την υπόθεση.

Επίσης η ΡΤ είναι διάμετρος του κύκλου που έχει ως κέντρο το Ν, σημείο τομής των διαγωνίων του τετραπλεύρου.

Άρα από την Πρόταση 1 (του ερωτήματος β.) που αποδείχθηκε στο α. το ΠΡΣΤ είναι ρόμβος. Συνεπώς έχει όλες τις πλευρές του ίσες. Δηλαδή  $ΠΡ = ΡΣ = ΣΤ = ΤΠ$ .



## 209 Θέμα 2 - 36173

α. i. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο είναι  $\widehat{ΑΒΓ} = 60^\circ$ .

Οπότε  $\widehat{ΑΒΕ} = \widehat{ΑΒΓ} + \widehat{ΕΒΓ} = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$

ii. Επειδή  $ΑΒ = ΒΓ = ΒΕ$ , το τρίγωνο ΒΕΑ είναι ισοσκελές οπότε  $\widehat{ΒΕΑ} = \widehat{ΒΑΕ}$

Στο τρίγωνο ΒΕΑ έχουμε  $\widehat{ΒΕΑ} + \widehat{ΒΑΕ} + \widehat{ΑΒΕ} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{ΒΕΑ} + 150^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{ΒΕΑ} = 30^\circ \Leftrightarrow \widehat{ΒΕΑ} = 15^\circ$ .

β. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ έχουν:

- $ΑΒ = ΑΓ$ , ως πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ
- $ΒΕ = ΓΔ$ , ως πλευρές του τετραγώνου ΒΓΔΕ
- $\widehat{ΑΓΔ} = \widehat{ΑΓΒ} + \widehat{ΒΓΔ} = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ = \widehat{ΑΒΕ}$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ) οπότε  $ΑΕ = ΑΔ$ . Επομένως το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.

## 210 Θέμα 2 - 36174

α. Είναι  $ΑΒ = ΑΕ$  ως πλευρές τετραγώνου και  $ΑΒ = ΑΓ$  από υπόθεση. Άρα  $ΑΕ = ΑΓ$ , οπότε το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές.

β. Επειδή το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές έχουμε  $\widehat{ΑΕΓ} = \widehat{ΕΓΑ}$ .

Στο τρίγωνο ΑΕΓ είναι  $\widehat{ΕΑΓ} + \widehat{ΑΕΓ} + \widehat{ΕΓΑ} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{ΕΓΑ} + \widehat{ΕΑΒ} + \widehat{ΒΑΓ} = 180^\circ$

$$\Leftrightarrow 2\widehat{ΕΓΑ} + 90^\circ + \widehat{ΒΑΓ} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{ΕΓΑ} = 90^\circ - \widehat{ΒΑΓ}$$

## 211 Θέμα 2 - 36165

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΕΔ έχουν:

- $ΑΒ = ΑΔ$
- $ΒΖ = ΑΕ$ , ως αθροίσματα ίσων τμημάτων.

Οπότε είναι ίσα.

β. Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΕΔ, είναι ίσα έχουμε  $\widehat{ΑΕΔ} = \widehat{ΑΖΒ}$ .

Είναι  $\widehat{ΑΕΔ} = \widehat{ΕΔΓ}$ , ως εντός εναλλάξ, οπότε  $\widehat{ΕΔΓ} = \widehat{ΑΖΒ}$ .

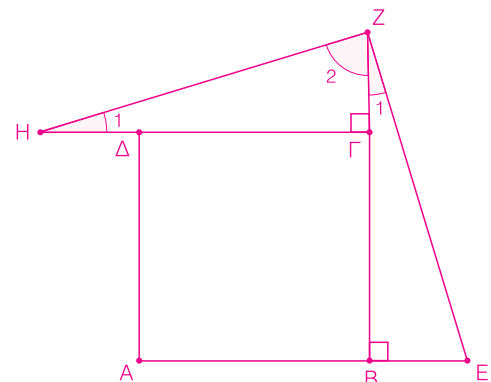
## 212 Θέμα 2 - 13536

α. Τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΓΖΗ έχουν:

- $\widehat{ΕΒΖ} = \widehat{ΖΓΗ} = 90^\circ$
- $ΒΕ = ΓΖ$
- $ΒΕ = ΓΗ$  ως άθροισμα των ίσων τμημάτων ΒΓ, ΓΔ και ΒΕ, ΓΖ.

Οπότε είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

Άρα  $ΖΕ = ΖΗ$ .



**β.** Από την ισότητα των τριγώνων BEZ και ΓZH έχουμε ότι  $\hat{Z}_1 = \hat{H}_1$  (1),

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓZH έχουμε  $\hat{H}_1 + \hat{Z}_2 = 90^\circ$  (2).

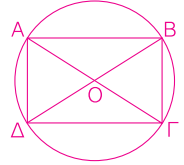
Από τις ισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι  $\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{EZH} = 90^\circ$ .

**213 Θέμα 2 - 14883**

**α.** Είναι  $OA = OB = OC = OD = OE = OF = OG = OH = \rho$ .

Στο ABΓΔ οι διαγώνιοι διχοτομούνται και είναι ίσες αφού  $AG = BD = 2\rho$ .

Άρα το ABΓΔ είναι ορθογώνιο.



**β.** Για να είναι το ορθογώνιο ABΓΔ τετράγωνο, πρέπει να είναι και ρόμβος, οπότε πρέπει οι διαγώνιοί του AG και ΒΔ να είναι και κάθετες.

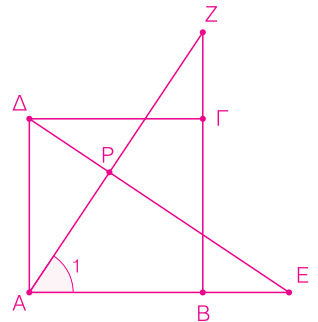
**214 Θέμα 4 - 13744**

**α. i.** Είναι  $AB = BΓ$  και  $BE = ΓZ$ , οπότε  $AE = BZ$  (1), ως αθροίσματα ίσων τμημάτων.

Τα τρίγωνα AΔE και ABZ έχουν:

- $\hat{\Delta A E} = \hat{A B Z} = 90^\circ$ ,
- $A\Delta = AB$ ,
- $AE = BZ$ ,

Άρα είναι ίσα, οπότε  $\hat{A\hat{E}\Delta} = \hat{B\hat{Z}A}$ .



**ii.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABZ είναι  $\hat{A}_1 = \hat{B\hat{Z}A} = 90^\circ$ , αλλά  $\hat{B\hat{Z}A} = \hat{A\hat{E}\Delta}$ , οπότε

$$\hat{A}_1 + \hat{A\hat{E}\Delta} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{A}_1 + \hat{A\hat{E}P} = 90^\circ$$

Στο τρίγωνο AEP το άθροισμα δύο γωνιών του είναι  $90^\circ$ , οπότε η τρίτη γωνία του θα είναι  $90^\circ$ .

Δηλαδή  $\hat{A\hat{P}E} = 90^\circ$ , άρα τα τμήματα AZ και ΔE είναι κάθετα.

**β.** Είναι: •  $PB = AB$ , άρα το τρίγωνο BAP είναι ισοσκελές, οπότε  $\hat{A}_1 = \hat{P}_1$ .

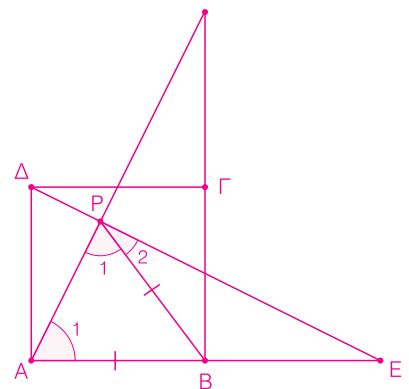
$$\hat{A}_1 + \hat{A\hat{E}P} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{P}_1 + \hat{A\hat{E}P} = 90^\circ \quad (1)$$

$$\hat{P}_1 + \hat{P}_2 = 90^\circ \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε  $\hat{A\hat{E}P} = \hat{P}_2 \Leftrightarrow \hat{B\hat{E}P} = \hat{P}_2$ , άρα το τρίγωνο BEP είναι ισοσκελές με

$$EB = PB \Leftrightarrow BE = AB.$$

Άρα η θέση του σημείου E προσδιορίζεται στην προέκταση του AB ώστε  $BE = AB$ .



**215 Θέμα 4 - 1814**

**α.** Το τρίγωνο BMΓ είναι ισόπλευρο, οπότε  $\hat{M\hat{B}\Gamma} = 60^\circ$

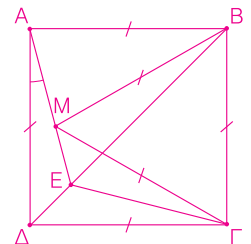
$$\hat{A\hat{B}M} + \hat{M\hat{B}\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{A\hat{B}M} + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{A\hat{B}M} = 30^\circ.$$

- Είναι:
- $BM = B\Gamma$ , ως πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου MBΓ
  - $BA = B\Gamma$ , ως πλευρές του τετραγώνου ABΓΔ.

Επομένως  $BA = BM$ , οπότε το τρίγωνο BAM είναι ισοσκελές, άρα  $\hat{B\hat{A}M} = \hat{B\hat{M}A}$ .

$$\text{Στο τρίγωνο ABM έχουμε } \hat{A\hat{B}M} + \hat{B\hat{A}M} + \hat{B\hat{M}A} = 180^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + 2\hat{B\hat{A}M} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B\hat{A}M} = 75^\circ.$$

$$\text{Οπότε } \hat{\Delta\hat{A}E} = 90^\circ - \hat{B\hat{A}M} = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ.$$



- β.** Τα τρίγωνα ΔΑΕ και ΔΕΓ έχουν:
- ΔΕ κοινή
  - ΔΑ = ΔΓ, ως πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ
  - $\hat{A}\hat{D}E = \hat{E}\hat{D}\Gamma$  αφού η διαγώνιος του τετραγώνου διχοτομεί τις γωνίες του.

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

**γ.** Από την προηγούμενη ισότητα τριγώνων έχουμε  $\hat{\Delta}\hat{A}E = \hat{\Delta}\hat{\Gamma}E \Leftrightarrow \hat{\Delta}\hat{\Gamma}E = 15^\circ$  (1).

Επειδή το ΒΓΜ είναι ισόπλευρο είναι  $\hat{B}\hat{\Gamma}M = 60^\circ$ .

Έχουμε  $\hat{\Delta}\hat{\Gamma}B = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta}\hat{\Gamma}E + \hat{E}\hat{\Gamma}M + \hat{B}\hat{\Gamma}M = 90^\circ \Leftrightarrow 15^\circ + \hat{E}\hat{\Gamma}M + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{E}\hat{\Gamma}M = 15^\circ$ , (2).

Από (1) και 2) έχουμε  $\hat{\Delta}\hat{\Gamma}E = \hat{E}\hat{\Gamma}M$ , άρα η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{\Delta}\hat{\Gamma}M$ .

## 216 Θέμα 4 - 1788

**α.** Είναι  $\hat{E}\hat{A}H = 360^\circ - \hat{E}\hat{A}B - \hat{H}\hat{A}\Gamma - \hat{B}\hat{A}\Gamma = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - (180^\circ - \hat{A}\hat{B}\Gamma - \hat{A}\hat{\Gamma}B) = \hat{A}\hat{B}\Gamma + \hat{A}\hat{\Gamma}B$

- β.** Τα τρίγωνα ΕΑΓ και ΒΑΗ έχουν:
- EA = AB
  - ΑΓ = ΑΗ
  - $\hat{E}\hat{A}\Gamma = \hat{B}\hat{A}H = 90^\circ + \hat{B}\hat{A}\Gamma$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα ΕΓ = ΒΗ

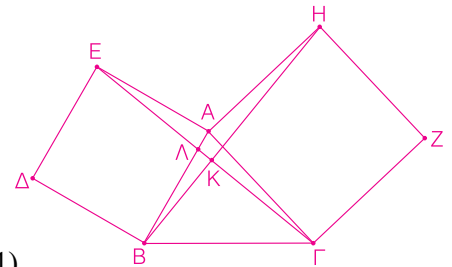
**γ.** Έστω Κ το σημείο τομής των ΕΓ, ΒΗ και Λ το σημείο τομής των ΑΒ, ΕΓ αρκεί να δείξουμε ότι  $\hat{B}\hat{K}\Lambda = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{A}\hat{B}K + \hat{B}\hat{\Lambda}K = 90^\circ$ , (1)

Επειδή τα τρίγωνα ΕΑΓ και ΒΑΗ είναι ίσα έχουμε  $\hat{A}\hat{B}K = \hat{A}\hat{E}\Gamma$ .

Είναι  $\hat{B}\hat{\Lambda}K = \hat{A}\hat{\Lambda}E$ , ως κατακορυφήν.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΛ είναι  $\hat{A}\hat{E}\Lambda + \hat{A}\hat{\Lambda}E = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{A}\hat{B}K + \hat{B}\hat{\Lambda}K = 90^\circ$ .

Οπότε η (1) ισχύει.



## 217 Θέμα 4 - 1795

**α.** Επειδή MA = ML και MB = MG, το ΑΓΛΒ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε ΓΛ = ΑΒ.

Είναι ΑΒ = ΑΕ, ως πλευρές τετραγώνου, οπότε ΓΛ = ΑΕ.

**β.** Είναι:

- $\hat{A}\hat{\Gamma}\Lambda = \hat{\Gamma} + \hat{B}\hat{\Gamma}\Lambda = \hat{\Gamma} + \hat{B}$ , αφού  $\hat{B}\hat{\Gamma}\Lambda = \hat{B}$ , ως εντός εναλλάξ

$$\bullet \hat{E}\hat{A}H = 360^\circ - \hat{E}\hat{A}B - \hat{H}\hat{A}\Gamma - \hat{A} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \hat{A} = 180^\circ - \hat{A} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$$

Οπότε  $\hat{A}\hat{\Gamma}\Lambda = \hat{E}\hat{A}H$ .

- γ.** Τα  $\hat{A}\hat{\Gamma}\Lambda$  και  $\hat{E}\hat{A}H$  έχουν:
- ΑΓ = ΑΗ
  - ΓΛ = ΑΕ, από το α. ερώτημα
  - $\hat{A}\hat{\Gamma}\Lambda = \hat{E}\hat{A}H$ , από το β. ερώτημα

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα  $\hat{\Lambda}\hat{A}\Gamma = \hat{A}\hat{H}E$ , (1).

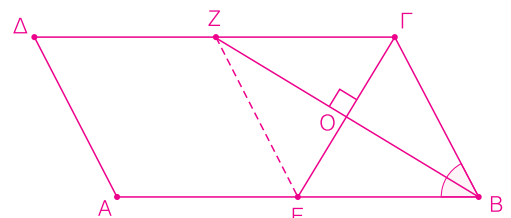
Αρκεί να δείξουμε ότι  $\hat{A}\hat{P}H = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{P}\hat{A}H + \hat{P}\hat{H}A = 90^\circ$ .

Είναι  $\hat{\Lambda}\hat{A}\Gamma + \hat{\Gamma}\hat{A}H + \hat{P}\hat{A}H = 180^\circ \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \hat{A}\hat{H}E + 90^\circ + \hat{P}\hat{A}H = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{P}\hat{H}A + \hat{P}\hat{A}H = 90^\circ$ .

## 218 Θέμα 4 - 13850

**α.** Η ΒΖ είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B}$  και  $BO \perp GE$ .

Επομένως, η ΒΟ στο τρίγωνο ΕΒΓ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΕΓ.



- β.** Τα τρίγωνα ΟΖΓ και ΟΒΕ έχουν:
- $\widehat{\Gamma\hat{O}Z} = \widehat{E\hat{O}B} = 90^\circ$
  - $ΟΓ = ΟΕ$
  - $\widehat{Z\hat{G}O} = \widehat{B\hat{E}O}$ , ως εντός εναλλάξ

Άρα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

**γ.** Από τη σύγκριση στο ερώτημα **β.** έχουμε  $OZ = OB$  και είναι  $OG = OE$ . Το τετράπλευρο ΕΒΓΖ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοι ΓΕ και ΒΖ διχοτομούνται στο σημείο Ο και επειδή είναι και κάθετες είναι ρόμβος.

**δ.** Για να είναι το τετράπλευρο ΕΒΓΖ τετράγωνο θα πρέπει να είναι εκτός από ρόμβος (ερώτημα **γ.**) και ορθογώνιο άρα θα πρέπει  $\widehat{B} = 90^\circ$ .

**219 Θέμα 4 - 1750**

- α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΝ και ΓΔΜ έχουν:
- $ΑΔ = ΔΓ$
  - $ΑΝ = ΓΜ$

Οπότε είναι ίσα, άρα  $ΔΝ = ΔΜ$ .

**β.** Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΝ και ΓΔΜ είναι ίσα, έχουμε  $\widehat{M\hat{\Delta}\Gamma} = \widehat{A\hat{\Delta}N}$ .

Είναι  $\widehat{\Gamma\hat{\Delta}N} = \widehat{\Delta\hat{N}A}$ , ως εντός εναλλάξ.

Οπότε  $\widehat{M\hat{\Delta}\Gamma} + \widehat{\Gamma\hat{\Delta}N} = \widehat{A\hat{\Delta}N} + \widehat{\Delta\hat{N}A} = 90^\circ$ , άρα  $ΔΝ \perp ΔΜ$ .

**220 Θέμα 4 - 13841**

- α.** Είναι:
- $ΔΕ // ΒΓ$  άρα  $\widehat{\Delta\hat{B}Z} = \widehat{E\hat{\Delta}B}$  ως εντός εναλλάξ
  - ΒΔ διχοτόμος της  $\widehat{B}$ , άρα  $\widehat{\Delta\hat{B}Z} = \widehat{\Delta\hat{B}E}$
- Οπότε  $\widehat{E\hat{\Delta}B} = \widehat{\Delta\hat{B}E}$ , άρα το τρίγωνο ΒΕΔ είναι ισοσκελές με  $BE = ED$ .

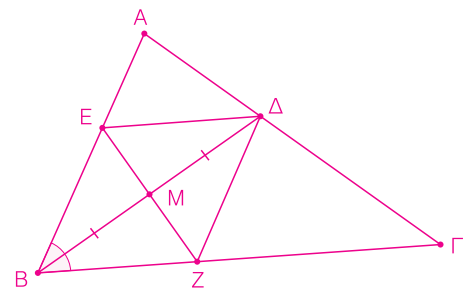
- β.** Τα τρίγωνα ΒΜΖ και ΔΜΕ έχουν:
- $BM = MD$
  - $\widehat{\Delta\hat{B}Z} = \widehat{E\hat{\Delta}B}$ , ως εντός εναλλάξ
  - $\widehat{B\hat{M}Z} = \widehat{\Delta\hat{M}E}$ , ως κατακορυφήν

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε  $BZ = ΔΕ$ .

Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο αφού  $BZ // ΔΕ$ , άρα και  $BE // ΖΔ$

**γ.** Έχουμε  $BE = ED$ , άρα το παραλληλόγραμμο ΔΕΒΖ είναι ρόμβος αφού έχει δυο διαδοχικές πλευρές του ίσες.

**δ.** Για να είναι το τετράπλευρο ΔΕΒΖ τετράγωνο, εφόσον είναι ρόμβος, πρέπει η γωνία  $\widehat{B}$  να είναι ορθή. Όταν η γωνία  $\widehat{B}$  είναι ορθή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Β.



**221 Θέμα 4 - 1734**

- α.** Τα τρίγωνα ΗΔΘ, ΘΑΕ, ΕΒΖ και ΗΓΖ έχουν:
- $ΗΔ = ΑΕ = ΒΕ = ΓΗ$ , ως ίσες πλευρές των ίσων ισόπλευρων τριγώνων ΗΔΓ και ΕΑΒ (τα τρίγωνα ΗΔΓ και ΕΑΒ είναι ίσα επειδή έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες με τις πλευρές ΓΔ και ΑΒ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ)
  - $\Theta\Delta = \Theta A = BZ = \Gamma Z$  ως ίσες πλευρές των ίσων ισόπλευρων τριγώνων ΘΔΑ και ΒΓΖ (όπως πριν, τα ΘΔΑ και ΒΓΖ είναι ίσα αφού έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες με τις πλευρές ΑΔ και ΒΓ του ΑΒΓΔ)
  - $\widehat{H\hat{\Delta}\Theta} = \widehat{\Theta\hat{A}E} = \widehat{E\hat{B}Z} = \widehat{Z\hat{\Gamma}H} = 360^\circ - 90^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 150^\circ$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα  $\Theta H = HZ = ZE = E\Theta$ .

Επομένως το ΕΖΗΘ είναι ρόμβος.

**β.** Αν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, τότε  $AB = AD$ .

Στα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΔΘ και ΑΕΒ είναι  $A\Theta = AD$  και  $AE = AB$ , οπότε  $A\Theta = AE$ .

Δηλαδή, το τρίγωνο  $\triangle A\Theta E$  είναι ισοσκελές, οπότε  $\widehat{A\Theta E} = \widehat{A\hat{E}\Theta}$  και είναι

$$\widehat{A\Theta E} + \widehat{A\hat{E}\Theta} + \widehat{\Theta A E} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{A\Theta E} + 150^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{A\Theta E} = 15^\circ .$$

Όμοια, στο τρίγωνο  $\triangle \Theta H$ , είναι  $\widehat{H\Theta \Delta} = 15^\circ$  .

$$\text{Τότε } \widehat{E\Theta H} = \widehat{\Delta\Theta H} + \widehat{E\Theta A} + \widehat{A\Theta \Delta} = 15^\circ + 60^\circ + 15^\circ = 90^\circ .$$

Επομένως ο ρόμβος έχει μια γωνία ορθή, άρα είναι τετράγωνο.

## 222 Θέμα 4 - 1825

**α.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο:

- $\triangle ABZ$  ( $\widehat{B} = 90^\circ$ ), είναι  $\widehat{AZB} + \widehat{ZAB} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{AZB} = 90^\circ - \widehat{ZAB}$

- $\triangle AHN$  ( $\widehat{A\hat{H}N} = 90^\circ$ ), είναι  $\widehat{A\hat{N}H} + \widehat{H\hat{A}N} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{A\hat{N}H} = 90^\circ - \widehat{H\hat{A}N} \Leftrightarrow \widehat{A\hat{N}\Delta} = 90^\circ - \widehat{Z\hat{A}B}$

Επομένως,  $\widehat{AZB} = \widehat{A\hat{N}\Delta}$  .

Τα ορθογώνια τρίγωνα  $\triangle ADN$  και  $\triangle ABZ$  έχουν:

- $AD = AB$

- $\widehat{AZB} = \widehat{A\hat{N}\Delta}$

Οπότε είναι ίσα.

**β.** Στο τρίγωνο  $\triangle AMN$  η  $AH$  είναι ύψος και διχοτόμος.

Οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές, άρα  $AM = AN$  .

Είναι:

- $\widehat{E\hat{A}N} = \widehat{A\hat{N}\Delta}$  , ως εντός εναλλάξ

- $\widehat{A\hat{N}\Delta} = \widehat{A\hat{M}N}$  , αφού το τρίγωνο  $\triangle AMN$  είναι ισοσκελές

- $\widehat{A\hat{M}N} = \widehat{\Delta\hat{M}E}$  , ως κατακορυφήν

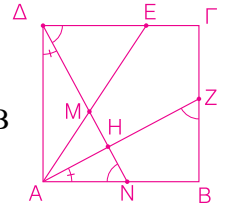
Άρα  $\widehat{E\hat{A}N} = \widehat{\Delta\hat{M}E}$  , οπότε  $AE = EM$  .

**γ.** Είναι:

- $AE = EM + AM = DE + AN$  .

- $AN = BZ$  , αφού τα τρίγωνα  $\triangle ADN$  και  $\triangle ABZ$  είναι ίσα.

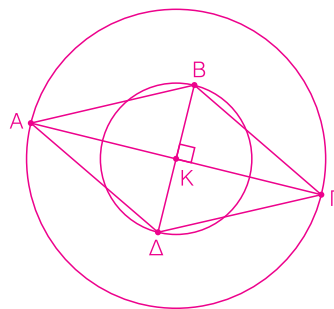
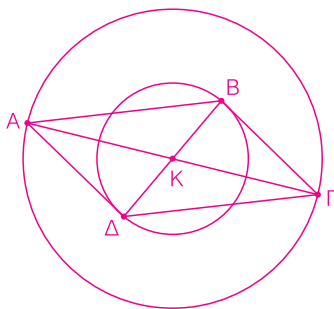
Άρα  $AE = DE + BZ$  .



## 223 Θέμα 4 - 13848

**α. i.** Είναι  $BK = KD$  ως ακτίνες του ίδιου κύκλου ( $K, KB$ ) και  $AK = KG$  στον κύκλο με κέντρο  $K$  και ακτίνα  $AG$ .

Άρα οι διαγώνιοι του  $\triangle AB\Gamma\Delta$  διχοτομούνται, επομένως είναι παραλληλόγραμμο.

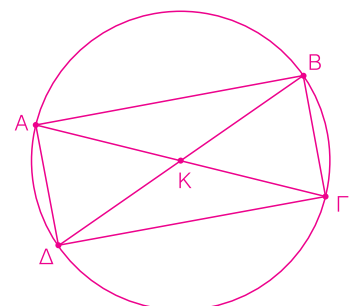


**ii.** Αν οι  $AG$  και  $BD$  είναι κάθετες τότε το παραλληλόγραμμο  $\triangle AB\Gamma\Delta$  έχει κάθετες διαγωνίους.

Συνεπώς είναι ρόμβος. Άρα η επιπλέον υπόθεση είναι ότι «οι  $AG$  και  $BD$  είναι κάθετες».

**β.** Αν οι κύκλοι ταυτίζονται, τότε  $AG = BD$ . Οπότε οι διαγώνιοι  $AG$  και  $BD$  του παραλληλογράμμου  $\triangle AB\Gamma\Delta$  είναι ίσες, επομένως το  $\triangle AB\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνιο. Για να είναι τετράγωνο πρέπει επιπλέον οι  $AG$  και  $BD$  να είναι κάθετες, κάτι που δεν αναφέρεται στην υπόθεση του **β.**

Ο ισχυρισμός δεν είναι αληθής αφού το  $\triangle AB\Gamma\Delta$  δεν είναι αναγκαία τετράγωνο.



**224 Θέμα 2 - 34768**

α. Είναι  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + 40^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 80^\circ$ .

β. Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$ , έχουμε:
 

- $\Delta, E$  τα μέσα των  $AB, B\Gamma$ , οπότε  $\Delta E \parallel A\Gamma$
- $E, Z$  τα μέσα των  $B\Gamma, A\Gamma$  οπότε  $EZ \parallel AB$

γ. Είναι  $\hat{B}\Delta E = \hat{A} = 80^\circ$  και  $\hat{B}\hat{E}\Delta = \hat{\Gamma} = 60^\circ$  ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

**225 Θέμα 2 - 36088**

α. Είναι  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 70^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 70^\circ$ .

Οπότε  $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ , άρα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $AB = A\Gamma$ .

β. Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\Delta$  μέσο  $AB$ ,  $E$  μέσο  $A\Gamma$ , οπότε  $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow 9 = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 18$

γ. Είναι:
 

- $A\Gamma = 2E\Gamma = 2 \cdot 16 = 32$  και
- $AB = A\Gamma = 32$

Η περίμετρος είναι  $\Pi = 32 + 32 + 18 = 82$ .

**226 Θέμα 2 - 14877**

α. Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  τα  $\Delta, E$  είναι τα μέσα των  $AB, A\Gamma$ , οπότε  $B\Gamma \parallel \Delta E$ .

β. Επειδή τα  $\Delta, E$  είναι τα μέσα των  $AB, A\Gamma$  έχουμε  $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow 9 = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 18$ .

γ. Είναι  $A\Delta = \Delta B = 10$ ,  $E\Gamma = A\Gamma = 8$ , οπότε  $AB = 20$  και  $A\Gamma = 16$  άρα:

- $\Pi_{AB\Gamma} = AB + B\Gamma + A\Gamma = 20 + 18 + 16 = 54$
- $\Pi_{\Delta E\Gamma B} = \Delta E + E\Gamma + \Gamma B + B\Delta = 9 + 8 + 18 + 10 = 45$

Επομένως  $\Pi_{AB\Gamma} > \Pi_{\Delta E\Gamma B}$ .

**227 Θέμα 2 - 36091**

α. Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\Delta$  μέσο  $B\Gamma$ ,  $E$  μέσο  $A\Gamma$ , οπότε  $\Delta E \parallel AB$ .

β.i. Έχουμε  $\hat{x} = \hat{B} = 50^\circ$ , ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

ii. Επειδή  $\Delta E \parallel AB$ , είναι  $\hat{A} = \hat{\Delta E\Gamma} = 70^\circ$ .

Είναι  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + 50^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 180^\circ - 120^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 60^\circ$ .

**228 Θέμα 2 - 34512**

α. Έχουμε:

- Στο τρίγωνο  $OAB$  είναι  $Z$  μέσο  $OA$ ,  $H$  μέσο  $OB$ , οπότε  $ZH = \frac{AB}{2}$
- Στο τρίγωνο  $O\Gamma\Delta$  είναι  $E$  μέσο  $O\Delta$ ,  $\Theta$  μέσο  $O\Gamma$ , οπότε  $E\Theta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$
- Στο τρίγωνο  $OB\Gamma$  είναι  $H$  μέσο  $OB$ ,  $\Theta$  μέσο  $O\Gamma$ , οπότε  $H\Theta = \frac{B\Gamma}{2}$
- Στο τρίγωνο  $O\Delta\Gamma$  είναι  $E$  μέσο  $O\Delta$ ,  $Z$  μέσο  $OA$ , οπότε  $EZ = \frac{A\Delta}{2}$ .

Επειδή το  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο έχουμε  $AB = \Gamma\Delta$ , άρα  $ZH = E\Theta$  και  $A\Delta = B\Gamma$ , άρα  $H\Theta = EZ$ .

Επομένως το  $EZH\Theta$  είναι παραλληλόγραμμο.



β. Έχουμε  $AB + BΓ + ΓΔ + ΔΑ = 40$ .

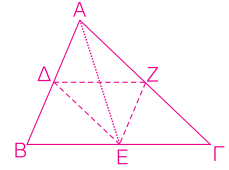
$$\text{Είναι } EZ + ZH + ΗΘ + ΘΕ = \frac{ΑΔ}{2} + \frac{ΑΒ}{2} + \frac{ΒΓ}{2} + \frac{ΓΔ}{2} = \frac{ΑΔ + ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ}{2} = \frac{40}{2} = 20 .$$

### 229 Θέμα 2 - 34494

α. Στο τρίγωνο  $ΑΒΓ$  τα  $Ε, Ζ$  είναι τα μέσα των  $ΓΒ, ΓΑ$ , οπότε  $EZ // \frac{AB}{2}$  (1).

Επομένως  $EZ // ΒΔ$ , άρα το  $ΔΒΕΖ$  είναι παραλληλόγραμμο.

β. Από την (1) έχουμε  $EZ // ΑΔ$ , οπότε το  $ΖΕΔΑ$  είναι παραλληλόγραμμο, άρα οι διαγώνιοί του  $ΑΕ$  και  $ΔΖ$  διχοτομούνται. Οπότε η  $ΔΖ$  διχοτομεί το  $ΑΕ$ .



### 230 Θέμα 2 - 34492

α. Τα τρίγωνα  $ΒΔΕ$  και  $ΓΔΖ$  έχουν:

- $BE = ΓΖ$ , ως μισά τμήματα των ίσων πλευρών  $AB$  και  $ΑΓ$ .
- $BD = ΓΔ$ , διότι το  $AD$  είναι ύψος του τριγώνου  $ΑΒΓ$ , οπότε είναι και διάμεσός του.
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ , ως γωνίες προσκείμενες στη βάση  $ΒΓ$  του ισοσκελούς τριγώνου  $ΑΒΓ$ .

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Στο τρίγωνο  $ΑΒΓ$  τα  $Δ, Ε$  είναι τα μέσα των  $ΒΓ, ΑΒ$ , οπότε  $ΔΕ // \frac{ΑΓ}{2} \Rightarrow ΔΕ // ΑΖ$ . Άρα το  $ΑΕΔΖ$  είναι παραλληλόγραμμο και επειδή  $ΔΕ = ΑΖ = ΑΕ$  είναι ρόμβος, αφού έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

### 231 Θέμα 2 - 34426

α. Επειδή  $ΔΑ = ΔΓ$  και  $ΔΕ = ΔΜ$  το  $ΑΜΓΕ$  είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Στο ισοσκελές τρίγωνο  $ΑΒΓ$  η  $ΑΜ$  είναι διάμεσος, οπότε είναι και ύψος, επομένως  $\hat{ΑΜΓ} = 90^\circ$ . Άρα το  $ΑΜΓΕ$  είναι ορθογώνιο.

β. Είναι  $ΔΖ \perp ΑΜ$  και  $ΓΜ \perp ΑΜ$  οπότε  $ΔΖ // ΓΜ$ .

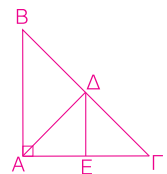
Στο τρίγωνο  $ΑΜΓ$  το  $Δ$  είναι μέσο του  $ΑΓ$  και  $ΔΖ // ΜΓ$ , οπότε το  $Ζ$  είναι μέσο της  $ΑΜ$  και

$$\Delta Z = \frac{M\Gamma}{2} \Leftrightarrow \Delta Z = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} \Leftrightarrow \Delta Z = \frac{B\Gamma}{4} .$$

### 232 Θέμα 2 - 1542

α. Επειδή  $ΔΕ // ΑΒ$  και  $ΑΒ \perp ΑΓ$ , είναι  $ΔΕ \perp ΑΓ$ , οπότε το τρίγωνο  $ΔΕΓ$  είναι ορθογώνιο.

β. Στο τρίγωνο  $ΑΒΓ$ , το  $Δ$  είναι το μέσο της  $ΒΓ$  και  $ΔΕ // ΑΒ$ , οπότε το  $Ε$  είναι μέσο της  $ΑΓ$  και  $ΔΕ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΑΓ}{2}$ .



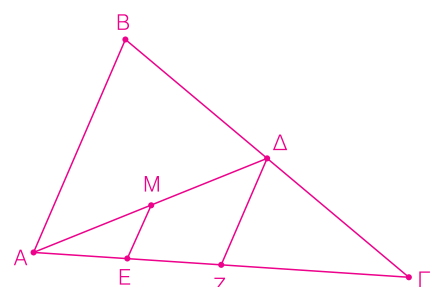
### 233 Θέμα 2 - 12639

α. Στο τρίγωνο  $ΑΒΓ$ , είναι το  $Δ$  μέσο  $ΒΓ$  και  $ΔΖ // ΑΒ$ .

Επομένως το  $Ζ$  είναι το μέσον της πλευράς  $ΑΓ$ .

β. • Το  $Ζ$  είναι το μέσο της πλευράς  $ΑΓ$ , οπότε  $AZ = \frac{ΑΓ}{2}$  (1).

• Στο τρίγωνο  $ΑΔΖ$ , το  $Μ$  είναι μέσο της πλευράς του  $ΑΔ$  και η  $ΜΕ // ΔΖ$ .



Επομένως το Ε είναι μέσο της ΑΖ, άρα

$$ΑΕ = \frac{ΑΓ}{2} \Leftrightarrow ΑΕ = \frac{\frac{ΑΓ}{2}}{2} \Leftrightarrow ΑΕ = \frac{ΑΓ}{4}$$

**234 Θέμα 2 - 13532**

**α.** Στο τρίγωνο ΑΓΔ το τμήμα ΖΗ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΑΔ, άρα ΖΗ//ΓΔ (1) και

$$ΖΗ = \frac{ΓΔ}{2} \Leftrightarrow ΖΗ = \frac{ΑΒ}{2}.$$

**β.** Το Ε είναι το μέσο της ΑΒ, οπότε  $ΑΕ = \frac{ΑΒ}{2}$  και αφού  $ΖΗ = \frac{ΑΒ}{2}$ , έχουμε  $ΑΕ = ΖΗ$ .

Είναι  $ΑΕ//ΓΔ$  (2), γιατί το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι  $ΑΕ//ΖΗ$ .

Το τετράπλευρο ΑΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι απέναντι πλευρές του ΑΕ, ΖΗ είναι ίσες και παράλληλες.

**235 Θέμα 4 - 1803**

**α.** Είναι  $ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow ΑΓ = ΜΓ$ , οπότε το τρίγωνο ΓΑΜ είναι ισοσκελές, άρα  $\hat{ΜΑΓ} = \hat{ΑΜΓ}$ .

**β.** Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Λ, Μ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, οπότε

$$ΜΛ = \frac{ΑΓ}{2} = \frac{ΓΜ}{2} = ΜΚ$$

**γ.** Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Λ, Μ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, οπότε  $ΛΜ//ΑΓ$ , άρα  $\hat{ΛΜΑ} = \hat{ΜΑΓ}$ , ως εντός εναλλάξ.

Έχουμε  $\hat{ΜΑΓ} = \hat{ΑΜΓ}$ , οπότε  $\hat{ΛΜΑ} = \hat{ΑΜΓ}$

Άρα η ΑΜ είναι η διχοτόμος της  $\hat{ΛΜΚ}$ .

**236 Θέμα 4 - 13743**

**α.** Είναι  $\hat{ΔΜΓ} = \hat{ΒΓΜ}$ , ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΜΔ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΜΓ.

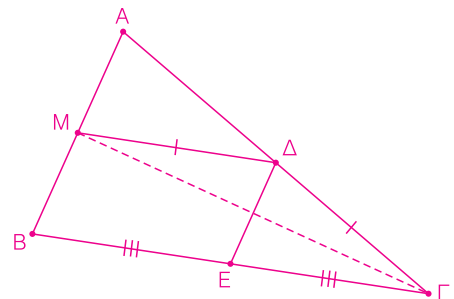
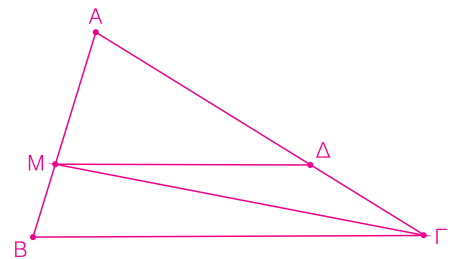
**β.** Αν το ΔΜΓ είναι ισοσκελές με  $ΔΜ = ΔΓ$ , τότε  $\hat{ΔΜΓ} = \hat{ΔΓΜ}$ .

Στο ερώτημα **α.** αποδείξαμε ότι  $\hat{ΔΜΓ} = \hat{ΒΓΜ}$ , οπότε  $\hat{ΔΓΜ} = \hat{ΒΓΜ}$ , άρα η ΓΜ θα είναι διχοτόμος της γωνίας Γ. Ομως από την υπόθεση το τρίγωνο ΓΑΒ είναι ισοσκελές με βάση ΑΒ, οπότε η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής Γ θα είναι και διάμεσος προς τη βάση του. Δηλαδή το ζητούμενο σημείο Μ είναι το μέσο της ΑΒ.

**γ.** Το Μ είναι το μέσο της ΑΒ και  $ΜΔ//ΒΓ$ , άρα το σημείο Δ είναι το μέσο της ΑΓ.

Το σημείο Ε είναι μέσο της ΒΓ άρα το τμήμα ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε  $ΔΕ//ΜΒ$ .

Το τετράπλευρο ΜΔΕΒ έχει τις απέναντι πλευρές του ανά δύο παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.



**237 Θέμα 4 - 37096**

**α.** Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και  $\Delta, E, Z$  τα μέσα των  $AB, A\Gamma, B\Gamma$  αντίστοιχα.

$$\text{Είναι } \Delta Z = \frac{A\Gamma}{2} \quad (1) \text{ και } ZE = \frac{AB}{2} \quad (2).$$

Άρα  $\Delta Z = ZE$ , οπότε το  $\Delta ZE$  είναι ισοσκελές.

**β.i. • Διατύπωση**

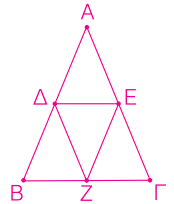
Το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα πλευρών ισόπλευρου τριγώνου είναι ισόπλευρο.

**• Απόδειξη**

Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  τα  $\Delta, E$  είναι μέσα των  $AB, A\Gamma$ , οπότε  $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$  (3).

Επειδή  $AB = B\Gamma = A\Gamma$  από τις (1), (2) και (3) έχουμε  $\Delta Z = ZE = \Delta E$ .

Άρα το τρίγωνο  $\Delta EZ$  είναι ισόπλευρο.

**β.ii. • Διατύπωση**

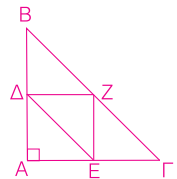
Το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα πλευρών ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

**• Απόδειξη**

Έστω ότι  $\hat{A} = 90^\circ$ .

Από το **α.** ερώτημα είναι  $\Delta Z = ZE$ , άρα το τρίγωνο  $\Delta ZE$  είναι ισοσκελές.

Επειδή  $\Delta Z \parallel A\Gamma$ ,  $ZE \parallel AB$  και  $AB \perp A\Gamma$ , προκύπτει ότι  $\Delta Z \perp ZE$ . Άρα  $\hat{\Delta ZE} = 90^\circ$ , επομένως το  $\Delta ZE$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

**238 Θέμα 4 - 1798**

**α.** Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  τα  $K, \Lambda$  είναι μέσα των  $AB, B\Gamma$ , οπότε  $K\Lambda \parallel A\Gamma$ .

Στο τρίγωνο  $AB\Delta$  τα  $K, N$  είναι μέσα των  $AB, A\Delta$ , οπότε  $KN \parallel B\Delta$ .

Στο τρίγωνο  $B\Gamma\Delta$  τα  $\Lambda, M$  είναι μέσα των  $B\Gamma, \Gamma\Delta$ , οπότε  $\Lambda M \parallel B\Delta$ .

Στο τρίγωνο  $A\Gamma\Delta$  τα  $M, N$  είναι μέσα των  $\Gamma\Delta, A\Delta$ , οπότε  $MN \parallel A\Gamma$ .

Άρα  $K\Lambda \parallel MN$  και  $KN \parallel \Lambda M$  και συνεπώς το  $K\Lambda MN$  είναι παραλληλόγραμμο.

Είναι  $KN \parallel B\Delta$ ,  $K\Lambda \parallel A\Gamma$  και  $A\Gamma \perp B\Delta$ , αφού είναι διαγώνιοι του ρόμβου  $AB\Gamma\Delta$ .

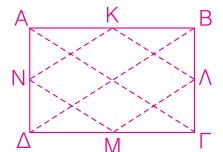
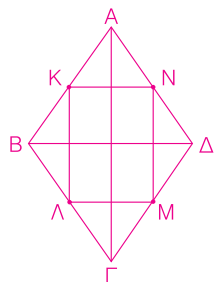
Οπότε  $KN \perp K\Lambda$ . Άρα το  $K\Lambda MN$  είναι ορθογώνιο.

**β.** Το  $K\Lambda MN$  είναι παραλληλόγραμμο.

Στα τρίγωνα  $AB\Delta, AB\Gamma$  τα  $N, K$  και  $\Lambda$  είναι τα μέσα των πλευρών  $A\Delta, AB$  και  $B\Gamma$ ,

$$\text{άρα } KN = \frac{B\Delta}{2}, K\Lambda = \frac{A\Gamma}{2} \text{ το } AB\Gamma\Delta \text{ είναι ορθογώνιο, άρα } A\Gamma = B\Delta, \text{ οπότε } KN = K\Lambda.$$

Άρα το  $K\Lambda MN$  είναι ρόμβος.

**239 Θέμα 4 - 1728**

**α.** Επειδή το  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο έχουμε

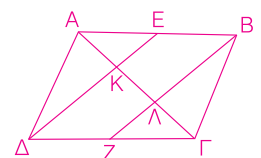
$$AB \parallel \Gamma\Delta \Rightarrow \frac{AB}{2} \parallel \frac{\Gamma\Delta}{2} \Rightarrow BE \parallel \Delta Z.$$

Άρα το  $\Delta EBZ$  είναι παραλληλόγραμμο.

**β.** Είναι: •  $\Delta E \parallel BZ$ , οπότε  $\hat{A\epsilon\Delta} = \hat{EBZ}$ , ως εντός εκτός και επί τα αυτά

•  $AB \parallel \Gamma\Delta$  οπότε  $\hat{EBZ} = \hat{B\zeta\Gamma}$  ως εντός εναλλάξ

Άρα  $\hat{A\epsilon\Delta} = \hat{B\zeta\Gamma}$ .



- γ. • Στο τρίγωνο  $AB\Lambda$  το  $E$  είναι το μέσο του  $AB$  και  $EK \parallel B\Lambda$ , οπότε το  $K$  είναι μέσο του  $A\Lambda$ , άρα  $KA = K\Lambda$ .  
 • Στο τρίγωνο  $\Delta K\Gamma$  το  $Z$  είναι το μέσο του  $\Gamma\Delta$  και  $Z\Lambda \parallel \Delta K$ , οπότε το  $\Lambda$  είναι μέσο του  $K\Gamma$ , άρα  $K\Lambda = \Lambda\Gamma$ .  
 Επομένως  $AK = K\Lambda = \Lambda\Gamma$  δηλαδή οι  $\Delta E$  και  $BZ$  τριχοτομούν την  $A\Gamma$ .

**240 Θέμα 4 - 1802**

- α. • Στο τρίγωνο  $\Gamma B\Lambda$  έχουμε τα  $M, \Lambda$  τα μέσα των  $\Gamma B, \Gamma\Lambda$ , οπότε  $M\Lambda \parallel B\Lambda$ .  
 • Στο τρίγωνο  $A M\Lambda$ , το  $K$  είναι το μέσο του  $AM$  και  $KN \parallel M\Lambda$ , οπότε το  $N$  είναι το μέσο του  $A\Lambda$ .

β. Είναι  $\widehat{KM\Gamma} = \widehat{GM\Lambda} + \widehat{\Lambda M A} = \widehat{MBK} + \widehat{AKN}$ , αφού:

- $M\Lambda \parallel BK$ , άρα  $\widehat{GM\Lambda} = \widehat{MBK}$ , ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη
- $M\Lambda \parallel KN$ , άρα  $\widehat{\Lambda M A} = \widehat{AKN}$  ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη

γ. Από το α. έχουμε  $KN = \frac{M\Lambda}{2} = \frac{\frac{BN}{2}}{2} = \frac{BN}{4}$ .

Οπότε  $BN = 4KN \Leftrightarrow BK + KN = 4KN \Leftrightarrow BK = 3KN$ .

**241 Θέμα 4 - 37140**

- α. Τα τρίγωνα  $AZ\Delta$  και  $B M\Delta$  έχουν:
- $\Delta A = \Delta B$
  - $\Delta Z = \Delta M$
  - $\widehat{\Delta Z A} = \widehat{\Delta M B}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

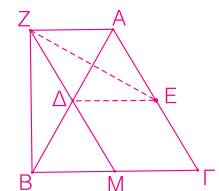
β. Επειδή  $\Delta A = \Delta B$  και  $\Delta Z = \Delta M$ , το  $ZAMB$  είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Οπότε  $ZA \parallel BM \Rightarrow ZA \parallel M\Gamma$ , άρα το  $ZAGM$  είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  τα  $\Delta, E$  είναι τα μέσα των  $AB, A\Gamma$ , οπότε  $\Delta E \parallel \frac{B\Gamma}{2} \Rightarrow \Delta E \parallel M\Gamma \Rightarrow \Delta E \parallel ZA$ .

Άρα το  $ZAE\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο, οπότε τα  $ZE$  και  $A\Delta$  διχοτομούνται.

- Είναι:
- $\Delta E = ZA$  και  $ZA = M\Gamma$ , άρα  $\Delta E = M\Gamma$
  - $M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{A\Gamma}{2} = AE$

Οπότε  $\Delta E = AE$ , άρα το  $ZAE\Delta$  είναι ρόμβος, επομένως  $ZE \perp A\Delta$ .



δ. Στο τρίγωνο  $ZAB$  η  $Z\Delta$  είναι διάμεσος  $Z\Delta = \Delta M = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{AB}{2}$ .

Οπότε  $\widehat{BZA} = 90^\circ$ , άρα  $BZ \perp ZA$ .

**242 Θέμα 4 - 1801**

α. Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  τα  $\Delta, E, Z$  είναι τα μέσα των  $B\Gamma, A\Gamma, AB$ , οπότε  $\Delta E \parallel BZ$  και  $ZE \parallel B\Delta$ .

Άρα το  $ZE\Delta B$  είναι παραλληλόγραμμο.

β. Είναι: •  $\widehat{ZBM} = \widehat{M\Delta B}$  και  $\widehat{M\Delta B} = \widehat{ZMB}$ , ως εντός εναλλάξ, άρα  $\widehat{ZBM} = \widehat{ZMB}$ , οπότε το τρίγωνο  $BZM$  είναι ισοσκελές.

•  $\widehat{ENM} = \widehat{ZBM}$ , ως εντός εναλλάξ και  $\widehat{ZBM} = \widehat{ZMB} = \widehat{NME}$ , άρα  $\widehat{ENM} = \widehat{NME}$ .

Οπότε το  $\widehat{MEN}$  είναι ισοσκελές

γ. Είναι  $BZ + NE = ZM + ME = ZE = B\Delta = \Delta\Gamma$ .

### 243 Θέμα 4 - 37165

α. Στο τρίγωνο  $AB\Delta$  το  $AH$  είναι ύψος και διχοτόμος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με  $AB = A\Delta$  και το  $AH$  είναι διάμεσος.

Επειδή  $HB = H\Delta$  και  $HA = HZ$ , το  $ABZ\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Επειδή επιπλέον είναι  $AB = A\Delta$ , το  $ABZ\Delta$  είναι ρόμβος.

β. Στο τρίγωνο  $B\Gamma\Delta$  είναι  $H, \Theta$  τα μέσα των  $B\Delta, B\Gamma$ , οπότε  $H\Theta // \Gamma\Delta$ .

Είναι  $A\Delta // BZ$  οπότε  $\Gamma\Delta // BZ$ . Επομένως  $H\Theta // BZ$ .

γ. Στο τρίγωνο  $B\Gamma\Delta$  τα  $H, \Theta$  είναι μέσα των  $B\Delta, B\Gamma$  οπότε

$$H\Theta = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{A\Gamma - A\Delta}{2} = \frac{A\Gamma - AB}{2}, \text{ αφού } A\Delta = AB.$$

### 244 Θέμα 4 - 1898

α. Στο τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$ , τα  $Z, H$  είναι τα μέσα των  $A\Delta, A\Gamma$ , οπότε

$$ZH // \frac{\Delta\Gamma}{2} \Rightarrow ZH // \frac{B\Delta}{2} \Rightarrow ZH // \Delta E, \text{ άρα το } \Delta EZH \text{ είναι παραλληλόγραμμο.}$$

β. Για να είναι το παραλληλόγραμμο  $\Delta EZH$  ρόμβος, αρκεί να είναι  $ZH = ZE$  (1).

Στο  $\hat{A}\Delta B$  τα  $E, Z$  είναι τα μέσα των  $B\Delta, A\Delta$ , οπότε  $ZE = \frac{AB}{2}$ .

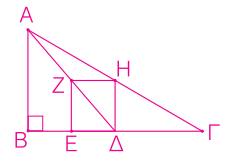
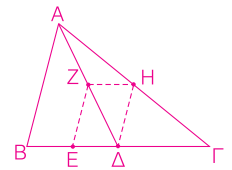
$$H(1) \Leftrightarrow \frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow \Delta\Gamma = AB \Leftrightarrow \frac{B\Gamma}{2} = AB \Leftrightarrow B\Gamma = 2AB.$$

Οπότε το  $\Delta EZH$  είναι ρόμβος, όταν  $B\Gamma = 2AB$ .

γ. Αν  $\hat{B} = 90^\circ$ , τότε  $AB \perp B\Gamma$ .

Επειδή  $ZE // AB$ , έχουμε  $ZE \perp B\Gamma$ , δηλαδή  $\hat{ZEG} = 90^\circ$ .

Άρα το παραλληλόγραμμο  $\Delta EZH$  είναι ορθογώνιο.



### 245 Θέμα 4 - 1741

α. Τα  $K, \Lambda$  είναι τα μέσα των πλευρών:

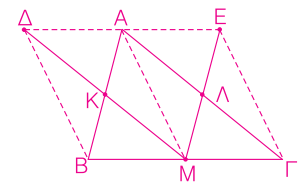
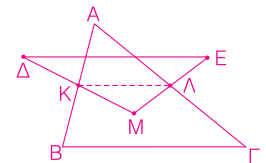
- $AB, A\Gamma$  στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  οπότε  $K\Lambda // B\Gamma$
- $M\Delta, ME$  στο τρίγωνο  $M\Delta E$ , οπότε  $K\Lambda // \Delta E$

Άρα  $\Delta E // B\Gamma$ .

β. • Επειδή  $KA = KB$  και  $KM = K\Delta$  το  $\Delta AMB$  είναι παραλληλόγραμμο, οπότε  $A\Delta // B\Gamma$ .

• Επειδή  $M\Lambda = ME$  και  $\Lambda\Gamma = \Lambda A$  το  $A\Gamma M$  είναι παραλληλόγραμμο, οπότε  $A\Gamma // B\Gamma$ .

Από το  $A$  διέρχεται μοναδική ευθεία παράλληλη στη  $B\Gamma$ , άρα τα  $\Delta, A, E$  είναι συνευθειακά.



### 246 Θέμα 4 - 37157

α. Στο τρίγωνο  $A\Delta E$ , τα  $K, M$  είναι τα μέσα των  $A\Delta, A\Gamma$ , οπότε

$$KM // \Delta E \text{ και } KM = \frac{\Delta E}{2} \Leftrightarrow \Delta E = 2KM.$$

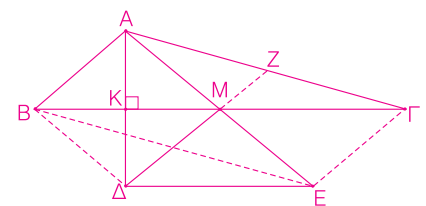
Είναι  $KM // \Delta E$  και  $KM \perp A\Delta$ , άρα  $\Delta E \perp A\Delta$ .

β. Επειδή  $MA = ME$  και  $MB = M\Gamma$ , το  $ABE\Gamma$  είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Είναι  $AB = AM$ , οπότε το  $\hat{A}BM$  είναι ισοσκελές και επειδή το  $AK$  είναι ύψος θα είναι και διάμεσος.

Επειδή  $KB = KM$  και  $KA = K\Delta$ , το  $AM\Delta B$  είναι παραλληλόγραμμο και αφού επιπλέον είναι  $A\Delta \perp BM$  είναι ρόμβος.

δ. Στο  $\hat{A}B\Gamma$  το  $M$  είναι το μέσο της  $B\Gamma$  και η  $\Delta M // AB$ , οπότε τέμνει την  $A\Gamma$  στο μέσο της  $Z$ .



**247 Θέμα 4 - 1723**

- α.** Το  $\triangle ABH$  είναι ισοσκελές, αφού η  $AE$  είναι διχοτόμος και ύψος.
- β.** Επειδή το  $\triangle ABH$  είναι ισοσκελές και η  $AE$  είναι διχοτόμος, θα είναι και διάμεσος, οπότε το  $E$  είναι μέσο του  $BH$ . Στο  $\triangle BH\Gamma$  τα  $E, M$  είναι τα μέσα των  $BH, B\Gamma$ , επομένως  $EM \parallel H\Gamma$ .
- γ.** Στο  $\triangle BH\Gamma$  τα  $E, M$  είναι τα μέσα των  $BH, B\Gamma$ , οπότε  $EM = \frac{H\Gamma}{2} = \frac{A\Gamma - AH}{2} = \frac{A\Gamma - AB}{2}$ .

**248 Θέμα 4 - 1804**

- α.** • Στο τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$  τα  $M, K$  είναι τα μέσα των  $AB, B\Gamma$ , οπότε  $MK = \frac{A\Gamma}{2}$ .
- Στο τρίγωνο  $\triangle B\Delta\Gamma$  τα  $K, N$  είναι τα μέσα των  $B\Gamma, B\Delta$ , οπότε και  $KN = \frac{A\Gamma}{2}$ .

Άρα  $MK = KN$ , αφού  $AB = \Gamma\Delta$ .

- β.** Από το **α.** ερώτημα είναι  $MK \parallel AB$  και  $KN \parallel \Delta Z$ .

Επειδή  $KM = KN$  έχουμε  $\widehat{KMN} = \widehat{KNM}$ .

- Είναι:
- $\widehat{M\epsilon A} = \widehat{KMN}$  ως εντός εναλλάξ
  - $\widehat{M\zeta\Delta} = \widehat{KNM}$  ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη

Άρα  $\widehat{M\epsilon A} = \widehat{M\zeta\Delta}$ .

**249 Θέμα 4 - 1775**

- α.** Είναι  $\Delta N \parallel MB$  και  $M\Delta \parallel BN$ , οπότε το  $MBN\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο.

- β.** Είναι  $BN = M\Delta = \frac{A\Delta}{2} = \frac{B\Gamma}{2}$ , οπότε το  $N$  είναι το μέσο του  $B\Gamma$ .

Στο τρίγωνο  $BE\Gamma$  το  $N$  είναι μέσο της  $B\Gamma$  και  $NZ \parallel BE$ , οπότε το  $Z$  είναι το μέσο του  $BE$ .

- γ.** Είναι  $\Delta Z \parallel ME$  και  $ME \perp E\Gamma$ , άρα  $\Delta Z \perp E\Gamma$ .

Στο τρίγωνο  $\Delta E\Gamma$  το  $\Delta Z$  είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο  $\Delta E\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $\Delta E = \Delta\Gamma$ .

**250 Θέμα 4 - 37101**

- α. i.** Στο  $\triangle AB\Gamma$  τα  $\Delta, M$  είναι τα μέσα των  $AB, A\Gamma$ , οπότε  $\Delta M \parallel B\Gamma \Rightarrow \Delta M \parallel BE$ .

Άρα το  $B\Delta M E$  είναι παραλληλόγραμμο.

- ii.** Επειδή το  $B\Delta M E$  είναι παραλληλόγραμμο, προκύπτει  $\Delta B = ME$ ,  $\Delta M = BE$ .

Είναι  $\widehat{A\Delta M} = \widehat{B} = \widehat{G\epsilon M}$ , ως εντός εκτός και επί τα αυτά.

- Έχουμε:
- $Z\Delta = \frac{AB}{2} = \Delta B = ME$
  - $E\eta = \frac{B\Gamma}{2} = BE = \Delta M$ .

Τα τρίγωνα  $Z\Delta M$  και  $E\eta H$  έχουν:

- $Z\Delta = ME$
- $\Delta M = E\eta$
- $\widehat{Z\Delta M} = \widehat{M\epsilon H} = 90^\circ + \widehat{B}$ .

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

- β.** Αν τα σημεία  $Z, \Delta, E$  είναι συνευθειακά, τότε  $\Delta E \perp AB$ .

Στο  $\triangle AB\Gamma$  τα  $\Delta, E$  είναι τα μέσα των  $AB, B\Gamma$ , οπότε  $\Delta E \parallel A\Gamma$ .

Άρα  $\Gamma A \perp AB$ , οπότε  $\widehat{A} = 90^\circ$ .

### 251 Θέμα 4 - 1727

α. Οι γωνίες  $\hat{B}$ ,  $\hat{\Gamma}$  είναι εντός και επί τα αυτά, οπότε  
 $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 4\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 45^\circ$ .

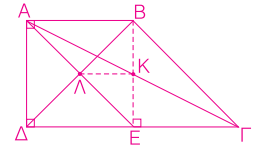
β. Το  $ABED$  έχει τρεις γωνίες ορθές  $\hat{A} = \hat{\Delta} = \hat{E} = 90^\circ$ , οπότε είναι ορθογώνιο.  
 Άρα  $BD = AE$ .

γ. Το  $ABED$  είναι ορθογώνιο, άρα  $DE = AB$ .

Έχουμε  $\Delta\Gamma = 2AB \Leftrightarrow \Delta\Gamma = 2DE$ , άρα το  $E$  είναι το μέσο του  $\Gamma\Delta$ , οπότε  $AB = DE = EG$ .

Αφού  $AB \parallel EG$ , το  $ABGE$  είναι παραλληλόγραμμο, οπότε το  $K$  είναι το μέσο της διαγωνίου του  $AG$ .  
 Επειδή το  $ABED$  είναι ορθογώνιο, το  $\Lambda$  είναι το μέσο της διαγωνίου του  $AE$ .

Στο  $\triangle AEG$  τα  $K, \Lambda$  είναι μέσα των  $AG, AE$  οπότε  $K\Lambda = \frac{1}{2}EG = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\Gamma\Delta = \frac{1}{4}\Gamma\Delta$ .



### 252 Θέμα 4 - 1766

α. Στο τρίγωνο  $EAB$  το  $\Delta$  είναι το μέσο του  $BE$  και  $DH \parallel AB$ , οπότε το  $H$  είναι μέσο του  $AE$ , άρα  
 $DH = \frac{AB}{2}$ .

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα  $\triangle ADH$  και  $\triangle ZD\Gamma$  έχουν:

- $AD = D\Gamma$
- $HD = ZD$ , ως μισά ίσων τμημάτων

Οπότε είναι ίσα.

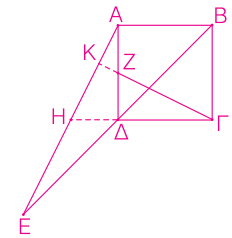
γ. Αν η  $\Gamma Z$  τέμνει την  $AE$  στο  $K$ , αρκεί να δείξουμε ότι

$$\hat{AKZ} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{AZK} + \hat{ZAK} = 90^\circ.$$

Επειδή τα τρίγωνα  $\triangle ADH, \triangle ZD\Gamma$  είναι ίσα έχουμε  $\hat{ZAK} = \hat{Z\Gamma\Delta}$ .

Είναι  $\hat{AZK} = \hat{\Delta Z\Gamma}$ , ως κατακορυφήν.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $\triangle Z\Gamma\Delta$  είναι  $\hat{\Delta Z\Gamma} + \hat{Z\Gamma\Delta} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{AZK} + \hat{ZAK} = 90^\circ$ .



### 253 Θέμα 4 - 1743

α. i. Επειδή οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του, είναι

$$\hat{E\Gamma A} = \hat{A\Gamma Z} = 60^\circ.$$

Τα τρίγωνα  $\triangle A\Gamma\Delta$  και  $\triangle AB\Gamma$  είναι ισοσκελή και έχουν μία γωνία  $60^\circ$ , άρα είναι ισόπλευρα.

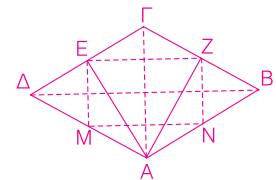
Τα ύψη  $AE, AZ$  στα ισόπλευρα τρίγωνα είναι και διάμεσοί του, οπότε τα σημεία  $E$  και  $Z$  είναι τα μέσα των πλευρών  $\Gamma\Delta$  και  $\Gamma B$  αντίστοιχα.

ii. Στο τρίγωνο  $\triangle B\Delta$  τα  $E, Z$  είναι τα μέσα των  $\Gamma\Delta, \Gamma B$ , οπότε  $EZ \parallel B\Delta$ .

Είναι  $B\Delta \perp A\Gamma$ , άρα  $A\Gamma \perp EZ$ .

β. Επειδή τα  $E, Z, M, N$  είναι τα μέσα των πλευρών του τετραπλεύρου  $AB\Gamma\Delta$ , το  $EMNZ$  είναι παραλληλόγραμμο. Στο τρίγωνο  $\triangle \Gamma A$  τα  $E, M$  είναι τα μέσα των  $\Delta\Gamma, \Delta A$  οπότε  $EM \parallel \Gamma A$ .

Αφού  $\Gamma A \perp EZ$  έχουμε  $EM \perp EZ$ , επομένως  $\hat{MEZ} = 90^\circ$ , οπότε το  $EMNZ$  είναι ορθογώνιο.



### 254 Θέμα 4 - 1745

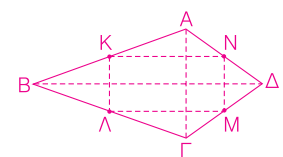
α. Επειδή  $BA = B\Gamma$  έχουμε  $\hat{B\Delta\Gamma} = \hat{B\Gamma A}$ .

Είναι  $\hat{A} = \hat{\Gamma}$  οπότε  $\hat{\Delta A\Gamma} = \hat{\Delta\Gamma A}$  ως διαφορές ίσων γωνιών.

Άρα το  $\triangle \Delta A\Gamma$  είναι ισοσκελές.

β. Είναι  $BA = B\Gamma$  και  $\Delta A = \Delta\Gamma$ , αφού το τρίγωνο  $\triangle \Delta A\Gamma$  είναι ισοσκελές.

Οπότε η  $B\Delta$  είναι η μεσοκάθετος του  $A\Gamma$ , άρα  $A\Gamma \perp B\Delta$ .



γ. Αν Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, τότε το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.

Επειδή ΚΛ // ΑΓ, οπότε ΚΝ // ΒΔ και ΑΓ ⊥ ΒΔ είναι ΚΛ ⊥ ΚΝ, οπότε  $\widehat{\Lambda\hat{K}N} = 90^\circ$ . Άρα το ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο.

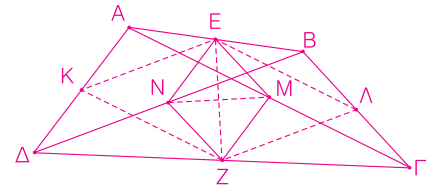
**255 Θέμα 4 - 1773**

α. Στα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ, τα Ε, Μ και Ν, Ζ είναι τα μέσα πλευρών τους αντίστοιχα.

Οπότε  $EM // \frac{BG}{2}$  και  $NZ // \frac{BG}{2}$ , άρα  $EM // NZ$ .

Επομένως το ΕΜΖΝ είναι παραλληλόγραμμο.

Στο  $\triangle B\hat{A}D$  τα Ε, Ν είναι μέσα των ΑΒ, ΒΔ άρα  $EN = \frac{AD}{2} = \frac{BG}{2} = NZ$ .



Επομένως το ΕΜΖΝ είναι ρόμβος.

β. Επειδή το ΕΜΖΝ είναι ρόμβος, οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και τέμνονται κάθετα, οπότε η ΕΖ είναι η μεσοκάθετος του ΜΝ.

γ. Επειδή τα Κ, Ε, Λ, Ζ είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓΔ, το ΚΕΛΖ είναι παραλληλόγραμμο. Οπότε έχουμε ΚΕ = ΛΖ.

δ. Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΚΛ, ΕΖ του παραλληλογράμμου ΚΕΛΖ.

Επειδή το ΕΜΖΝ είναι ρόμβος η διαγώνιος ΜΝ θα διέρχεται από το μέσο Ο του ΕΖ, που διέρχεται και η ΚΛ. Άρα τα ΚΛ, ΜΝ, ΕΖ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

**256 Θέμα 4 - 1794**

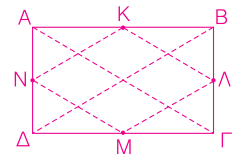
α. Αφού Κ, Λ, Μ, Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ έχουμε:

$$ΚΛ // \frac{AG}{2}, \quad ΛΜ // \frac{BD}{2} \quad \text{και} \quad ΜΝ // \frac{AG}{2}.$$

Οπότε ΚΛ // ΜΝ, άρα το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.

$$\text{Είναι} \quad AG = BD \Leftrightarrow \frac{AG}{2} = \frac{BD}{2} \Leftrightarrow ΚΛ = ΛΜ.$$

Άρα το παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.



β. Για να είναι το ΚΛΜΝ ρόμβος, αρκεί  $ΚΛ = ΛΜ \Leftrightarrow \frac{AG}{2} = \frac{BD}{2} \Leftrightarrow AG = BD$ .

Άρα αρκεί το τετράπλευρο να έχει ίσες διαγώνιες

**257 Θέμα 4 - 1781**

α. Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Ο, Ζ είναι τα μέσα των ΑΓ, ΒΓ, οπότε ΟΖ // ΑΒ, άρα ΟΖ ⊥ ΒΓ.

Στο τρίγωνο ΑΓΔ τα Ο, Ε είναι τα μέσα των ΑΓ, ΓΔ, οπότε ΟΕ // ΑΔ, άρα ΟΕ ⊥ ΓΔ.

Επειδή το ΟΖΓΕ έχει τρεις γωνίες ορθές είναι ορθογώνιο. Επιπλέον είναι ΓΖ = ΓΕ, ως μισά ίσων τμημάτων, οπότε το ΟΖΓΕ είναι τετράγωνο.

β. Στο τετράγωνο ΟΖΓΕ το Η είναι το κέντρο του, οπότε

$$ZH = \frac{1}{2}EZ = \frac{1}{2}OG = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AG = \frac{AG}{4}.$$

γ. Στο  $\triangle AB\hat{G}$  τα Θ, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, οπότε  $\Theta Z // \frac{AG}{2} \Rightarrow \Theta Z // IH$ .

Άρα το ΙΘΖΗ είναι παραλληλόγραμμο



Στο ισοσκελές τρίγωνο ΖΟΓ, η ΖΗ είναι διάμεσος οπότε είναι και ύψος, άρα  $\widehat{ZH\Gamma} = 90^\circ$ .

Επομένως το ΙΘΖΗ είναι ορθογώνιο.

Στο τετράγωνο ΟΖΓΕ έχουμε

$$ZH = \frac{O\Gamma}{2} \Rightarrow \Theta I = \frac{I\Gamma}{2} \Rightarrow \Theta I = \frac{\Theta Z}{2} \Rightarrow \Theta Z = 2\Theta I$$

$$\text{Έχουμε } ZH = \frac{O\Gamma}{2} = \frac{A\Gamma}{4}.$$

### 258 Θέμα 4 - 37132

α. Στο τρίγωνο ΑΒΔ το ΒΚ είναι ύψος και διάμεσος. Άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με  $BA = BD$ .

β. Στο τρίγωνο ΑΒΔ, τα Λ, Κ, Ν είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΔ, ΒΔ.

$$\text{Οπότε } \Lambda K = \frac{B\Delta}{2} = BN \text{ και } KN = \frac{AB}{2} = \Lambda B.$$

$$\text{Είναι } BA = BD \Leftrightarrow \frac{BA}{2} = \frac{B\Delta}{2} \Leftrightarrow B\Lambda = BN.$$

Άρα  $BN = B\Lambda = \Lambda K = KN$ , οπότε το ΒΛΚΝ είναι ρόμβος.

γ. • Στο  $\triangle AB\Delta$ , τα Λ, Ν είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΔ, οπότε  $\Lambda N \parallel A\Delta$ .

• Στο  $\triangle AB\Gamma$ , τα Λ, Μ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ, οπότε  $\Lambda M \parallel B\Gamma$ .

Επειδή  $A\Delta \perp B\Gamma$ , είναι  $\Lambda M \perp \Lambda N$ .

### 259 Θέμα 4 - 36356

α. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:

- $AB = AG = 5$
- $BD = GE = 5$
- $\widehat{ABD} = \widehat{AGE}$ , ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών  $\widehat{B}$  και  $\widehat{\Gamma}$ .

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Επειδή τα τρίγωνα ΒΑΔ, ΑΓΕ είναι ισοσκελή και τα ΒΚ, ΓΛ είναι ύψη τους αντίστοιχα θα είναι και

διάμεσοι, οπότε τα Κ, Λ είναι μέσα των ΑΔ, ΑΕ.

γ. Στο τρίγωνο ΑΔΕ τα Κ, Λ είναι μέσα των ΑΔ, ΑΕ, άρα έχουμε

$$K\Lambda = \frac{\Delta E}{2} = \frac{\Delta B + B\Gamma + \Gamma E}{2} = \frac{AB + B\Gamma + A\Gamma}{2} = \frac{\Pi_{AB\Gamma}}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

### 260 Θέμα 4 - 37106

α. Στο τρίγωνο ΑΒΖ το ΒΔ είναι διχοτόμος και ύψος, οπότε το  $\triangle ABZ$  είναι ισοσκελές με  $BA = BZ$ .

β. • Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΖ η διχοτόμος του ΒΔ είναι και διάμεσος, οπότε το Δ είναι μέσο του ΑΖ.

• Στο τρίγωνο ΑΖΓ τα Δ, Μ είναι τα μέσα των ΑΖ, ΑΓ, οπότε:

•  $\Delta M \parallel B\Gamma$

$$\bullet \Delta M = \frac{\Gamma Z}{2} = \frac{B\Gamma - BZ}{2} = \frac{B\Gamma - AB}{2}$$

γ. Επειδή  $\Delta M \parallel B\Gamma$ , έχουμε  $\widehat{E\Delta M} = \widehat{E\Gamma M} = \frac{\widehat{B}}{2}$ , ως εντός εκτός και επί τα αυτά.

**261 Θέμα 4 - 13856**

**α.** Είναι  $ME = MZ$ , και  $EA = EZ = Z\Gamma$  άρα:  
 $ME + EA = MZ + Z\Gamma \Leftrightarrow MA = M\Gamma$ .

Τα τρίγωνα  $\Delta AM$  και  $\Theta M\Gamma$  έχουν:

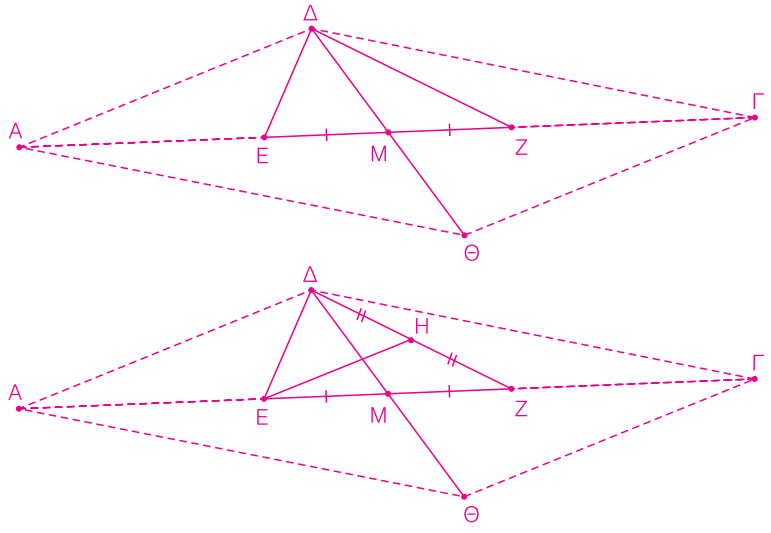
- i.**  $\Delta M = M\Theta$
- ii.**  $MA = M\Gamma$ , ως άθροισμα ίσων τμημάτων  $ME + EA$  και  $MZ + Z\Gamma$
- iii.**  $\widehat{\Delta MA} = \widehat{\Theta M\Gamma}$ , ως κατακορυφήν

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

**β.** Το  $M$  είναι το μέσο του  $\Delta\Theta$  και του τμήματος  $A\Gamma$  οπότε στο τετράπλευρο  $\Theta A\Delta\Gamma$  οι διαγώνιοι  $\Delta\Theta$  και  $A\Gamma$  διχοτομούνται στο σημείο  $M$ .

Άρα το τετράπλευρο  $\Theta A\Delta\Gamma$  είναι παραλληλόγραμμο.

**γ.** Το  $H$  είναι το μέσο της  $\Delta Z$ , αφού η  $EH$  είναι διάμεσος. Έχουμε  $EA = EZ$ , άρα το σημείο  $E$  είναι το μέσο της πλευράς  $AZ$ . Στο τρίγωνο  $A\Delta Z$  τα σημεία  $E$  και  $H$  είναι μέσα πλευρών άρα  $EH = \frac{A\Delta}{2} \Leftrightarrow EH = \frac{12}{2} \Leftrightarrow EH = 6$ . Στο σχήμα του Γιάννη η διάμεσος  $EH$  του τριγώνου  $\Delta EZ$  θα έχει μήκος 6.



**262 Θέμα 4 - 1878**

**α.** Επειδή το  $\Theta$  είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ , η  $B\Theta$  είναι διάμεσός του.

Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  τα  $Z, K$  είναι τα μέσα των  $AB, A\Gamma$ , οπότε  $ZK \parallel \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow ZK \parallel \frac{E\Gamma}{2}$ .

Άρα το  $ZK\Gamma E$  είναι παραλληλόγραμμο.

**β.** Στο τρίγωνο  $AB\Delta$  τα  $\Gamma, Z$  είναι τα μέσα των  $B\Delta, AB$ , οπότε  $\Gamma Z \parallel A\Delta \Rightarrow \Gamma\Theta \parallel A\Delta$ .

Στο τρίγωνο  $ABH$  το  $Z$  είναι το μέσο του  $AB$  και  $Z\Theta \parallel AH$ , οπότε  $\Theta$  το μέσο του  $BH$ .

Στο τρίγωνο  $BH\Gamma$  τα  $\Theta, E$  είναι μέσα των  $BH, B\Gamma$  οπότε  $\Theta E \parallel H\Gamma \Rightarrow A\Theta \parallel H\Gamma$

Επομένως το  $A\Theta\Gamma H$  είναι παραλληλόγραμμο, άρα  $AH = \Theta\Gamma$ .

**γ.** Στο τρίγωνο  $ABH$  τα  $Z, \Theta$  είναι μέσα των  $AB, BH$  οπότε  $Z\Theta = \frac{AH}{2} \Leftrightarrow AH = 2Z\Theta$ .

**263 Θέμα 4 - 1820**

**α.** Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  τα  $Z, E$  είναι τα μέσα των  $AB, A\Gamma$ , οπότε  $ZE \parallel \frac{B\Gamma}{2} \Rightarrow EH \parallel B\Delta$ .

Άρα το  $E\Delta B$  είναι παραλληλόγραμμο.

**β.** Επειδή το  $E\Delta B$  είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε  $\Delta H = BE$ .

Είναι  $EH = ZE$  και  $AE = E\Gamma$ , άρα οι διαγώνιες  $A\Gamma$  και  $ZH$  του  $A\Delta H\Gamma Z$  διχοτομούνται.

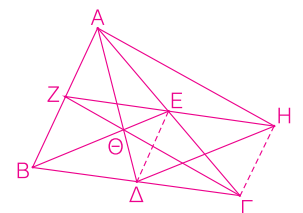
Επομένως το  $A\Delta H\Gamma Z$  είναι παραλληλόγραμμο, άρα  $\Gamma Z = A\Delta$ .

Είναι  $\Pi_{A\Delta H} = A\Delta + \Delta H + AH = A\Delta + BE + \Gamma Z$ .

**γ.** Αν  $\Theta$  το κοινό σημείο των διαμέσων στο  $\Delta AB\Gamma$ , και  $K$  το σημείο τομής των  $\Delta H, \Gamma Z$ , τότε στο τρίγωνο:

- $ZKH$ , το  $E$  είναι το μέσο του  $ZH$  και  $E\Theta \parallel KH$ , οπότε  $Z\Theta = \Theta K$
- $B\Theta\Gamma$ , το  $\Delta$  είναι το μέσο του  $B\Gamma$  και  $\Delta K \parallel B\Theta$ , οπότε  $\Theta K = K\Gamma$

Άρα  $Z\Theta = \Theta K = K\Gamma$ .



## 264 Θέμα 4 - 1760

α. Στο ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  το ύψος  $AM$  είναι και διάμεσος.

Επειδή  $MA = MN$  και  $MB = M\Gamma$ , το  $ABN\Gamma$  είναι παραλληλόγραμμο.

Αφού επιπλέον  $AB = A\Gamma$ , το  $ABN\Gamma$  είναι ρόμβος.

β. Επειδή το  $ABN\Gamma$  είναι ρόμβος, η  $GM$  είναι η μεσοκάθετος του  $AN$ , οπότε  $\Delta A = \Delta N$ .

Άρα το τρίγωνο  $A\Delta N$  είναι ισοσκελές.

γ. Στο τρίγωνο  $A\Delta N$  η  $DM$  είναι διάμεσος και  $\Gamma\Delta = B\Gamma = 2GM$ .

Είναι: •  $GM = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2}$

•  $\Gamma\Delta + GM = \Delta M \Leftrightarrow 2GM + GM = \Delta M \Leftrightarrow 3GM = \Delta M \Leftrightarrow GM = \frac{1}{3}\Delta M$

Οπότε  $\Gamma\Delta = \frac{2}{3}\Delta M$ , άρα το  $\Gamma$  είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου  $A\Delta N$ .

## 265 Θέμα 4 - 1827

α. Είναι  $AE = EZ$  και  $EB = E\Delta$ , οπότε το  $ABZ\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο.

β. Είναι  $BZ \parallel A\Delta$ , οπότε  $BZ \parallel \Gamma\Delta$ .

Άρα το  $B\Delta\Gamma Z$  είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Αν  $O$  το σημείο τομής των διαγωνίων  $B\Gamma$  και  $\Delta Z$  του παραλληλογράμμου  $B\Delta\Gamma Z$ , τότε το  $O$  είναι μέσο της  $\Delta Z$ .

Οι  $BO$ ,  $ZE$  είναι διάμεσοι του τριγώνου  $B\Delta Z$ , οπότε το  $\Theta$  είναι το βαρύκεντρό του.

## 266 Θέμα 4 - 1706

Έστω  $B\Delta$ ,  $\Gamma E$  οι διάμεσοι του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

α. Τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Gamma E$  έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- $A\Delta = AE$
- $\hat{A}$  κοινή

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα  $B\Delta = \Gamma E$ , δηλαδή  $\mu_\beta = \mu_\gamma$ .

Άρα η  $\Pi$  ισχύει.

β. Διατύπωση

Αν σε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\mu_\beta = \mu_\gamma$ , τότε  $\beta = \gamma$ .

Απόδειξη

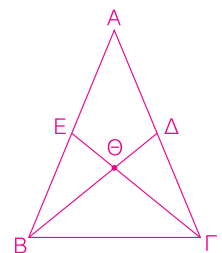
$$\text{Έχουμε } \mu_\beta = \mu_\gamma \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}\mu_\beta = \frac{2}{3}\mu_\gamma \\ \frac{1}{3}\mu_\beta = \frac{1}{3}\mu_\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B\Theta = \Gamma\Theta \\ \Theta\Delta = \Theta E \end{cases}$$

Τα τρίγωνα  $\Theta BE$  και  $\Theta\Gamma\Delta$  έχουν:

- $B\Theta = \Gamma\Theta$
- $\Theta E = \Theta\Delta$
- $\hat{B\Theta E} = \hat{\Gamma\Theta\Delta}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα  $BE = \Gamma\Delta \Rightarrow 2BE = 2\Gamma\Delta \Rightarrow AB = A\Gamma$ , δηλαδή  $\beta = \gamma$ .

γ. Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $\beta = \gamma$  αν και μόνο αν  $\mu_\beta = \mu_\gamma$ .



### 267 Θέμα 4 - 37087

α. Επειδή το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισόπλευρο τα ύψη του  $BK$  και  $\Gamma\Lambda$  είναι διάμεσοί του, οπότε το  $I$  είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

Άρα η  $AI$  θα διέρχεται από το μέσο της  $B\Gamma$ .

β. Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  τα  $\Lambda, K$  είναι μέσα των  $AB, A\Gamma$ , οπότε  $\Lambda K // \frac{B\Gamma}{2}$ .

Στο τρίγωνο  $IB\Gamma$  τα  $M, N$  είναι μέσα των  $IB, I\Gamma$  οπότε  $MN // \frac{B\Gamma}{2}$ .

Οπότε  $\Lambda K // MN$ , άρα το  $M\Lambda K N$  είναι παραλληλόγραμμο.

Στο τρίγωνο  $ABI$  το  $\Lambda M$  ενώνει τα μέσα των  $AB$  και  $BI$  οπότε  $\Lambda M // AI$ .

Τα  $AI$  βρίσκεται στο φορέα του ύψους, άρα  $AI \perp B\Gamma$  και επειδή  $B\Gamma // \Lambda K$ , θα είναι  $AI \perp \Lambda K$ .

Επομένως  $\Lambda M \perp \Lambda K$ , οπότε  $\widehat{M\Lambda K} = 90^\circ$ .

Άρα το  $M\Lambda K N$  είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

### 268 Θέμα 4 - 37116

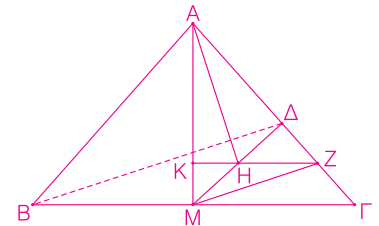
α. Στο τρίγωνο  $M\Delta\Gamma$ , το  $H$  είναι το μέσο του  $\Delta M$  και  $HZ // M\Gamma$ , οπότε το

$Z$  είναι μέσο του  $\Gamma\Delta$ , άρα  $HZ = \frac{M\Gamma}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$ .

β. Στο τρίγωνο  $B\Delta\Gamma$ , τα  $M, Z$  είναι τα μέσα των  $B\Gamma, \Delta\Gamma$ , οπότε  $MZ // B\Delta$ .

γ. Επειδή  $ZK // B\Gamma$  και  $B\Gamma \perp AM$ , είναι  $ZK \perp AM$ .

Στο  $\triangle AMZ$  το  $H$  είναι το ορθόκεντρό του, οπότε  $AH \perp MZ$ . Επειδή  $AH \perp MZ$  και  $MZ // B\Delta$ , έχουμε  $AH \perp B\Delta$ .



### 269 Θέμα 4 - 37163

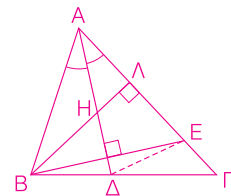
α. Τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Delta E$  έχουν:

- $AB = AE$
- $A\Delta$  κοινή
- $\widehat{BA\Delta} = \widehat{EA\Delta}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Επειδή  $AB = AE$  και  $\Delta B = \Delta E$ , η  $A\Delta$  είναι η μεσοκάθετος του  $BE$ .

γ. Στο τρίγωνο  $ABE$ , το  $H$  είναι το ορθόκεντρό του, οπότε  $EH \perp AB$ .



### 270 Θέμα 4 - 1748

α. Οι διαγώνιοι του τετραγώνου είναι κάθετες, οπότε:

- στο ορθογώνιο τρίγωνο  $OAE$  είναι  $\widehat{\omega} = 90^\circ - \widehat{OEA}$ .
- στο ορθογώνιο τρίγωνο  $BKE$  είναι  $\widehat{\phi} = 90^\circ - \widehat{OEA}$ .

Άρα  $\widehat{\omega} = \widehat{\phi}$ .

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα  $OAE$  και  $OBZ$  έχουν:

- $OA = OB$
- $\omega = \phi$

Οπότε είναι ίσα, άρα  $BZ = AE$  και  $OZ = OE$ .

Επειδή  $O\Gamma = OB$  και  $OZ = OE$  έχουμε  $OZ + O\Gamma = OE + OB \Rightarrow \Gamma Z = BE$ .

γ. Στο τρίγωνο  $EAB$  τα  $BZ$  και  $AO$  είναι τα ύψη του, άρα το  $Z$  είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου  $EAB$ .

Οπότε το  $EZ$  είναι στο φορέα του τρίτου ύψους του τριγώνου, άρα  $EZ \perp AB$ .

### 271 Θέμα 4 - 1777

**α. i.** • Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  τα  $M, N$  είναι τα μέσα των  $AB, A\Gamma$ , οπότε  $MN = \frac{B\Gamma}{2}$ .

• Στο τρίγωνο  $H\beta\Gamma$  τα  $\Lambda, K$  είναι τα μέσα των  $H\beta, H\Gamma$  οπότε  $\Lambda K = \frac{B\Gamma}{2}$ . Άρα  $MN = \Lambda K$ .

**ii.** Στα τρίγωνα  $BAH$  και  $GAH$  τα  $M, \Lambda$  και  $N, K$  είναι τα μέσα των πλευρών τους.

Οπότε  $M\Lambda // \frac{AH}{2}$  και  $NK // \frac{AH}{2}$ . Άρα  $M\Lambda = NK = \frac{AH}{2}$ .

**iii.** Επειδή  $M\Lambda // \frac{AH}{2}$  και  $NK // \frac{AH}{2}$ , έχουμε  $M\Lambda // NK$ , οπότε το  $M\Lambda K N$  είναι παραλληλόγραμμο.

Επειδή το  $H$  είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ , έχουμε  $AH \perp B\Gamma$ .

Επειδή  $M\Lambda // AH$  και  $AH \perp B\Gamma$  είναι  $M\Lambda \perp B\Gamma$ .

Αφού  $\Lambda K // B\Gamma$ , έχουμε  $M\Lambda \perp MN$ , άρα  $\widehat{NML} = 90^\circ$ . Επομένως το  $M\Lambda K N$  είναι ορθογώνιο.

**β.** • Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  τα  $M, O$  είναι τα μέσα πλευρών του, οπότε  $MO // A\Gamma$ .

• Στο τρίγωνο  $H\beta\Gamma$  τα  $O, K$  είναι τα μέσα πλευρών του, οπότε  $OK // BH$ .

Επειδή  $BH \perp A\Gamma$ , είναι και  $OK \perp MO$ , οπότε  $\widehat{MOK} = 90^\circ$ .

### 272 Θέμα 4 - 1764

**α.** Είναι  $A\Delta // B\Gamma$  και  $\Delta A = A\epsilon$ , οπότε  $A\epsilon // B\Gamma$ , άρα το  $A\epsilon B\Gamma$  είναι παραλληλόγραμμο.

**β.** Επειδή  $BA \perp \Delta\epsilon$  και  $\Delta A = A\epsilon$  η  $BA$  είναι η μεσοκάθετος του  $\Delta\epsilon$ , οπότε  $B\Delta = B\epsilon$ .

Είναι  $A\Gamma = 2B\Gamma \Leftrightarrow B\Delta = 2A\Delta \Leftrightarrow B\Delta = \Delta\epsilon$ .

Οπότε  $B\Delta = \Delta\epsilon = B\epsilon$ , άρα το τρίγωνο  $B\epsilon\Delta$  είναι ισόπλευρο.

**γ.** Στο  $\triangle B\epsilon\Delta$ , τα  $\epsilon O$  και  $BA$  είναι ύψη, οπότε το  $Z$  είναι το ορθόκεντρό του. Άρα  $\Delta Z \perp B\epsilon$ .

### 273 Θέμα 4 - 1754

**α. i.** Τα ορθογώνια τρίγωνα  $H\Delta B$  και  $HZA$  έχουν:

- $HB = HA$
- $\widehat{BHD} = \widehat{AHZ}$ .

Άρα είναι ίσα.

**ii.** Τα ορθογώνια τρίγωνα  $H\Delta\Theta$  και  $HZA\Theta$  έχουν:

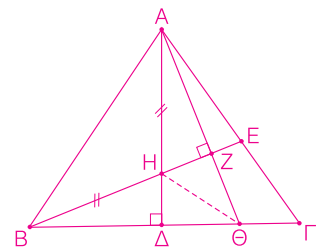
- $H\Theta$  κοινή
- $H\Delta = HZ$  από το **i.** ερώτημα.

Άρα είναι ίσα, οπότε  $\Delta\Theta = Z\Theta$ .

**iii.** Στο τρίγωνο  $AB\Theta$  το  $H$  είναι το ορθόκεντρό του, οπότε  $\Theta H \perp AB$  και επειδή  $HA = HB$  η  $\Theta H$  είναι η μεσοκάθετος του  $AB$ .

**β.** Τα  $AZ$  και  $B\Delta$  είναι ύψη του τριγώνου  $AHB$  που τέμνονται στο  $\Theta$ .

Άρα το  $\Theta$  είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου  $AHB$ .



### 274 Θέμα 4 - 1780

**α.** Στο τρίγωνο  $EAB$  το  $\Delta$  είναι μέσο του  $BE$  και  $\Delta N // AB$ .

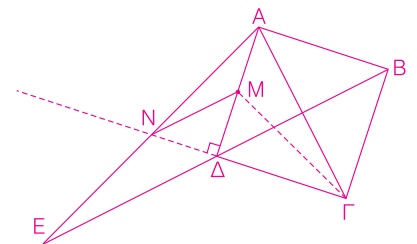
Επομένως το  $N$  είναι μέσο του  $AE$ , οπότε  $\Delta N = \frac{AB}{2} = \frac{A\Delta}{2} = \Delta M$ .

**β.** Το τρίγωνο  $\Delta NM$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε  $\widehat{\Delta} = 90^\circ$  και  $\widehat{\Delta NM} = \widehat{NM\Delta} = 45^\circ$ .

**γ. i.** Στο τρίγωνο  $A\Delta\epsilon$  τα  $N, M$  είναι μέσα των  $A\epsilon, A\Delta$ , οπότε  $MN // \Delta\epsilon \Rightarrow MN // B\Delta$ .

Επειδή  $A\Gamma \perp B\Delta$ , έχουμε  $MN \perp A\Gamma$ .

**ii.** Στο τρίγωνο  $AN\Gamma$  τα  $A\Delta$  και  $NM$  είναι ύψη του, άρα το  $M$  είναι το ορθόκεντρό του. Οπότε  $\Gamma M \perp AN$ .



**275 Θέμα 4 - 37137**

**α. i.** Επειδή η BE είναι διχοτόμος της  $\hat{B}$  έχουμε  $EH = EK$ .  
 Τα ορθογώνια τρίγωνα EHA και EKZ έχουν:
 

- $EH = EK$
- $\hat{HEA} = \hat{KEZ}$

Οπότε είναι ίσα.

**ii.** Τα ορθογώνια τρίγωνα HBE και KBE έχουν:
 

- BE κοινή
- $\hat{HBE} = \hat{KBE}$

Επομένως είναι ίσα, οπότε  $BH = BK$ .

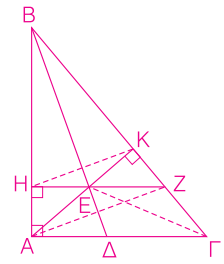
Άρα το τρίγωνο BKH είναι ισοσκελές.

**iii.** Στο τρίγωνο ABZ τα AK και ZH είναι ύψη του, άρα το E είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου.

Οπότε  $BD \perp AZ$ .

**β.** Αν το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές, το ύψος του AK είναι και διχοτόμος του.

Επομένως το E είναι το έγγεντρο του τριγώνου. Άρα η GE είναι διχοτόμος της  $\hat{\Gamma}$ .



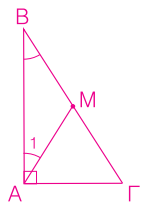
**276 Θέμα 2 - 36169**

**α.** Είναι  $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 35^\circ + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 55^\circ$ .

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ η AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, οπότε

$$AM = \frac{BG}{2} \Rightarrow AM = MB. \text{ Είναι } AM = MB \text{ οπότε } \hat{A}_1 = \hat{B} = 35^\circ \text{ και}$$

$$\hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{AMB} = 180^\circ \Leftrightarrow 35^\circ + 35^\circ + \hat{AMB} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{AMB} = 110^\circ.$$



**277 Θέμα 2 - 37006**

**α.** Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ABΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) ισχύει ότι:

$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 90^\circ - \hat{\Gamma}$$

Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου AΔΓ ισχύει ότι:

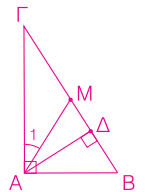
$$\hat{\Gamma\Delta A} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma\Delta A} = 90^\circ - \hat{\Gamma}$$

Οπότε  $\hat{B} = \hat{\Gamma\Delta A}$

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) η AM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα.

$$\text{Οπότε } AM = \frac{BG}{2} = MG, \text{ άρα } \hat{\Gamma} = \hat{A}_1.$$

Η γωνία  $\hat{AM\Delta}$  είναι εξωτερική στο τρίγωνο AMΓ, οπότε  $\hat{AM\Delta} = \hat{\Gamma} + \hat{A}_1 = 2\hat{\Gamma}$ .



**278 Θέμα 2 - 1586**

**α.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο BOA η BM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα.

$$\text{Άρα } BM = \frac{OA}{2} = MA. \text{ Άρα το τρίγωνο BMA είναι ισοσκελές.}$$

**β.** Επειδή  $BM = MO$  έχουμε  $\hat{OBM} = \hat{BOM}$ .

Η γωνία  $\hat{BMA}$  είναι εξωτερική στο τρίγωνο OBM, οπότε

$$\hat{BMA} = \hat{OBM} + \hat{BOM} = x\hat{OA} + x\hat{OA} = 2 \cdot x\hat{OA}.$$

**279 Θέμα 2 - 36111**

**α. •** Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) η AM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε

$$AM = \frac{BG}{2} = MG, \text{ άρα } \hat{MAG} = \hat{\Gamma} = 25^\circ.$$

Η γωνία  $\widehat{AMB}$  είναι εξωτερική στο  $\widehat{AMG}$ , οπότε  $\widehat{AMB} = \widehat{\Gamma} + \widehat{MAG} = 2\widehat{\Gamma} = 50^\circ$ .

• Είναι  $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{B} + 25^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{B} = 65^\circ$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $HAB$  είναι  $\widehat{HAB} + \widehat{B} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{HAB} + 65^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{HAB} = 25^\circ$ .

• Η γωνία  $\widehat{ADB}$  είναι εξωτερική του  $\widehat{ADG}$ , οπότε  $\widehat{ADB} = \widehat{\Gamma} + \widehat{DAG} = \widehat{\Gamma} + \frac{\widehat{A}}{2} = 25^\circ + 45^\circ = 70^\circ$ .

β. Είναι:

- $\widehat{MAD} = \widehat{DAG} - \widehat{MAG} = \frac{\widehat{A}}{2} - \widehat{MAG} = 45^\circ - 25^\circ = 20^\circ$
- $\widehat{DAH} = \widehat{ADB} - \widehat{HAB} = \frac{\widehat{A}}{2} - \widehat{HAB} = 45^\circ - 25^\circ = 20^\circ$

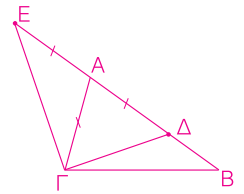
## 280 Θέμα 2 - 37016

α. Στο τρίγωνο  $\Delta GE$  είναι  $AG = \frac{\Delta E}{2}$ , οπότε η διάμεσος  $AG$  είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί.

Οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο  $\Gamma$ , άρα  $\Delta\Gamma \perp EG$ .

β. Επειδή  $AG = AD$  το τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελές, οπότε  $\widehat{A\Delta\Gamma} = \widehat{A\Gamma\Delta}$ .

Η  $\widehat{EAG}$  είναι εξωτερική του τριγώνου  $A\Delta\Gamma$ , οπότε  $\widehat{EAG} = \widehat{A\Delta\Gamma} + \widehat{A\Gamma\Delta} = 2\widehat{A\Delta\Gamma}$ .



## 281 Θέμα 2 - 34393

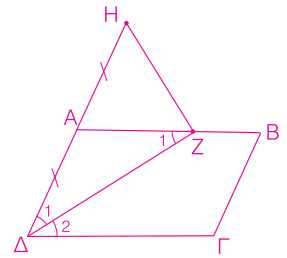
α. Είναι:

•  $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2$ , αφού  $\Delta Z$  διχοτόμος

•  $\widehat{\Delta}_2 = \widehat{Z}_1$  ως εντός εναλλάξ. Άρα  $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{Z}_1$ , οπότε το τρίγωνο  $A\Delta Z$  είναι ισοσκελές.

β. Στο  $\Delta ZH$  είναι  $ZA = \frac{\Delta H}{2}$ , οπότε η  $ZA$  είναι διάμεσος και ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί.

Άρα το  $\Delta ZH$  είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία  $\widehat{Z}$ .



## 282 Θέμα 2 - 34411

α. Στο  $\Delta\Gamma B$  είναι  $\Gamma A = \frac{B\Delta}{2}$ , οπότε η  $\Gamma A$  είναι διάμεσος και ίση με το μισό της πλευράς στην οποία

αντιστοιχεί. Οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με  $\widehat{\Gamma} = 90^\circ$ .

β. Στο  $B\Delta E$  τα  $A, \Gamma$  είναι τα μέσα των  $B\Delta, \Delta E$ , οπότε  $A\Gamma \parallel BE$  και  $A\Gamma = \frac{BE}{2}$ .

## 283 Θέμα 2 - 34420

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Gamma E$  έχουν:

- $AB = AE$
- $AB = A\Gamma$

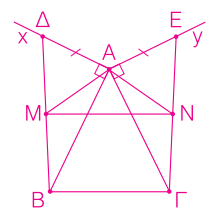
Άρα είναι ίσα, οπότε  $B\Delta = \Gamma E$ .

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο:

•  $\Delta B\Delta$  ( $\widehat{A} = 90^\circ$ ) η  $AM$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα  $AM = \frac{B\Delta}{2}$  (1).

•  $A\Gamma E$  ( $\widehat{A} = 90^\circ$ ) η  $AN$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα  $AN = \frac{\Gamma E}{2}$  (2).

Επειδή  $B\Delta = \Gamma E$  από τις (1) και (2) προκύπτει  $AM = AN$ , οπότε το  $\Delta AMN$  είναι ισοσκελές.



**284 Θέμα 2 - 36350**

- α. Τα ορθογώνια τρίγωνα  $\Delta AB$  και  $\Delta E\Gamma$  έχουν:
- $AB = A\Gamma$
  - $\hat{\Delta}AB = \hat{E}A\Gamma$

Άρα είναι ίσα, οπότε  $B\Delta = \Gamma E$ .

β.i. Στα ορθογώνια τρίγωνα  $\Delta B\Gamma$  και  $\Delta E\Gamma$  οι  $M\Delta$  και  $ME$  είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε  $M\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$  και  $ME = \frac{B\Gamma}{2}$ . Άρα  $M\Delta = ME$ .

- ii. Τα  $\hat{\Delta}M\Delta$  και  $\hat{\Delta}M\Delta E$  έχουν:
- $\Delta\Delta = \Delta E$
  - $M\Delta = ME$
  - $MA$  κοινή

Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ), οπότε  $\hat{\Delta}M\Delta = \hat{E}M\Delta$ .

Επομένως η  $AM$  διχοτομεί τη γωνία  $\hat{\Delta}ME$ .

**285 Θέμα 2 - 36343**

- α. Τα ορθογώνια τρίγωνα  $\Delta KB$  και  $\Delta Z\Gamma$  έχουν:
- $KB = \Lambda\Gamma$
  - $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ , αφού το  $\hat{\Delta}AB\Gamma$  είναι ισοσκελές.

Άρα είναι ίσα.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο:

- $\hat{\Delta}EBK$  ( $\hat{E} = 90^\circ$ ) η  $EH$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα  $EH = \frac{KB}{2}$  (1).
- $\hat{\Delta}Z\Gamma\Lambda$  ( $\hat{Z} = 90^\circ$ ) η  $Z\Theta$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα  $Z\Theta = \frac{\Gamma\Lambda}{2}$  (2).

Επειδή  $KB = \Gamma\Lambda$  από τις (1) και (2) προκύπτει  $EH = Z\Theta$ .

**286 Θέμα 2 - 36328**

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $\Delta AB\Gamma$  η  $AM$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε  $AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$ . Άρα το  $\hat{\Delta}M\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελές, επομένως  $\hat{M}\Delta\Gamma = \hat{M}\Gamma\Delta$  (1).

β. Επειδή  $Ax \parallel B\Gamma$ , είναι  $\hat{x}A\Gamma = \hat{M}\Gamma\Delta$  (2), ως εντός εναλλάξ.

Από τις (1), (2) προκύπτει  $\hat{M}\Delta\Gamma = \hat{x}A\Gamma$ , άρα η  $A\Gamma$  είναι διχοτόμος της  $\hat{M}\Delta x$ .

**287 Θέμα 2 - 36355**

α. Στα ορθογώνια τρίγωνα  $\Delta BA\Gamma$  ( $\hat{B} = 90^\circ$ ) και  $\Delta A\Gamma\Delta$  ( $\hat{\Delta} = 90^\circ$ ), οι  $BZ$ ,  $\Delta Z$  είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε  $BZ = \frac{A\Gamma}{2}$  και  $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2}$ .

Επομένως  $BZ = \Delta Z$ .

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $\Delta AB\Gamma$  έχουμε  $\hat{B}\hat{A}\Gamma + \hat{A}\hat{\Gamma}B = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B}\hat{A}\Gamma + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B}\hat{A}\Gamma = 60^\circ$ .

Στο ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο  $\Delta A\Gamma\Delta$  είναι  $\hat{\Delta}\hat{A}\Gamma = \hat{A}\hat{\Gamma}\Delta = 45^\circ$ .

Είναι:

- $\hat{B}\hat{A}\Delta = \hat{B}\hat{A}\Gamma + \hat{\Gamma}\hat{A}\Delta = 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ$

- $\hat{B}\hat{\Gamma}\Delta = \hat{A}\hat{\Gamma}B + \hat{A}\hat{\Gamma}\Delta = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$



**288 Θέμα 2 - 1615**

α. Στο  $\triangle AEB$  είναι  $ED = \frac{AB}{2}$ , οπότε η διάμεσός του  $ED$  είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί.

Άρα  $\hat{AEB} = 90^\circ$ , επομένως το  $\triangle AEB$  είναι ορθογώνιο.

β. Στο  $\triangle ABG$  η  $BE$  είναι διάμεσος και ύψος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

γ. Στο  $\triangle ABG$  τα  $\Delta, E$  είναι τα μέσα των  $AB, AG$ , οπότε  $DE = \frac{BG}{2} \Rightarrow BG = 2DE = 2 \cdot 10 = 20$ .

Η περίμετρος  $\Pi$  του  $\triangle ABG$  είναι:  $\Pi = AB + BG + AG = 20 + 20 + 16 = 56$ .

**289 Θέμα 2 - 36093**

α. Στο  $\triangle AEB$  είναι  $ED = \frac{AB}{2}$ , οπότε η διάμεσός του  $ED$  είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί.

Άρα  $\hat{AEB} = 90^\circ$ , επομένως το  $\triangle AEB$  είναι ορθογώνιο.

β. Στο  $\triangle ABG$  τα  $\Delta, E$  είναι τα μέσα των  $AB, AG$ , οπότε  $DE = \frac{BG}{2} \Rightarrow BG = 2DE = 2 \cdot 10 = 20$ .

γ. Είναι  $\Pi_{ABG} = AB + AG + BG = 20 + 16 + 20 = 56$ .

**290 Θέμα 2 - 36342**

α. Στο  $\triangle ABG$  τα  $\Delta, E$  είναι μέσα των  $BG, AB$ , οπότε  $DE = \frac{AG}{2} \Rightarrow AG = 2DE = 2 \cdot 1 = 2$ .

β. Επειδή το  $\triangle ABG$  είναι ορθογώνιο ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και  $\hat{B} = 30^\circ$ , είναι  $AG = \frac{BG}{2} \Rightarrow BG = 2 \cdot 2 = 4$ .

γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $ABG$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) η  $AD$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε  $AD = \frac{BG}{2} = 2$ .

**291 Θέμα 2 - 34406**

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $ABG$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) η  $AM$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε  $AM = \frac{BG}{2} = MG$ . Άρα  $\hat{MAG} = \hat{G}$ .

Στο  $\triangle AMG$  είναι  $\hat{AMG} + \hat{G} + \hat{MAG} = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + \hat{G} + \hat{G} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{G} = 60^\circ \Leftrightarrow \hat{G} = 30^\circ$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $ABG$  είναι  $\hat{G} = 30^\circ$ , επομένως  $AB = \frac{BG}{2} = 4 \text{ cm}$ .

β. Στο ισοσκελές τρίγωνο  $AMG$  το  $MD$  είναι ύψος του, άρα είναι και διάμεσος. Οπότε το  $\Delta$  είναι μέσο του  $AG$ .

Στο  $\triangle ABG$  τα  $M, \Delta$  είναι μέσα των  $BG$  και  $AG$ , οπότε  $M\Delta = \frac{AB}{2} = 2 \text{ cm}$ .

**292 Θέμα 2 - 36116**

α. Επειδή  $\Delta B = \Delta G$  είναι  $\hat{B} = \hat{\Delta GB} = \frac{\hat{G}}{2}$ , οπότε  $\hat{G} = 2\hat{B}$ .

Είναι  $\hat{B} + \hat{G} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B} + 2\hat{B} = 90^\circ \Leftrightarrow 3\hat{B} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 30^\circ$ .

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $AG\Delta$  είναι  $\hat{AG\Delta} = 30^\circ$ , οπότε  $A\Delta = \frac{G\Delta}{2} = 1 \text{ cm}$ .

Άρα  $AB = A\Delta + \Delta B = 1 + 2 = 3 \text{ cm}$ .

### 293 Θέμα 2 - 36224

- α. • Επειδή το  $\triangle AB\Gamma$  είναι ισοσκελές και το  $AE$  είναι διάμεσος θα είναι και ύψος, οπότε  $\widehat{A\hat{E}\Gamma} = 90^\circ$ .  
 • Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $\triangle A\hat{E}\Gamma$  ( $\widehat{E} = 90^\circ$ ) η  $ED$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε  $ED = \frac{A\Gamma}{2} = \Delta\Gamma$ ,

επομένως το  $\triangle E\hat{D}\Gamma$  είναι ισοσκελές.

- Είναι  $\widehat{\Gamma} = \widehat{B} = 30^\circ$ ,  $\widehat{\Delta E\Gamma} = \widehat{\Gamma} = 30^\circ$ .

Στο  $\triangle E\hat{D}\Gamma$  είναι  $\widehat{E\hat{D}\Gamma} + \widehat{\Delta E\Gamma} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{E\hat{D}\Gamma} + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{E\hat{D}\Gamma} = 120^\circ$ .

β. Είναι:

- $\widehat{E\hat{A}\Delta} = 90^\circ - \widehat{\Gamma} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$   
 •  $ED = \Delta A$ , οπότε  $\widehat{A\hat{E}\Delta} = \widehat{E\hat{A}\Delta} = 60^\circ$ .

Επομένως  $\widehat{A\hat{\Delta}E} = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$ .

Άρα το  $\triangle A\hat{\Delta}E$  είναι ισόπλευρο.

### 294 Θέμα 2 - 36086

- α. Είναι  $\widehat{B} = 2\widehat{\Gamma}$  και  $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{\Gamma} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 3\widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 30^\circ$ .

Οπότε  $\widehat{B} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$ .

- β. Επειδή στο  $\triangle AB\Gamma$  είναι  $\widehat{A} = 90^\circ$  και  $AM$  διάμεσος προς την υποτείνουσα, προκύπτει  $AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$ .

Οπότε το  $\triangle AM\Gamma$  είναι ισοσκελές.

- γ. Είναι  $MA = M\Gamma$  άρα  $\widehat{M\hat{A}\Gamma} = \widehat{\Gamma} = 30^\circ$

Στο  $\triangle AM\Gamma$  είναι  $\widehat{A\hat{M}\Gamma} + \widehat{\Gamma} + \widehat{M\hat{A}\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{A\hat{M}\Gamma} + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{A\hat{M}\Gamma} = 120^\circ$

### 295 Θέμα 2 - 37017

- α. Οι γωνίες  $\widehat{A}$  και  $\widehat{B}$  είναι εντός και επί τα αυτά, οπότε  $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{A} + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{A} = 60^\circ$ .

Οι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου είναι ίσες, οπότε  $\widehat{\Gamma} = \widehat{A} = 60^\circ$ . Άρα  $\widehat{A} = \widehat{\Gamma} = 60^\circ$ .

- β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $\triangle E\hat{G}\Delta$  η  $EZ$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε  $EZ = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{AB}{2} = AK$ .

- γ. Επειδή  $EZ = Z\Gamma$ , είναι  $\widehat{Z\hat{E}\Gamma} = \widehat{\Gamma} = 60^\circ$ .

Άρα  $\widehat{E\hat{Z}\Gamma} = 60^\circ$ .

### 296 Θέμα 2 - 37007

- α. Είναι  $BZ \perp \Gamma\Delta$  και  $AB \parallel \Gamma\Delta$  οπότε  $AB \perp BZ$ .

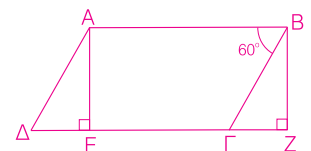
Άρα  $\widehat{Z\hat{B}\Gamma} = \widehat{A\hat{B}Z} - \widehat{B} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ , οπότε  $\Gamma Z = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{A\Delta}{2}$ .

- β. Τα ορθογώνια τρίγωνα  $\triangle A\hat{D}E$  και  $\triangle B\hat{G}Z$  έχουν:

- $A\Delta = B\Gamma$
- $AE = BZ$ , ως αποστάσεις παραλλήλων

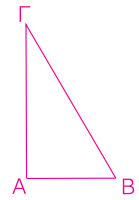
Άρα είναι ίσα.

- γ. Το  $\triangle ABZE$  είναι ορθογώνιο, γιατί έχει  $\widehat{B} = \widehat{Z} = \widehat{E} = 90^\circ$ .



**297 Θέμα 2 - 36109**

- α. Είναι:
- $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 120^\circ \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 120^\circ \Leftrightarrow 4\hat{\Gamma} = 120^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$
  - $\hat{A} = 3\hat{\Gamma} = 3 \cdot 30^\circ = 90^\circ$
  - $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + \hat{B} + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 60^\circ$



Άρα  $\hat{A} = 90^\circ$ ,  $\hat{B} = 60^\circ$  και  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ .

- β. Επειδή το  $\triangle AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ , προκύπτει  $AB = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ cm}$ .

**298 Θέμα 2 - 36171**

- α. Είναι  $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$  και  $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$ .

Οπότε  $\hat{B} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$ .

- β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι  $\hat{B}\Delta + \hat{B} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B}\Delta + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B}\Delta = 30^\circ$

- γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $BA\Delta$  είναι  $\hat{B}\Delta = 30^\circ$ , οπότε  $BA = \frac{AB}{2}$ .

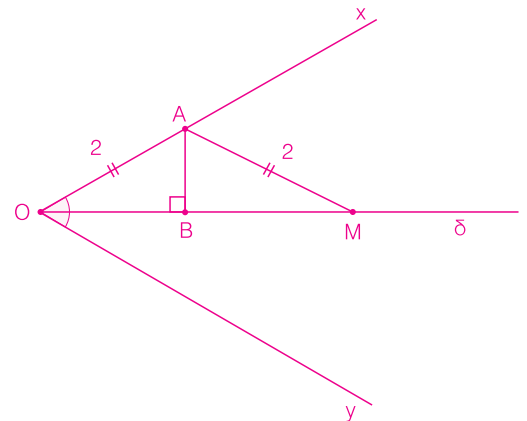
**299 Θέμα 2 - 13653**

- α. Η ημιευθεία  $O\delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\angle xOy$ , οπότε  $\angle xO\delta = \angle \delta Oy = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$ .

- β. Είναι:
- $\hat{AOM} = \angle xO\delta = 30^\circ$
  - $AO = AM$ , άρα  $\hat{AOM} = \hat{AMO} = 30^\circ$
  - $\hat{AOM} + \hat{AMO} + \hat{MAO} = 180^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + 30^\circ + \hat{MAO} = 180^\circ$   
 $\Leftrightarrow \hat{MAO} = 120^\circ$

- γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $AOB$  είναι  $\hat{AOB} = 30^\circ$ , οπότε,

$$AB = \frac{OA}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

**300 Θέμα 2 - 13828**

- α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  η υποτείνουσα  $AB$  είναι διπλάσια της κάθετης πλευράς  $AD$  άρα  $\hat{\Delta BA} = 30^\circ$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Delta$  έχουμε  $\hat{\Delta AB} + \hat{\Delta BA} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta AB} = 60^\circ$ .

- β. Οι βάσεις  $AB$  και  $\Delta\Gamma$  του τραπεζίου  $AB\Gamma\Delta$  είναι κάθετες στην  $B\Gamma$  άρα το τρίγωνο  $\Delta\Gamma B$  είναι ορθογώνιο στο  $\Gamma$ .

Είναι  $\hat{AB\Delta} = \hat{B\Delta\Gamma} = 30^\circ$ , ως εντός εναλλάξ άρα  $\hat{AB\Delta} = \hat{B\Delta\Gamma} = 30^\circ$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $\Delta\Gamma B$  είναι  $\hat{B\Delta\Gamma} = 30^\circ$ , άρα  $B\Gamma = \frac{B\Delta}{2} \Leftrightarrow B\Delta = 2B\Gamma$ .

**301 Θέμα 2 - 36097**

- α. Επειδή  $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$  είναι:

- $\omega = \hat{BAK} = 60^\circ$ , ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.
- $\varphi = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ , ως εντός και επί τα αυτά μέρη.

β. Είναι  $\hat{AKB} = 180^\circ - \hat{\varphi} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ .

Άρα το τρίγωνο  $\hat{ABK}$  είναι ορθογώνιο.

γ. Το  $\hat{ABK}$  είναι ορθογώνιο ( $\hat{K} = 90^\circ$ ) και  $\hat{KBA} + \hat{KAB} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{KBA} + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{KBA} = 30^\circ$ .

Επομένως  $KA = \frac{AB}{2} = 3$ .

### 302 Θέμα 2 - 1625

α. Είναι  $\hat{\Delta AZ} = \frac{\hat{A}_{\xi}}{2} = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $\hat{\Delta AG}$  ( $\hat{\Delta} = 90^\circ$ ) η  $\Delta Z$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε  $\Delta Z = \frac{AG}{2} = AZ$ .

Άρα το  $\hat{\Delta AZ}$  είναι ισοσκελές με  $\hat{\Delta AZ} = 60^\circ$ , οπότε είναι ισόπλευρο.

β. Στο  $\hat{ABG}$  τα  $E, Z$  είναι τα μέσα των  $AB, AG$ , οπότε  $EZ = \frac{BG}{2} = \frac{AB}{2} = AE$ .

Είναι  $AE = \frac{AB}{2} = \frac{AG}{2} = \Delta Z$  και  $\Delta Z = \Delta A$ , οπότε  $EZ = AE = \Delta Z = \Delta A$ .

Άρα το  $\Delta AZE$  είναι ρόμβος.

### 303 Θέμα 2 - 13837

α. Τα τρίγωνα  $\Delta EZ$  και  $\Delta ED$  έχουν:

- $AE = EG$
- $EZ = ED$
- $\hat{AEZ} = \hat{GED}$ , ως κατακορυφήν

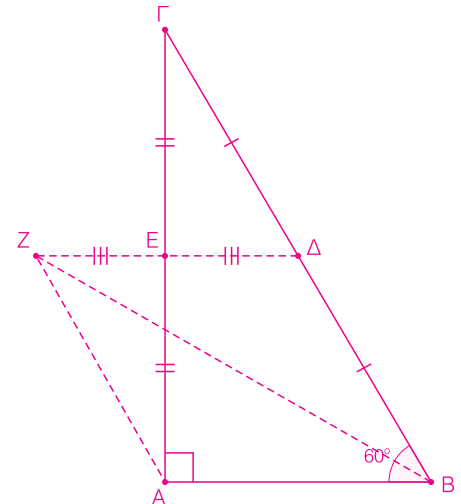
Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε  $AZ = \Gamma\Delta$ .

β. Είναι  $AZ = \Gamma\Delta$  και  $\Gamma\Delta = \Delta B$ , άρα  $AZ = \Delta B = \frac{BG}{2}$ . Στο ορθογώνιο

τρίγωνο  $\hat{ABG}$  είναι  $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$  οπότε

$$AB = \frac{BG}{2}.$$

Άρα  $AZ = AB$  και το τρίγωνο  $\hat{ABZ}$  είναι ισοσκελές.



### 304 Θέμα 2 - 14876

α. Οι γωνίες  $\hat{A}$  και  $\hat{\Delta}$  είναι εντός και επί τα αυτά, οπότε  $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + \hat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 60^\circ$ .

Η  $\Delta E$  είναι διχοτόμος της  $\hat{\Delta}$ , οπότε  $\hat{\Delta LE} = \frac{\hat{\Delta}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

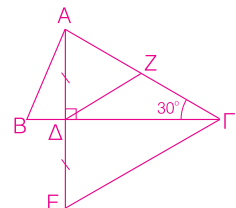
β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $\hat{AZ\Delta}$  ( $\hat{Z} = 90^\circ$ ) είναι  $\hat{\Delta LE} = 30^\circ$ , οπότε  $AZ = \frac{A\Delta}{2} = \frac{\frac{AB}{2}}{2} = \frac{AB}{4}$ .

### 305 Θέμα 2 - 34495

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $\hat{\Delta AG}$  ( $\hat{\Delta} = 90^\circ$ ) η  $\Delta Z$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε  $\Delta Z = \frac{AG}{2}$ .

β. Στο  $\hat{AEG}$  η  $\Gamma\Delta$  είναι ύψος και διάμεσος, οπότε είναι ισοσκελές και η  $\Gamma\Delta$  διχοτόμος του.

Επομένως  $\hat{\Gamma\Gamma E} = 2\hat{\Gamma} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$ .



Άρα το  $\triangle A\Gamma E$  είναι ισοσκελές με μία γωνία  $60^\circ$ , οπότε είναι ισόπλευρο.

### 306 Θέμα 2 - 13831

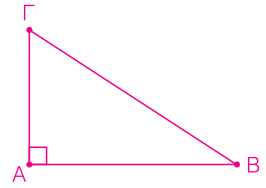
**α.** Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με  $\hat{A} = 90^\circ$ , οπότε η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου είναι η ΒΓ.

Έχουμε  $AB > AG \Leftrightarrow \gamma > \beta$ , άρα  $\hat{\Gamma} > \hat{B} \Leftrightarrow \hat{B} < \hat{\Gamma}$ .

Οπότε, η γωνία  $\hat{B}$  είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου.

**β. i.** Εφόσον η μια οξεία γωνία του τριγώνου ΑΒΓ είναι  $30^\circ$  η άλλη οξεία γωνία του είναι συμπληρωματική της, άρα  $60^\circ$ . Αφού η μικρότερη γωνία του τριγώνου είναι η  $\hat{B}$ . Έχουμε  $\hat{B} = 30^\circ$  και  $\hat{\Gamma} = 60^\circ$ .

**ii.** Η ΒΓ είναι η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Εφόσον  $\hat{B} = 30^\circ$  η απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας  $\hat{B}$  είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, άρα η πλευρά ΑΓ είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.



### 307 Θέμα 4 - 1812

**α.** Επειδή οι ΜΔ, ΜΕ είναι διχοτόμοι των γωνιών  $\hat{BMA}$ ,  $\hat{AMG}$  έχουμε  $\hat{\Delta MA} = \frac{\hat{BMA}}{2}$  και  $\hat{AME} = \frac{\hat{AMG}}{2}$ .

Οπότε  $\hat{\Delta ME} = \hat{\Delta MA} + \hat{AME} = \frac{\hat{BMA}}{2} + \frac{\hat{AMG}}{2} = \frac{\hat{BMA} + \hat{AMG}}{2} = \frac{\hat{BMG}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ .

**β.** Στα ορθογώνια τρίγωνα  $\triangle ME$  ( $\hat{M} = 90^\circ$ ) και  $\triangle AE$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ), οι ΜΚ, ΚΑ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε  $MK = \frac{\Delta E}{2}$ ,  $KA = \frac{\Delta E}{2}$ . Άρα  $MK = KA$ .

### 308 Θέμα 4 - 1738

**α.** Επειδή  $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$  και η ΒΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B}$  έχουμε  $\hat{\Delta B\Gamma} = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{2\hat{\Gamma}}{2} = \hat{\Gamma}$ , οπότε το  $\triangle B\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελές.

**β.** Είναι  $\hat{M\hat{N}\Gamma} = \hat{\Delta B\Gamma}$ , ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

Οπότε  $\hat{M\hat{N}\Gamma} = \hat{\Gamma}$ , επομένως το  $\triangle M\hat{N}\Gamma$  είναι ισοσκελές.

**γ.** Στο ισοσκελές τρίγωνο ΜΝΓ είναι  $MN = M\hat{N}\Gamma = \frac{A\hat{\Gamma}}{2}$ .

Στο  $\triangle AN\hat{\Gamma}$ , η ΝΜ είναι διάμεσος και ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί.

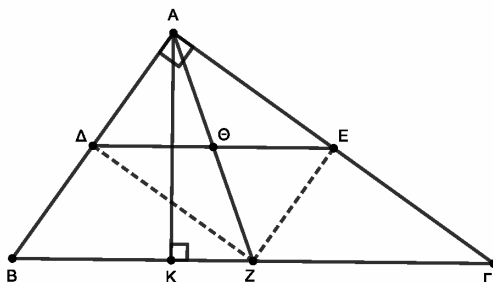
Οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με  $\hat{N} = 90^\circ$ .

Άρα  $AN \perp B\hat{\Gamma}$ .

### 309 Θέμα 4 - 14886

α)

i.



Το τμήμα EZ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΒΓ στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα  $EZ \parallel AB$  οπότε και  $EZ \parallel AD$  και  $EZ = \frac{AB}{2} = AD$ . Άρα το τετράπλευρο ΑΔΖΕ έχει τις απέναντι πλευρές του ΑΔ και ΕΖ ίσες και παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον η γωνία του Α είναι ορθή, άρα το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ορθογώνιο.

ii. Το τμήμα ΔΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ στο τρίγωνο ΑΒΓ, οπότε  $\Delta E \parallel B\Gamma$  και  $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$ .

Οι ΑΖ, ΔΕ είναι διαγώνιες του ορθογωνίου ΑΔΖΕ, οπότε είναι ίσες και διχοτομούνται με Θ το κέντρο του. Άρα  $A\Theta = \frac{AZ}{2} = \frac{\Delta E}{2} = \Theta E$ . Το ευθύγραμμο τμήμα ΘΕ ενώνει τα

μέσα των ΑΖ και ΑΓ στο τρίγωνο ΑΖΓ, άρα  $\Theta E = \frac{Z\Gamma}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$ .

β)

i. Επειδή  $\widehat{Z\hat{E}\Gamma} = 90^\circ$ , το ΖΕ είναι ύψος στο τρίγωνο ΑΖΓ και επειδή είναι και διάμεσος, το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Άρα  $\widehat{Z\hat{A}\Gamma} = \hat{\Gamma} = 30^\circ$ .

Η γωνία  $\widehat{A\hat{Z}B}$  είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΖΓ, άρα:  $\widehat{A\hat{Z}B} = \widehat{Z\hat{A}\Gamma} + \hat{\Gamma} = 60^\circ$ .

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ , άρα  $AB = \frac{B\Gamma}{2}$  (1). Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:  $\widehat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$  ή  $\widehat{B} = 60^\circ$ . Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΚΒ έχουμε:  $\widehat{B\hat{A}K} + \widehat{B} = 90^\circ$  ή  $\widehat{B\hat{A}K} = 30^\circ$ . Οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΚ είναι  $BK = \frac{AB}{2}$  και λόγω της (1)  $BK = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2}$  ή  $BK = \frac{B\Gamma}{4}$ .

### 310 Θέμα 4 - 37100

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι:

- $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$
- $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$ , οπότε  $\hat{B} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$
- $\widehat{E\hat{B}\Delta} = 180^\circ - \widehat{B} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

Το  $\widehat{B\hat{E}\Delta}$  είναι ισοσκελές, οπότε  $\hat{\Delta} = \hat{E}$  και  $\widehat{E\hat{\Delta}B} + \hat{\Delta} + \hat{E} = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + \hat{E} + \hat{E} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{E} = 60^\circ \Leftrightarrow \hat{E} = 30^\circ$ .

Άρα  $\hat{\Delta} = \hat{E} = 30^\circ$  και  $\widehat{E\hat{B}\Delta} = 120^\circ$ .

β.i. Το  $\widehat{A\hat{\Delta}B}$  είναι ορθογώνιο ( $\hat{\Delta} = 90^\circ$ ) με  $\widehat{B\hat{A}\Delta} = 90^\circ - \widehat{B} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ .

Οπότε  $B\Delta = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow BE = \frac{AB}{2}$ .

ii. Είναι  $AE = AB + BE = AB + \frac{AB}{2} = \frac{3AB}{2}$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) είναι  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ .

Οπότε  $AB = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2AB$ .

Είναι  $\Delta\Gamma = B\Gamma - B\Delta = 2AB - BE = 2AB - \frac{AB}{2} = \frac{3AB}{2}$ . Άρα  $AE = \Gamma\Delta$ .

### 311 Θέμα 4 - 1824

α. Στα ισοσκελή τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Gamma E$  οι διχοτόμοι  $BK$ ,  $\Gamma\Lambda$  είναι ύψη και διάμεσοι, οπότε τα  $K$ ,  $\Lambda$  είναι μέσα των  $A\Delta$ ,  $AE$ .

β. Στο τρίγωνο  $A\Delta E$  τα  $K$ ,  $\Lambda$  είναι τα μέσα των  $A\Delta$ ,  $AE$ , οπότε  $K\Lambda // \Delta E$ .

Στο  $\Delta A\Delta B$  το  $K$  είναι μέσο της  $A\Delta$  και  $KM // \Delta B$ , οπότε το  $M$  είναι μέσο της  $AB$ .

Στο  $\Delta A\Gamma E$  το  $\Lambda$  είναι μέσο της  $AE$  και  $\Lambda N // \Gamma E$ , οπότε το  $N$  είναι μέσο της  $A\Gamma$ .

Στα ορθογώνια τρίγωνα  $KAB$  και  $\Lambda A\Gamma$  οι  $MK$ ,  $N\Lambda$  είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, επομένως

$$KM = \frac{AB}{2} = MA \quad \text{και} \quad \Lambda N = \frac{A\Gamma}{2} = NA. \quad \text{Άρα τα } \Delta KMA, \Delta \Lambda NA \text{ είναι ισοσκελή.}$$

γ. Τα  $M$ ,  $N$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$ ,  $A\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ , οπότε  $MN = \frac{B\Gamma}{2}$ .

$$\text{Είναι } K\Lambda = KM + MN + N\Lambda = \frac{AB}{2} + \frac{B\Gamma}{2} + \frac{A\Gamma}{2} = \frac{AB + A\Gamma + B\Gamma}{2}$$

### 312 Θέμα 4 - 1808

α. Είναι  $K\Delta = A\Delta = \frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma}{2} = AE = \Lambda E$ .

β. Στο  $\Delta AKB$  είναι  $K\Delta = \frac{AB}{2}$ , οπότε η διάμεσος  $K\Delta$  είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί.

Οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με  $\hat{K} = 90^\circ$ .

• Στο τρίγωνο  $A\Lambda\Gamma$  είναι  $\Lambda E = \frac{A\Gamma}{2}$ , οπότε η διάμεσος είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί. Οπότε το τρίγωνο  $A\Lambda\Gamma$  είναι ορθογώνιο με  $\hat{\Lambda} = 90^\circ$ .

γ. Τα  $\Delta A\Delta K$  και  $\Delta A\Lambda E$  έχουν:

- $A\Delta = AE$
- $\Delta K = E\Lambda$
- $\hat{A\Delta K} = \hat{A\Lambda E}$ , ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών  $\hat{A\Delta E}$  και  $\hat{A\Lambda\Delta}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα  $AK = A\Lambda$ .

Τα ορθογώνια τρίγωνα  $AKB$  και  $A\Lambda\Gamma$  έχουν:

- $AK = A\Lambda$
- $AB = A\Gamma$

Οπότε είναι ίσα.

### 313 Θέμα 4 - 1771

α. Είναι:

- $MA = MN$ , ως εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο  $(O, \rho_1)$
- $MB = MN$ , ως εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο  $(K, \rho_2)$

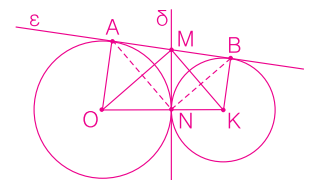
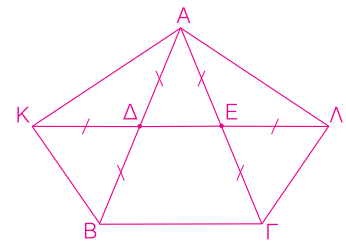
Οπότε  $MA = MB$ , άρα το  $M$  είναι το μέσο του  $AB$ .

β. Οι  $MO$  και  $MK$  είναι διακεντρικές ευθείες οπότε είναι οι διχοτόμοι των γωνιών  $\hat{AMN}$  και  $\hat{BMN}$ . Οπότε:

- $\hat{OMN} = \frac{\hat{AMN}}{2}$ ,  $\hat{NMK} = \frac{\hat{NMB}}{2}$
- $\hat{OMK} = \hat{OMN} + \hat{NMK} = \frac{\hat{AMN} + \hat{NMB}}{2} = \frac{\hat{AMB}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

γ. Η  $NM$  είναι διάμεσος στο τρίγωνο  $ANB$  και  $NM = MA = \frac{AB}{2}$ .

Άρα το τρίγωνο  $ANB$  είναι ορθογώνιο με  $\hat{ANB} = 90^\circ$ .



### 314 Θέμα 4 - 13852

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΕΟ και ΒΖΟ έχουν:

- $\widehat{\Delta\hat{E}O} = \widehat{B\hat{Z}O} = 90^\circ$
- $\widehat{E\hat{O}\Delta} = \widehat{Z\hat{O}B}$  (ως κατακορυφήν)
- $ΔΟ = ΟΒ$  (Ο μέσο της διαγωνίου ΒΔ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ)

Άρα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν την υποτεινούσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

β. Στα τρίγωνα ΔΕΟ και ΒΖΟ οι γωνίες  $\widehat{O\hat{\Delta}E}$  και  $\widehat{O\hat{B}Z}$  είναι ίσες ως συμπληρωματικές των ίσων γωνιών  $\widehat{E\hat{O}\Delta}$  και  $\widehat{Z\hat{O}B}$ .

Από τη σύγκριση του α. ερωτήματος έχουμε  $EO = ZO$ .

Το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο διότι οι διαγώνιοι του ΕΖ και ΒΔ διχοτομούνται στο Ο.

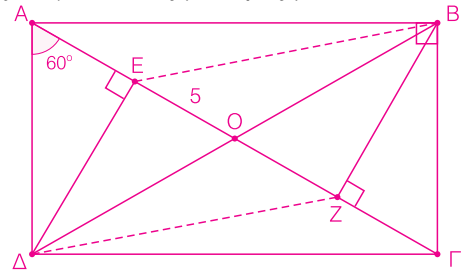
γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε  $\widehat{\Delta\hat{\Gamma}A} = 60^\circ$ , άρα  $\widehat{\Delta\hat{A}\Gamma} = 30^\circ$ .

$$\text{Στο ορθογώνιο } AB\Gamma\Delta \text{ είναι } A\Gamma = B\Delta \Leftrightarrow \frac{A\Gamma}{2} = \frac{B\Delta}{2} \Leftrightarrow \Gamma O = \Delta O.$$

Επομένως το τρίγωνο ΔΟΓ είναι ισοσκελές με βάση ΓΔ και  $\widehat{\Delta\hat{A}\Gamma} = 30^\circ$ , άρα  $\widehat{\Delta\hat{O}\Gamma} = 120^\circ$  και  $\widehat{\Delta\hat{O}A} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ .

Οπότε το τρίγωνο ΑΔΟ είναι ισόπλευρο και η ΔΕ είναι ύψος άρα και διάμεσος. Το σημείο Ε είναι το μέσο του τμήματος ΑΟ με  $AE = EO = 5$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ έχουμε  $\widehat{\Delta\hat{A}E} = 60^\circ$ , οπότε  $\widehat{A\hat{D}E} = 30^\circ$ , άρα η  $AE = \frac{A\Delta}{2} \Leftrightarrow A\Delta = 2AE \Leftrightarrow A\Delta = 10$ .



### 315 Θέμα 4 - 13851

α. Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι  $AB = \Gamma\Delta$ , ενώ έχουμε ότι  $\Gamma\Delta = \Gamma E$ , άρα  $AB = \Gamma E$ . Είναι  $AB // \Gamma\Delta$  άρα και  $AB // \Gamma E$ . Το τετράπλευρο ΑΓΕΒ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει δύο απέναντι πλευρές του, τις ΑΒ και ΓΕ παράλληλες και ίσες.

β. Στο παραλληλόγραμμο ΑΓΕΒ έχουμε  $A\Gamma = BE$  και στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχουμε  $A\Gamma = B\Delta$ .

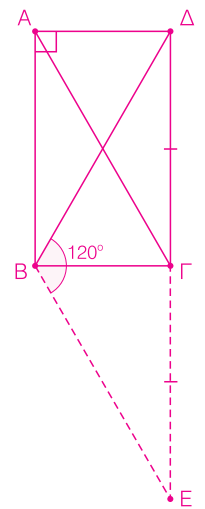
Άρα  $BE = B\Delta$  δηλαδή το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.

γ. • Το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές με βάση τη ΔΕ, οπότε  $B\Delta = BE$  και  $\widehat{B\hat{\Delta}E} = \widehat{B\hat{E}\Delta} = 30^\circ$  αφού  $\widehat{E\hat{B}\Delta} = 120^\circ$ .

• Το ΑΓΕΒ είναι παραλληλόγραμμο άρα  $A\Gamma // BE$  συνεπώς  $\widehat{B\hat{E}\Gamma} = \widehat{A\hat{\Gamma}\Delta} = 30^\circ$ , ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

• Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε  $\widehat{A\hat{\Gamma}\Delta} = 30^\circ$  άρα

$$A\Delta = \frac{A\Gamma}{2} \Leftrightarrow A\Delta = \frac{B\Delta}{2} \Leftrightarrow B\Delta = 2A\Delta.$$



### 316 Θέμα 4 - 13853

α. Είναι  $\widehat{\Delta\hat{A}B} = \widehat{A\hat{B}\Gamma}$ , ως εντός και εναλλάξ.

Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο, επομένως  $\widehat{\Delta\hat{A}B} = 60^\circ$  άρα  $\widehat{A\hat{B}\Gamma} = 60^\circ$ .

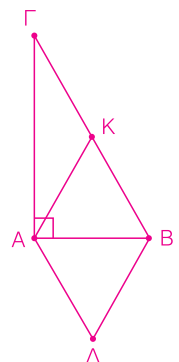
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι  $\widehat{A\hat{\Gamma}B} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ .

β. Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο, άρα  $AB = A\Delta = B\Delta = \frac{12}{3} = 4$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία  $\widehat{\Gamma} = \widehat{A\hat{\Gamma}B} = 30^\circ$ , επομένως  $AB = \frac{B\Gamma}{2}$  άρα

$$B\Gamma = 2AB = 2 \cdot 4 = 8.$$

γ. Αν το ΑΔΒΚ του παρακάτω σχήματος είναι παραλληλόγραμμο τότε έχει τις απέναντι πλευρές του.





Άρα  $BK = AD$ . Είναι  $AD = AB$  και  $AB = \frac{BG}{2}$ .

Οπότε  $BK = AD = AB = \frac{BG}{2}$ , δηλαδή το  $K$  είναι το μέσο της  $BG$ .

Η  $AK$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου  $ABG$ , άρα  $AK = \frac{BG}{2}$ .

Είναι  $BD = AB$  και  $AB = \frac{BG}{2}$ . Άρα  $BD = \frac{BG}{2}$ , οπότε  $BD = AK$ .

Άρα, αν  $K$  μέσο της  $BG$  τότε ότι  $AD = BK$  και  $BD = AK$ , δηλαδή το  $ADBK$  είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον, εφόσον  $AD = BD$  το παραλληλόγραμμο  $ADBK$  έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, επομένως είναι ρόμβος.

### 317 Θέμα 4 - 1796

**α.** Οι ακτίνες στα σημεία επαφής είναι κάθετες στις εφαπτόμενες, άρα  $KA \perp OA$  και  $KB \perp OB$ .

Στα ορθογώνια τρίγωνα  $AOK$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και  $BOK$  ( $\hat{B} = 90^\circ$ ) οι  $AE$ ,  $BE$  είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε  $AE = \frac{OK}{2}$  και  $BE = \frac{OK}{2}$ . Άρα  $AE = BE$ .

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $OAK$  είναι  $AK = \rho = EK = \frac{OK}{2}$ , οπότε  $\hat{AOK} = 30^\circ$ .

**γ.** Είναι  $AE = \frac{OK}{2}$  και  $AK = \frac{OK}{2}$  άρα  $AE = AK$ .

Οπότε  $AE = AK = KB = BE$ , άρα το  $AKBE$  είναι ρόμβος.

### 318 Θέμα 4 - 1811

**α.** Οι  $BD$ ,  $AD$  είναι οι διχοτόμοι των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών  $\hat{BAG}$  και  $\hat{ABE}$ , οπότε

$$\hat{BAD} + \hat{ABD} = \frac{\hat{BAG}}{2} + \frac{\hat{ABE}}{2} = \frac{\hat{BAG} + \hat{ABE}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

Στο τρίγωνο  $ABD$  είναι  $\hat{BAD} + \hat{ABD} + \hat{BDA} = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + \hat{BDA} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{BDA} = 90^\circ$

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $DAB$  ( $\hat{D} = 90^\circ$ ) η  $DM$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε

$$DM = \frac{AB}{2} = AM.$$

Άρα  $\hat{MDA} = \hat{MAD}$  (1). Στο τρίγωνο  $MAA$  η γωνία  $\hat{BMA}$  είναι εξωτερική, οπότε

$$\hat{BMA} = \hat{MDA} + \hat{MAD} \stackrel{(1)}{=} 2\hat{MDA}.$$

**γ.** Έχουμε  $\hat{GAD} = \hat{MAD} \stackrel{(1)}{=} \hat{MDA}$ , οπότε οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες, άρα  $MD \parallel \varepsilon$ .

### 319 Θέμα 4 - 37085

**α. i.** Στα ορθογώνια τρίγωνα  $DBG$  και  $EBG$  τα  $DM$ ,  $EM$  είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε

$$DM = \frac{BG}{2} \text{ και } EM = \frac{BG}{2}. \text{ Άρα } MD = ME.$$

**ii.** Επειδή το  $H$  είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου  $ABG$  έχουμε  $AH \perp BG$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $AHD$  είναι  $\hat{AHD} + \hat{HAD} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{AHD} = 90^\circ - \hat{HAD}$ , (1).

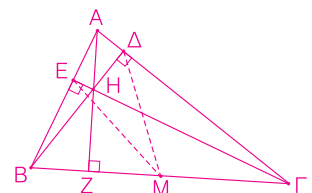
Έστω  $Z$  το σημείο τομής της  $AH$  με τη  $BG$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $AZG$  είναι

$$\hat{G} + \hat{ZAG} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{G} = 90^\circ - \hat{ZAG} \Leftrightarrow \hat{G} = 90^\circ - \hat{HAD} \text{ (2)}.$$

Από τις (1), (2) έχουμε  $\hat{AHD} = \hat{G}$ .

2<sup>ος</sup> τρόπος



Οι γωνίες  $\hat{A}\hat{H}\hat{\Delta}$  και  $\hat{\Gamma}$  είναι οξείες και έχουν πλευρές κάθετες, άρα  $\hat{A}\hat{H}\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ .

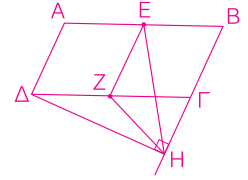
**β.** Στο τρίγωνο  $\hat{A}B\hat{H}$  το ύψος στην  $\hat{A}B$  είναι το  $\hat{H}E$  και το ύψος στην  $\hat{B}H$  είναι το  $\hat{A}\hat{\Delta}$ , οι φορείς των οποίων τέμνονται στο  $\hat{\Gamma}$ . Άρα το ορθόκεντρο του  $\hat{A}B\hat{H}$  είναι το  $\hat{\Gamma}$ .

**320 Θέμα 4 - 1759**

**α.** Είναι  $\hat{A}B \parallel \hat{\Gamma}\hat{\Delta}$ , οπότε  $\frac{\hat{A}E}{2} \parallel = \frac{\hat{\Delta}\hat{\Gamma}}{2}$ , άρα  $\hat{A}E \parallel = \hat{\Delta}Z$ , επομένως το  $\hat{A}E\hat{Z}\hat{\Delta}$ .

Είναι παραλληλόγραμμο.

Αφού επιπλέον  $\hat{A}\hat{\Delta} = \frac{\hat{A}B}{2} = \hat{A}E$ , το  $\hat{A}E\hat{Z}\hat{\Delta}$  είναι ρόμβος.



**β.** Επειδή το  $\hat{A}E\hat{Z}\hat{\Delta}$  είναι ρόμβος, έχουμε  $\hat{E}Z = \hat{A}\hat{\Delta} = \frac{\hat{A}B}{2} = \frac{\hat{\Gamma}\hat{\Delta}}{2}$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $\hat{\Delta}H\hat{\Gamma}$  ( $\hat{H} = 90^\circ$ ), η  $\hat{H}Z$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε  $\hat{H}Z = \frac{\hat{\Gamma}\hat{\Delta}}{2}$ .

Άρα  $\hat{E}Z = \hat{H}Z$ , οπότε το  $\hat{E}Z\hat{H}$  είναι ισοσκελές.

**γ.** Επειδή  $\hat{E}Z = \hat{H}Z$ , έχουμε  $\hat{Z}\hat{H}\hat{E} = \hat{Z}\hat{E}\hat{H}$ . Αφού  $\hat{E}Z \parallel \hat{B}\hat{\Gamma}$ , είναι  $\hat{Z}\hat{E}\hat{H} = \hat{E}\hat{H}\hat{B}$  ως εντός εναλλάξ.

Άρα  $\hat{Z}\hat{H}\hat{E} = \hat{E}\hat{H}\hat{B}$ , οπότε η  $\hat{H}E$  είναι η διχοτόμος της  $\hat{Z}\hat{H}\hat{\Gamma}$ .

**321 Θέμα 4 - 1787**

**α.** Είναι  $\hat{\Delta}M = \frac{\hat{\Delta}\hat{\Gamma}}{2} = \frac{\hat{A}B}{2} = \hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{\Delta}$ , οπότε  $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{M} = \hat{\Delta}\hat{M}\hat{A}$ .

Επειδή  $\hat{A}B \parallel \hat{\Gamma}\hat{\Delta}$ , είναι  $\hat{\Delta}\hat{M}\hat{A} = \hat{M}\hat{A}\hat{B}$ , ως εντός εναλλάξ.

Άρα  $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{M} = \hat{M}\hat{A}\hat{B}$ , οπότε η  $\hat{A}M$  είναι η διχοτόμος της  $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{B}$ .

**β.** Τα  $\hat{M}\hat{\Delta}\hat{E}$  και  $\hat{M}\hat{\Gamma}\hat{H}$  έχουν:

- $\hat{M}\hat{\Delta} = \hat{M}\hat{\Gamma}$
- $\hat{\Delta}\hat{M}\hat{E} = \hat{H}\hat{M}\hat{\Gamma}$
- $\hat{E}\hat{\Delta}\hat{M} = \hat{M}\hat{\Gamma}\hat{H}$ , ως εντός εναλλάξ.

Άρα είναι ίσα (ΓΠΓ), οπότε  $\hat{M}\hat{E} = \hat{M}\hat{H}$ .

Επομένως το  $\hat{M}$  είναι το κοινό μέσο των  $\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$  και  $\hat{E}\hat{H}$ .

**γ.** Το  $\hat{E}\hat{A}\hat{H}$  είναι ορθογώνιο ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και η  $\hat{A}M$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε

$$\hat{A}M = \frac{\hat{H}\hat{E}}{2} = \hat{M}\hat{E}.$$

Άρα  $\hat{E} = \hat{E}\hat{A}\hat{M}$ . και αφού  $\hat{E}\hat{A}\hat{M} = \hat{\Delta}\hat{M}\hat{A}$  έχουμε  $\hat{E} = \hat{\Delta}\hat{M}\hat{A}$ .

**322 Θέμα 4 - 37159**

**α.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{B}$  η  $\hat{\Delta}M$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε  $\hat{\Delta}M = \frac{\hat{A}B}{2} = \hat{M}\hat{B}$ .

Επομένως το  $\hat{\Delta}M\hat{B}$  είναι ισοσκελές, άρα  $\hat{B} = \hat{M}\hat{\Delta}\hat{B}$ .

Είναι  $\hat{M}\hat{\Delta}\hat{B} = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{E}$  ως κατακορυφήν και  $\hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{E} = \hat{E}$ , αφού  $\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}\hat{E}$ .

Άρα  $\hat{B} = \hat{E}$ .

**β. •** Η γωνία  $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B}$  είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου  $\hat{\Gamma}\hat{E}\hat{\Delta}$ , οπότε  $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} = \hat{E} + \hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{E} = 2\hat{E} \stackrel{\alpha.}{=} 2\hat{B}$

• Η γωνία  $\widehat{AM\Delta}$  είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου  $M\Delta B$ , οπότε  $\widehat{AM\Delta} = \widehat{B} + \widehat{M\Delta B} = 2\widehat{B}$ .  
Άρα  $\widehat{\Gamma} = 2\widehat{B} = \widehat{AM\Delta}$

γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $A\Gamma\Delta$  είναι  $\Gamma\Delta < A\Gamma$  είναι  $\Gamma\Delta = \Gamma E$ , οπότε  $\Gamma E < A\Gamma$ .

### 323 Θέμα 4 - 37136

α. Το  $O$  είναι μέσο της  $A\Gamma$ , οπότε στο  $\widehat{A\Gamma E}$  η  $EO$  είναι διάμεσος και ύψος.  
Επομένως το τρίγωνο  $A\Gamma E$  είναι ισοσκελές.

β. Είναι  $B\Gamma // = A\Delta$ , οπότε  $B\Gamma // = \Delta E$ .

Επομένως το  $B\Gamma E\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $OAE$  ( $\widehat{O} = 90^\circ$ ), η  $OD$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε

$$OD = \frac{AE}{2} = \Delta A, \quad (1).$$

Επειδή  $OD = OB$  και  $\Delta A = B\Gamma$ , από την (1) έχουμε  $OB = B\Gamma$ .

Οπότε το  $\widehat{BO\Gamma}$  είναι ισοσκελές.

### 324 Θέμα 4 - 14881

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $KBM$ , η  $KN$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε

$$KN = \frac{MB}{2} = NM.$$

Άρα  $\widehat{NKM} = \widehat{NMK}$ .

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\widehat{A} = 90^\circ$ ) η  $AM$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα,

$$\text{οπότε } AM = \frac{B\Gamma}{2} = MB.$$

Άρα το  $MAB$  είναι ισοσκελές και επειδή το  $MK$  είναι ύψος θα είναι και η διχοτόμος της  $N\widehat{M\Delta}$ .

$$\gamma. \text{ Έχουμε } KN = \frac{MB}{2}.$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $LM\Gamma$ , η  $LP$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα  $LP = \frac{M\Gamma}{2}$ .

$$\text{Οπότε } KN + LP = \frac{MB + M\Gamma}{2} = \frac{B\Gamma}{2} = AM.$$

### 325 Θέμα 4 - 37158

α. • Στο τρίγωνο  $B\Delta K$  είναι  $\Delta K = KB$ , οπότε  $\widehat{B} = \widehat{B\Delta K}$  και η γωνία  $\widehat{\Delta K\Lambda}$  είναι εξωτερική,  
άρα  $\widehat{\Delta K\Lambda} = \widehat{B} + \widehat{B\Delta K} = 2\widehat{B}$ .

• Στο τρίγωνο  $E\Lambda\Gamma$  είναι  $E\Lambda = \Lambda\Gamma$ , οπότε  $\widehat{\Lambda E\Gamma} = \widehat{\Gamma}$  και η γωνία  $\widehat{E\Lambda K}$  είναι εξωτερική, άρα  
 $\widehat{E\Lambda K} = \widehat{\Gamma} + \widehat{\Lambda E\Gamma} = 2\widehat{\Gamma}$ .

β. Στο  $\widehat{A\Delta\Gamma}$  τα  $\Delta, E$  είναι τα μέσα των  $AB, A\Gamma$ , οπότε  $\Delta E // B\Gamma$ , άρα  $\Delta E // K\Lambda$  (1) και  $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$ .

$$\text{Είναι } \widehat{\Delta K\Lambda} + \widehat{E\Lambda K} = 2\widehat{B} + 2\widehat{\Gamma} = 2(\widehat{B} + \widehat{\Gamma}) = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ.$$

Επειδή οι  $\widehat{\Delta K\Lambda}, \widehat{E\Lambda K}$  είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των  $K\Delta, E\Lambda$  που τέμνονται από την  $K\Lambda$  και είναι παραπληρωματικές, έχουμε  $\Delta K // E\Lambda$  (2).

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι το  $\Delta E\Lambda K$  είναι παραλληλόγραμμο.

Είναι: •  $KB = K\Delta = E\Lambda = \Lambda\Gamma$ .

$$\bullet \Delta E = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{BK + K\Lambda + \Lambda\Gamma}{2} = \frac{\Delta K + \Delta E + \Delta K}{2}$$

Οπότε  $2\Delta E = 2\Delta K + \Delta E \Leftrightarrow \Delta E = 2\Delta K$  .

**326 Θέμα 4 - 37133**

**α. i.** Επειδή  $M \in \mu_1$  , έχουμε  $MA = MB = \frac{B\Gamma}{2}$  .

Οπότε στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  η διάμεσος  $AM$  είναι το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με  $\hat{A} = 90^\circ$  .

**ii.** Στο  $A\Lambda M\K$  είναι  $\hat{K} = \hat{A} = \hat{\Lambda} = 90^\circ$  , οπότε είναι ορθογώνιο.

**iii.** Επειδή το  $A\Lambda M\K$  είναι ορθογώνιο, οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και είναι  $K\Lambda = AM$  .

$$\text{Οπότε } \Lambda\Theta = \frac{K\Lambda}{2} = \frac{AM}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$$

**β.** Στο  $\hat{A}B\Gamma$  τα  $K, \Lambda$  είναι τα μέσα των  $AB, A\Gamma$  , οπότε  $K\Lambda \parallel B\Gamma$  , άρα  $K\Theta \parallel B\Gamma$  .

Στο ορθογώνιο  $A\Lambda M\K$  είναι  $K\Theta = \Lambda\Theta = \frac{B\Gamma}{4} = B\Gamma$  .

Οπότε  $K\Theta \parallel B\Gamma$  , άρα το  $K\Theta I B$  είναι παραλληλόγραμμο.

**327 Θέμα 4 - 37075**

**α. i.** Επειδή  $O\Gamma = \Gamma\Delta = O\Delta$  , το  $\hat{O}\Gamma\Delta$  είναι ισόπλευρο, άρα  $\hat{O}\Delta\Gamma = 60^\circ$  .

**ii.** Επειδή το τρίγωνο  $O\Gamma\Delta$  είναι ισόπλευρο είναι  $O\hat{\Gamma}\Delta = O\hat{\Delta}\Gamma = 60^\circ$

• Στο τρίγωνο  $\Gamma O A$  είναι  $O\Gamma = A\Gamma$  , οπότε  $\hat{O}\Gamma A = \hat{A}$  και η γωνία  $O\hat{\Gamma}\Delta$  είναι εξωτερική, άρα  $O\hat{\Gamma}\Delta = \hat{A} + \hat{O}\Gamma A \Leftrightarrow 60^\circ = 2\hat{A} \Leftrightarrow \hat{A} = 30^\circ$

• Στο τρίγωνο  $B O \Delta$  είναι  $O\Delta = B\Delta$  , οπότε  $\Delta\hat{O}B = \hat{B}$  και η γωνία  $O\hat{\Delta}\Gamma$  είναι εξωτερική , άρα  $O\hat{\Delta}\Gamma = \hat{B} + \Delta\hat{O}B \Leftrightarrow 60^\circ = 2\hat{B} \Leftrightarrow \hat{B} = 30^\circ$  .

Άρα  $O\hat{A}\Gamma = O\hat{B}\Delta = 30^\circ$  .

**β.** Επειδή  $\hat{A} = \hat{B}$  το τρίγωνο  $OAB$  είναι ισοσκελές με  $OA = OB$  . Στο ισοσκελές τρίγωνο  $OAB$  η διάμεσος  $OM$  είναι και ύψος, άρα  $OM \perp AB$  . Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $MOA$  ( $\hat{M} = 90^\circ$ ) είναι  $\hat{A} = 30^\circ$  , οπότε

$$OM = \frac{OA}{2} \Leftrightarrow 2OM = OA$$

**328 Θέμα 4 - 1806**

**α.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) η  $AM$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα.

Οπότε  $AM = \frac{B\Gamma}{2} = MB$  , άρα  $\hat{B} = \hat{BAM}$  .

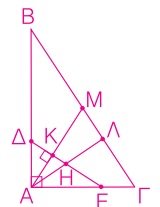
**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $A\Delta E$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) , η  $AH$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα.

Οπότε  $AH = \frac{\Delta E}{2} = H\Delta$  , άρα  $A\hat{\Delta}H = \Delta\hat{A}H$  .

**γ.** Έστω ότι η  $AH$  τέμνει την  $B\Gamma$  στο  $\Lambda$  .

Στο τρίγωνο  $AB\Lambda$  είναι  $B\hat{A}\Lambda + \hat{B} = \Delta\hat{A}H + B\hat{A}M = A\hat{\Delta}K + \Delta\hat{A}K = 90^\circ$  , αφού το τρίγωνο  $K\Lambda\Delta$  είναι ορθογώνιο.

Άρα  $B\hat{\Lambda}A = 90^\circ$  , οπότε  $AH \perp B\Gamma$  .



**329 Θέμα 4 - 37082**

**α. i.** Είναι  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 3\hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 60^\circ$ .

$$\text{Οπότε } \hat{A}\hat{B}\hat{Z} = \frac{\hat{B}}{2} = 30^\circ$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι  $\hat{B} + \hat{B}\hat{A}\hat{\Delta} = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \hat{B}\hat{A}\hat{Z} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B}\hat{A}\hat{Z} = 30^\circ$ .

Επειδή  $\hat{A}\hat{B}\hat{Z} = \hat{B}\hat{A}\hat{Z}$ , το  $\hat{Z}\hat{A}\hat{B}$  είναι ισοσκελές με  $AZ = BZ$ .

**ii.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $\Delta BZ$  ( $\hat{\Delta} = 90^\circ$ ) είναι  $\hat{Z}\hat{B}\hat{\Delta} = 30^\circ$ ,

$$\text{οπότε } Z\Delta = \frac{BZ}{2} \Leftrightarrow A\Delta - AZ = \frac{BZ}{2} \Leftrightarrow A\Delta - BZ = \frac{BZ}{2} \Leftrightarrow 2A\Delta - 2BZ = BZ \Leftrightarrow 2A\Delta = 3BZ \Leftrightarrow A\Delta = \frac{3}{2}BZ$$

**β.** Επειδή το  $\hat{A}\hat{Z}\hat{E}$  είναι ισόπλευρο, έχουμε  $\hat{Z}\hat{A}\hat{E} = 60^\circ$ , οπότε:

$$\bullet \hat{A} = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$$

$$\bullet \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 60^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$$

### 330 Θέμα 4 - 14879

**α. i.** Στα ορθογώνια τρίγωνα  $EAB$  και  $EAD$  ( $\hat{E} = 90^\circ$ ), οι  $EK$  και  $EL$  είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα.

$$\text{Οπότε } EK = \frac{AB}{2} = AK \text{ και } EL = \frac{AD}{2} = AL.$$

Άρα τα τρίγωνα  $KEA$  και  $LEA$  είναι ισοσκελή, οπότε  $\hat{A}\hat{E}\hat{K} = \hat{E}\hat{A}\hat{K}$  και  $\hat{L}\hat{E}\hat{A} = \hat{E}\hat{A}\hat{L}$ .

Είναι  $\hat{K}\hat{E}\hat{L} = \hat{K}\hat{E}\hat{A} + \hat{L}\hat{E}\hat{A} = \hat{E}\hat{A}\hat{K} + \hat{E}\hat{A}\hat{L} = \hat{K}\hat{A}\hat{L} = 90^\circ$ .

**ii.** Στο  $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta}$  τα  $K, L$  είναι τα μέσα των  $AB, AD$ , οπότε  $KL = \frac{BD}{2}$ . Επειδή το  $AB\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνιο έχουμε

$$BD = A\Gamma, \text{ οπότε } KL = \frac{A\Gamma}{2}.$$

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $BA\Gamma$  ( $\hat{B} = 90^\circ$ ) έχουμε  $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 30^\circ$ , οπότε  $B\Gamma = \frac{A\Gamma}{2} \stackrel{\text{α.ii.}}{=} KL$ .

### 331 Θέμα 4 - 37138

**α.** Είναι:  $\bullet \Delta A = \Delta B$ , αφού το τρίγωνο  $\Delta AB$  είναι ισοσκελές

$\bullet \Gamma A = \Gamma B$ , αφού το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισόπλευρο

Άρα η  $\Delta\Gamma$  είναι η μεσοκάθετος του  $AB$ .

**β.** Επειδή η  $\Gamma\Delta$  είναι μεσοκάθετος του  $AB$ , θα είναι και διχοτόμος των γωνιών  $\hat{\Delta}$  και  $\hat{\Gamma}$ , δηλαδή  $A\hat{\Delta}\Theta = \Theta\hat{\Delta}B = 60^\circ$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $A\Theta\Delta$  η  $\Theta Z$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα  $\Theta Z = \frac{A\Delta}{2} = ZA$ .

$$\text{Οπότε } Z\hat{\Theta}\hat{\Delta} = A\hat{\Delta}\hat{\Theta} = 60^\circ.$$

Στο  $A\Theta\Gamma$ , είναι:  $A\hat{\Gamma}\hat{\Theta} + \Theta\hat{A}\hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow A\hat{\Gamma}\hat{\Theta} + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow A\hat{\Gamma}\hat{\Theta} = 30^\circ$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $A\Theta\Gamma$  η  $\Theta H$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα  $\Theta H = \frac{A\Gamma}{2} = H\Gamma$ .

$$\text{Οπότε } H\hat{\Theta}\hat{\Gamma} = A\hat{\Gamma}\hat{\Theta} = 30^\circ.$$

$$\text{Είναι } Z\hat{\Theta}\hat{\Delta} + Z\hat{\Theta}\hat{H} + H\hat{\Theta}\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + Z\hat{\Theta}\hat{H} + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow Z\hat{\Theta}\hat{H} = 90^\circ.$$

#### 2<sup>ος</sup> τρόπος

$\bullet$  Στο ισοσκελές τρίγωνο  $\Delta AB$  έχουμε  $\hat{\Delta} = 120^\circ$ , οπότε  $\hat{\Delta}\hat{B}\hat{A} = 30^\circ$ , άρα  $\hat{\Delta}\hat{B}\hat{\Gamma} = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$ .

$\bullet$  Στο  $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{B}$ , τα  $Z, \Theta$  είναι τα μέσα των  $A\Delta, AB$ , οπότε  $Z\Theta \parallel B\Delta$

$\bullet$  Στο  $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ , τα  $\Theta, H$  είναι τα μέσα των  $AB, A\Gamma$ , οπότε  $\Theta H \parallel B\Gamma$

Επειδή  $\Delta B \perp B\Gamma$  είναι και  $Z\Theta \perp \Theta H$ , οπότε  $\widehat{Z\Theta H} = 90^\circ$ .

**γ.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $A\Theta\Delta$  είναι  $\widehat{\Theta\Delta A} + \widehat{\Delta\hat{A}\Theta} = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \widehat{\Delta\hat{A}\Theta} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Delta\hat{A}\Theta} = 30^\circ$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $KAZ$  ( $\widehat{K} = 90^\circ$ ), είναι  $\widehat{A} = 30^\circ$ , οπότε

$$ZK = \frac{AZ}{2} = \frac{A\Delta}{4}.$$

### 332 Θέμα 4 - 37156

**α.** Επειδή το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $\widehat{A} = 120^\circ$ , έχουμε:

- $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$
- $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + \widehat{B} + \widehat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{B} = 60^\circ \Leftrightarrow \widehat{B} = 30^\circ$
- $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 30^\circ$
- $\widehat{B\hat{A}\Delta} = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$

Άρα  $\widehat{B} = \widehat{B\hat{A}\Delta}$ , οπότε το τρίγωνο  $A\Delta B$  είναι ισοσκελές.

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$  ( $\widehat{\Delta\hat{A}\Gamma} = 90^\circ$ ), έχουμε  $\widehat{\Gamma} = 30^\circ$ , οπότε

$$A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2} \stackrel{\alpha.}{\Leftrightarrow} B\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow \Gamma\Delta = 2B\Delta$$

**γ.** Είναι  $\Delta\Gamma = 2\Delta B \Leftrightarrow 2\Delta K = 2\Delta B \Leftrightarrow \Delta K = \Delta B$ .

Στο  $\widehat{ABK}$  τα  $\Lambda, \Delta$  είναι τα μέσα των  $AB, BK$ , οπότε  $\Lambda\Delta \parallel AK$ .

**δ.** Από το **γ.** ερώτημα είναι και  $\Lambda\Delta = \frac{AK}{2} \Leftrightarrow AK = 2\Lambda\Delta$ .

### 333 Θέμα 4 - 1872

**α.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\widehat{A} = 90^\circ$ ) έχουμε  $\widehat{B} = 60^\circ$  και

$$\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 30^\circ$$

Είναι  $\widehat{\Gamma B Z} = \frac{\widehat{B}}{2} = 30^\circ$ , οπότε  $\widehat{\Gamma B Z} = \widehat{\Gamma}$ , άρα το τρίγωνο  $BZ\Gamma$  είναι ισοσκελές.

**β. •** Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $ABZ$  ( $\widehat{A} = 90^\circ$ ) είναι  $\widehat{ZBA} = \frac{\widehat{B}}{2} = 30^\circ$  και  $AM$  η διάμεσος προς την

υποτείνουσα, οπότε  $AZ = \frac{BZ}{2}$  και  $AM = \frac{BZ}{2}$ .

Άρα  $AM = AZ$ .

• Στο  $\widehat{B\hat{I}Z}$  τα  $K, M$  είναι τα μέσα των  $B\Gamma, BZ$ , οπότε  $KM \parallel \Gamma Z$  και

$$KM = \frac{\Gamma Z}{2} \stackrel{\alpha.}{=} \frac{BZ}{2} = AZ$$

Άρα  $KM \parallel AZ$ , οπότε το  $AMKZ$  είναι παραλληλόγραμμο και επειδή  $AM = AZ$ , είναι ρόμβος.

**γ.** Στο **β.** ερώτημα έχουμε  $KM = \frac{\Gamma Z}{2} \Leftrightarrow ZA = \frac{\Gamma Z}{2} \Leftrightarrow \Gamma Z = 2ZA$ .

**δ.** Τα ορθογώνια τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Lambda B\Gamma$  ( $\widehat{\Lambda} = 90^\circ$ ) έχουν:

- $B\Gamma$  κοινή
- $\widehat{B\hat{\Gamma}A} = \widehat{B\hat{\Gamma}\Lambda}$  ( $= 30^\circ$ )

Οπότε είναι ίσα, άρα  $B\Lambda = A\Gamma$ .

### 334 Θέμα 4 - 1721

**α.** Οι ακτίνες στα σημεία επαφής είναι κάθετες στην εφαπτόμενη, άρα  $KB \perp \varepsilon$  και  $ΛΓ \perp \varepsilon$ .  
Είναι  $\Delta\Gamma \perp B\Gamma$  και  $K\Delta // B\Gamma$ , οπότε  $K\Delta \perp \Gamma\Delta$ .

Άρα στο  $B\Gamma\Delta K$  είναι  $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ , οπότε είναι ορθογώνιο.

**β.** Επειδή το  $B\Gamma\Delta K$  είναι ορθογώνιο, έχουμε  $\Gamma\Delta = BK = \rho$ .

Είναι:   
 •  $\Lambda\Delta = \Lambda\Gamma - \Gamma\Delta = 3\rho - \rho = 2\rho$ .   
 •  $K\Lambda = K\Lambda + \Lambda\Lambda = \rho + 3\rho = 4\rho$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $\Delta K\Lambda$  ( $\hat{\Delta} = 90^\circ$ ) είναι  $\Lambda\Delta = 2\rho = \frac{4\rho}{2} = \frac{K\Lambda}{2}$ , οπότε  $\hat{\Delta K\Lambda} = 30^\circ$ .

**γ.** Επειδή  $K\Delta // B\Gamma$ , έχουμε  $\hat{E} = \hat{\Delta K\Lambda} = 30^\circ$ , ως εντός εκτός και επί τα αυτά.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $\Gamma E\Lambda$  ( $\hat{\Gamma} = 90^\circ$ ) είναι  $\hat{E} = 30^\circ$ , οπότε

$$\Gamma\Lambda = \frac{E\Lambda}{2} \Leftrightarrow 3\rho = \frac{E\Lambda}{2} \Leftrightarrow E\Lambda = 6\rho$$

**335 Θέμα 4 - 1761**

**α.** Είναι  $\hat{\Delta AK} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ .

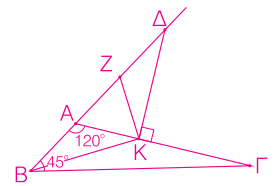
Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $K\Delta\Lambda$  είναι  $\Lambda\hat{\Delta K} + \Delta\hat{\Delta K} = 90^\circ \Leftrightarrow \Lambda\hat{\Delta K} + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \Lambda\hat{\Delta K} = 30^\circ$ .

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $K\Lambda\Delta$  ( $\hat{K} = 90^\circ$ ), είναι  $\hat{\Lambda} = 30^\circ$ , οπότε  $AK = \frac{A\Delta}{2} = \frac{2AB}{2} = AB$ .

Άρα το  $K\Lambda B$  είναι ισοσκελές.

**γ.** Το  $Z$  είναι το μέσο της  $A\Delta$ , οπότε  $AZ = \frac{A\Delta}{2} = AB$ .

Οπότε στο  $ZK\Lambda$  η  $K\Lambda$  είναι διάμεσος και  $K\Lambda = AB = \frac{BZ}{2}$ , άρα  $Z\hat{K}\Lambda = 90^\circ$ .



**δ.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $K\Lambda\Delta$ , η  $KZ$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα  $KZ = \frac{A\Delta}{2} = AK$

Τα ορθογώνια τρίγωνα  $K\Lambda\Delta$  και  $KZB$  έχουν:   
 •  $A\Delta = BZ$    
 •  $AK = KZ$

Άρα είναι ίσα, οπότε  $KB = K\Delta$ . Επομένως το  $K$  ανήκει στη μεσοκάθετο του  $B\Delta$ .

**336 Θέμα 4 - 37104**

**α. i.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) έχουμε  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ , οπότε  $AB = \frac{B\Gamma}{2} = BM$ .

Τα ορθογώνια τρίγωνα  $ABE$ ,  $MBE$  έχουν:   
 •  $AB = MB$    
 •  $BE$  κοινή

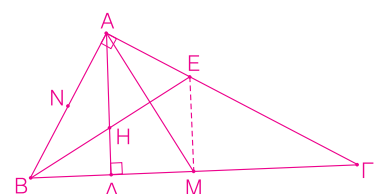
Οπότε είναι ίσα, επομένως  $\hat{ABE} = \hat{EBM}$ . Άρα η  $BE$  είναι η διχοτόμος της  $\hat{B}$ .

**ii.** Επειδή η  $BE$  είναι η διχοτόμος της  $\hat{B}$ , έχουμε  $AE = EM$ . Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $EM\Gamma$  ( $\hat{M} = 90^\circ$ ) είναι  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ , οπότε  $EM = \frac{\Gamma E}{2} \Leftrightarrow AE = \frac{\Gamma E}{2}$ .

**iii.** Επειδή  $BA = BM$  και  $EA = EM$ , η  $BE$  είναι η μεσοκάθετος του  $AM$ .

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) η  $AM$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε  $AM = \frac{B\Gamma}{2} = MB$ .

Επομένως το  $MAB$  είναι ισοσκελές με κορυφή  $M$ , άρα η διάμεσος  $MN$  είναι και ύψος.



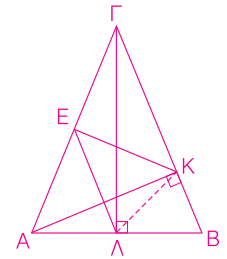
Αφού επιπλέον το  $H$  είναι το ορθόκεντρο του  $\triangle ABM$  το ύψος  $MN$  διέρχεται από το  $H$ , άρα τα  $M, H$  και  $N$  είναι συνευθειακά.

**337 Θέμα 4 - 1895**

**α.** Στα ορθογώνια τρίγωνα  $\triangle KAG$  ( $\widehat{K} = 90^\circ$ ) και  $\triangle LGA$  ( $\widehat{L} = 90^\circ$ ), οι  $KE, LE$  είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε  $KE = \frac{AG}{2}$  (2) και  $LE = \frac{AG}{2}$ .

Άρα  $KE = LE$ , οπότε το τρίγωνο  $\triangle KEL$  είναι ισοσκελές.

- β.** Είναι:
- $\widehat{LKE} = \widehat{KLE}$ , αφού  $KE = LE$
  - $L, E$  μέσα  $AB, AG$  οπότε  $EL \parallel BG$ , άρα  $\widehat{KLE} = \widehat{KLB}$ , ως εντός εναλλάξ.



Επομένως  $\widehat{LKE} = \widehat{KLB}$ . Άρα η  $KL$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{BKE}$ .

**338 Θέμα 4 - 37126**

**α. i.** Επειδή το σημείο  $A$  βρίσκεται στη μεσοκάθετο του  $EZ$ , έχουμε  $AE = AZ$ , οπότε  $\widehat{AEZ} = \widehat{AZE}$ .

Επομένως  $\widehat{AEB} = \widehat{AZD}$ , ως διαφορές ίσων γωνιών.

Τα τρίγωνα  $\triangle AEB$  και  $\triangle AZD$  έχουν  $\widehat{AEB} = \widehat{AZD}$  και  $\widehat{EBA} = \widehat{ZDA} = 45^\circ$ , οπότε έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες, δηλαδή  $\widehat{EAB} = \widehat{ZAD}$ .

- Τα τρίγωνα  $\triangle AEB$  και  $\triangle AZD$  έχουν:
- $AE = AZ$
  - $\widehat{AEB} = \widehat{AZD}$
  - $\widehat{EAB} = \widehat{ZAD}$

Άρα είναι ίσα (ΓΠΓ).

**ii.** Επειδή τα τρίγωνα  $\triangle EAB$  και  $\triangle ZAD$  είναι ίσα, έχουμε  $AB = AD$ .

Οι γωνίες πρόσκρουσης και ανάκλασης είναι  $45^\circ$ , οπότε

$$\widehat{ABE} = \widehat{BAG} = \widehat{BGD} = \widehat{DGH} = \widehat{HAG} = \widehat{AZD} = 45^\circ$$

$$\text{Άρα } \widehat{ABG} = \widehat{BGD} = \widehat{GDA} = 90^\circ.$$

Επομένως το τετράπλευρο  $ABGD$  είναι ορθογώνιο.

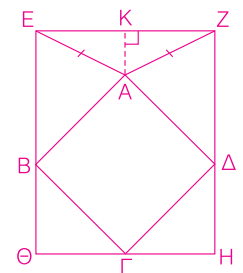
Το ορθογώνιο  $ABGD$  έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες, επομένως είναι τετράγωνο.

**β.** Έστω  $AK$  η απόσταση του  $A$  από την πλευρά  $EZ$ . Είναι  $AZ = 2AK \Leftrightarrow AK = \frac{AZ}{2}$ .

Άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο  $\triangle AKZ$  μια κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας, επομένως  $\widehat{AZK} = 30^\circ$ .

Επειδή  $AE = AZ$  έχουμε  $\widehat{AZK} = \widehat{AEZ} = 30^\circ$ .

$$\text{Στο τρίγωνο } \triangle AEZ, \text{ είναι } \widehat{EAZ} + \widehat{AEZ} + \widehat{AZK} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{EAZ} + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{EAZ} = 120^\circ$$



**339 Θέμα 4 - 1742**

**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα  $\triangle AZD$  και  $\triangle AEB$  έχουν:

- $AB = AD$ , ως πλευρές ρόμβου
- $\widehat{B} = \widehat{D}$ , ως απέναντι γωνίες ρόμβου

Άρα είναι ίσα, οπότε  $AZ = AE$ , επομένως το τρίγωνο  $\triangle ZAE$  είναι ισοσκελές.

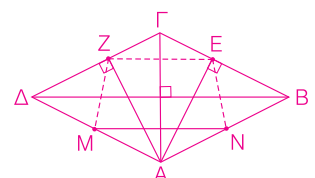
**β.** Επειδή τα  $\triangle ZAD$  και  $\triangle EAB$  είναι ίσα, έχουμε  $DZ = BE$ .

Οπότε και  $GZ = GE$ , αφού  $GD = GB$ .

Επειδή  $AZ = AE$  και  $GZ = GE$ , η  $AG$  είναι η μεσοκάθετος του  $ZE$ .

**γ.** Στο  $\triangle ABD$ , τα  $M, N$  είναι τα μέσα των  $AD, AB$ , οπότε  $MN \parallel BD$ .

Είναι: •  $ZE \perp AG$ , αφού η  $AG$  μεσοκάθετος του  $ZE$





- $BD \perp AG$  , ως διαγώνιοι του ρόμβου

Άρα έχουμε  $ZE \parallel BD$  , οπότε  $ZE \parallel MN$  .

Στα ορθογώνια τρίγωνα  $ZAD$  ( $\hat{Z} = 90^\circ$ ) ,  $EAB$  ( $\hat{E} = 90^\circ$ ) , οι  $ZM$  ,  $EN$  είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε

$$ZM = \frac{AD}{2} \text{ και } EN = \frac{AB}{2} .$$

Είναι  $AD = AB$  , οπότε  $ZM = EN$  .

### 340 Θέμα 4 - 1737

α. Στο  $\triangle ADH$  το  $AM$  είναι ύψος και διάμεσος, οπότε είναι ισοσκελές με βάση τη  $\Delta H$  , άρα  $AH = AD$  .

Όμοια το  $\triangle AEH$  είναι ισοσκελές, οπότε  $AH = AE$  . Άρα  $AH = AD = AE$  .

β. Το  $\triangle AMHN$  είναι ορθογώνιο, αφού έχει τρεις ορθές γωνίες, οπότε  $\hat{MHN} = 90^\circ$  , άρα το τρίγωνο  $\triangle EHD$  είναι ορθογώνιο.

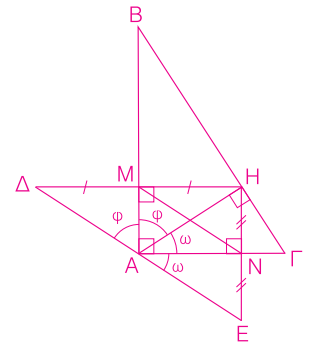
γ. Στα ισοσκελή τρίγωνα  $\triangle ADH$  και  $\triangle AHE$  οι  $AM$  ,  $AN$  είναι ύψη άρα και διχοτόμοι τους.

Οπότε  $\hat{DAM} = \hat{MAH} = \varphi$  και  $\hat{EAN} = \hat{HAN} = \omega$  .

Είναι  $\hat{DAE} = 2\varphi + 2\omega = 2(\varphi + \omega) = 2\hat{BAG} = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$  .

Άρα τα  $E$  ,  $A$  ,  $\Delta$  είναι συνευθειακά.

Στο τρίγωνο  $\triangle HE$  τα  $M$  ,  $N$  είναι μέσα των  $HD$  και  $HE$  οπότε  $MN = \frac{DE}{2}$  .



### 341 Θέμα 4 - 13522

α. Τα τρίγωνα  $\triangle AZD$  και  $\triangle AHD$  έχουν:

- $AD$  κοινή
- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$  , επειδή  $AD$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $A$ .
- $\hat{AZD} = \hat{AHD} = 90^\circ$

Τα ορθογώνια τρίγωνα  $\triangle AZD$  και  $\triangle AHD$  είναι ίσα, επειδή έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία.

β. Φέρνουμε τις  $\Delta B$  ,  $\Delta \Gamma$ . Επειδή το  $\Delta$  ανήκει στην μεσοκάθετο της  $B\Gamma$  θα ισαπέχει από τα  $B$  και  $\Gamma$  ,

άρα  $B\Gamma = \Gamma\Delta$  , (1).

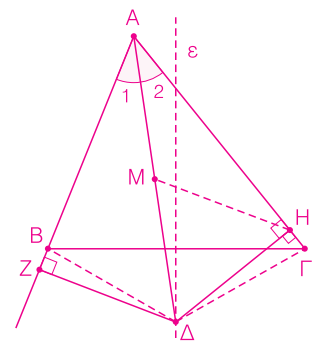
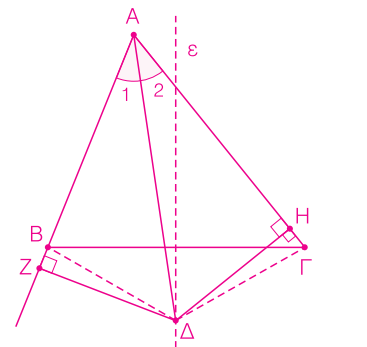
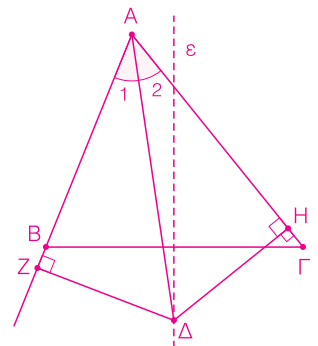
Τα τρίγωνα  $\triangle BZD$  και  $\triangle \Gamma HD$  έχουν:

- $\hat{AZD} = \hat{AHD} = 90^\circ$
- $B\Delta = \Gamma\Delta$
- $\Delta Z = HD$  , (2) επειδή είναι πλευρές των ίσων τριγώνων  $\triangle AZD$  και  $\triangle AHD$ , που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες  $\hat{A}_1$  ,  $\hat{A}_2$  αντίστοιχα.

Άρα είναι ίσα, οπότε  $ZB = H\Gamma$  .

γ. Είναι  $A = 60^\circ$  , οπότε  $A_2 = 30^\circ$  .

Στο ορθογώνιο  $\triangle ADH$  , η γωνία  $A_2 = 30^\circ$  , οπότε  $HD = \frac{AD}{2}$  (3).



Στο ορθογώνιο ΑΗΔ, η ΗΜ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε  $HM = \frac{AD}{2}$  (4).

Από (3) και (4) συμπεραίνουμε ότι  $HM = HD$  (5).

Από (5) και (2) έχουμε ότι  $HM = DZ$ .

### 342 Θέμα 4 - 13672

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, η ΑΔ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα ΒΓ, οπότε  $AD = DB = DG$ , και είναι  $\hat{B} = 90^\circ - \hat{\Gamma}$  (1)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΖΑΓ είναι  $\hat{\Gamma AZ} = 90^\circ - \hat{\Gamma}$  (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι  $\hat{\Gamma AZ} = \hat{B}$ .

Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με  $AD = DB$ , οπότε θα είναι  $\hat{\Delta AB} = \hat{B}$ .

Επομένως  $\hat{\Gamma AZ} = \hat{\Delta AB}$  (3).

β. Η ΑΗ είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$ , οπότε  $\hat{\Gamma AH} = \hat{HAB}$  (4).

Με αφαίρεση των σχέσεων (3) και (4) κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$\hat{\Gamma AH} - \hat{\Gamma AZ} = \hat{HAB} - \hat{\Delta AB} \Leftrightarrow \hat{ZAH} = \hat{HAD}$$
 (5).

Είναι,  $AZ \parallel \Delta E$  αφού είναι κάθετες στη ΒΓ, άρα,  $\hat{ZAH} = \hat{E}$  (6), ως εντός εναλλάξ.

Από τις (5) και (6) προκύπτει ότι  $\hat{HAD} = \hat{E}$ , οπότε στο τρίγωνο ΑΔΕ, είναι  $\Delta E = AD$ .

γ. Είναι  $\hat{\Gamma AZ} + \hat{ZAD} + \hat{\Delta AB} = \hat{A}$ , οπότε:

$$\hat{ZAD} = \hat{A} - \hat{\Gamma AZ} - \hat{\Delta AB} = 90^\circ - \hat{B} - \hat{B} = \hat{\Gamma} - \hat{B}$$
 αφού είναι

$$\hat{\Gamma AZ} = \hat{\Delta AB} = \hat{B} \text{ και } \hat{\Gamma} = 90^\circ - \hat{B}.$$

### 343 Θέμα 4 - 13855

α. Στο τρίγωνο ΑΒΓ το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ και  $DE \parallel AG$  άρα το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ. Οι γωνίες  $\hat{E\Delta\Gamma}$  και  $\hat{\Gamma}$  είναι εντός και επί τα αυτά άρα  $\hat{E\Delta\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 60^\circ$ .

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΔ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα  $AD = \frac{BG}{2} \Leftrightarrow AD = DG$  και  $\hat{B} = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 30^\circ$ .

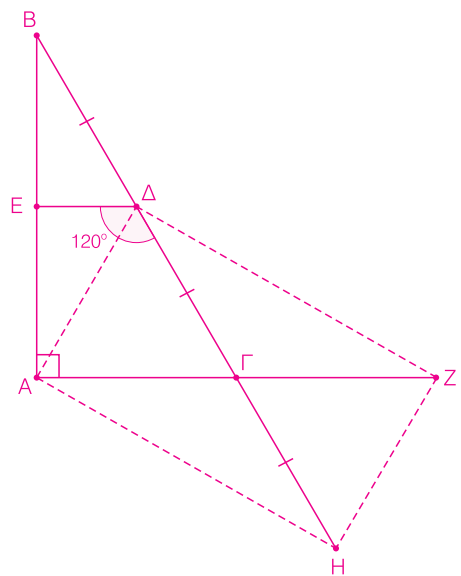
Οπότε  $AG = \frac{BG}{2} \Leftrightarrow AG = DG$ .

Επομένως το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισόπλευρο αφού  $AD = AG = DG$ .

γ. • Στο τετράπλευρο ΑΗΖΔ οι διαγώνιοι ΔΗ και ΑΖ διχοτομούνται στο Γ αφού  $DG = \frac{BG}{2} = GH$  και  $AG = GZ$ .

Άρα ΑΗΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

• Είναι  $AG = GD \Leftrightarrow 2AG = 2GD \Leftrightarrow AZ = DH$ , άρα το παραλληλόγραμμο ΑΗΖΔ είναι ορθογώνιο αφού έχει ίσες διαγώνιους, οπότε  $\hat{AHZ} = 90^\circ$ .



### 344 Θέμα 4 - 13540

**α. i.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  η  $GE$  είναι η διάμεσος προς την υποτείνουσα  $AB$ , οπότε  $GE = \frac{AB}{2}$  (1).

Στο τρίγωνο  $A\Gamma\Delta$  το τμήμα  $ZH$  ενώνει τα μέσα των πλευρών  $A\Gamma$  και  $A\Delta$ , άρα είναι

$$ZH = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow ZH = \frac{AB}{2} \quad (2).$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι  $GE = ZH$ .

**ii.** Το τρίγωνο  $AEG$  είναι ισοσκελές με  $AE = GE = \frac{AB}{2}$ , άρα είναι  $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$  (3).

Είναι  $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_2$  (4), ως εντός εναλλάξ γωνίες, οπότε  $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$ .

Άρα η  $GA$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\Delta\Gamma E$ .

**β.** Έχουμε  $\Delta H = \frac{AB}{4} \Leftrightarrow 2\Delta H = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow A\Delta = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = \frac{AB}{2}$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  η κάθετη πλευρά  $B\Gamma$  ισούται με το μισό της υποτείνουσας  $AB$ , οπότε  $\hat{A}_1 = 30^\circ$ , άρα  $\hat{B} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ .

Το τρίγωνο  $BGE$  είναι ισοσκελές με  $GE = EB = \frac{AB}{2}$ , άρα  $\hat{E}\hat{\Gamma}B = \hat{B} = 60^\circ$  και  $\hat{B}\hat{E}\hat{\Gamma} = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$ .

Άρα το τρίγωνο  $BGE$  είναι ισόπλευρο, γιατί έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες.

### 345 Θέμα 4 - 37142

**α. i.** Τα ορθογώνια τρίγωνα  $A\Delta B$  και  $AEG$  έχουν:

- $A\Delta = AE$
- $AB = A\Gamma$

Οπότε είναι ίσα.

**ii.** Στα ορθογώνια τρίγωνα  $A\Delta B$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και  $AEG$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ), οι  $AZ$ ,  $AH$  είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε  $AZ = \frac{B\Delta}{2}$  και  $AH = \frac{E\Gamma}{2}$ .

Επειδή τα  $\hat{A}\Delta B$ ,  $\hat{A}E\Gamma$  είναι ίσα έχουμε  $B\Delta = E\Gamma$ .

Οπότε  $AZ = AH$ , επομένως το  $\hat{Z}AH$  είναι ισοσκελές.

**iii.** Επειδή τα τρίγωνα  $A\Delta B$  και  $AEG$  είναι ίσα έχουν  $B\Delta = E\Gamma$  και  $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{E}$ .

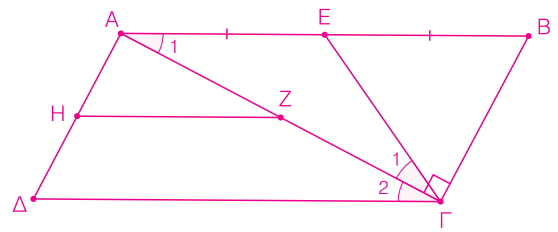
Τα τρίγωνα  $MBZ$  και  $GHM$  έχουν:

- $MB = M\Gamma$
- $BZ = H\Gamma$ , ως μισά των ίσων πλευρών  $\Delta B$  και  $E\Gamma$
- $\hat{Z}\hat{B}\hat{M} = \hat{M}\hat{\Gamma}\hat{H}$ , ως αθροίσματα ίσων γωνιών αφού  $\hat{B} = \hat{\Gamma}$  και  $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{E}$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε  $MZ = MH$ .

Επειδή  $AZ = AH$  και  $MZ = MH$  η  $AM$  είναι η μεσοκάθετος του  $ZH$ .

**β.** Το λάθος είναι ότι οι γωνίες  $\hat{A}\Delta B$  και  $\hat{E}\hat{A}\hat{\Gamma}$  δεν είναι κατακορυφήν, αφού το  $\hat{A}B\Gamma$  είναι οξυγώνιο οπότε οι πλευρές τους δεν είναι αντικείμενες ημιευθείες.



### 346 Θέμα 2 - 34408

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΗΒΓ είναι  $\hat{B} + \hat{H\Gamma B} = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \hat{H\Gamma B} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{H\Gamma B} = 30^\circ$ .

Οπότε  $HB = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{4\Gamma\Delta}{2} = 2\Gamma\Delta$ .

β. Το  $\Delta\Gamma\eta\alpha$  έχει  $\hat{\Delta} = \hat{A} = \hat{H} = 90^\circ$ , οπότε είναι ορθογώνιο, άρα  $\Gamma\Delta = \text{AH}$ .

Είναι  $HB = 2\Gamma\Delta \Leftrightarrow \Gamma\Delta = \frac{1}{2}HB \Leftrightarrow \text{AH} = \frac{1}{2}HB$ .

**347 Θέμα 2 - 1612**

α. Είναι  $\Pi_{\text{AB}\Gamma} = \text{AB} + \text{B}\Gamma + \Gamma\text{A} = 2 \cdot 9 + 30 + 2 \cdot 10 = 68$ .

β. Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Δ, Ε είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ, οπότε  $\Delta\text{E} \parallel \text{B}\Gamma$ , άρα το ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο.

γ. Από το β. ερώτημα είναι  $\Delta\text{E} = \frac{\text{B}\Gamma}{2} \Leftrightarrow x = \frac{30}{2} \Leftrightarrow x = 15$ .

**348 Θέμα 2 - 37011**

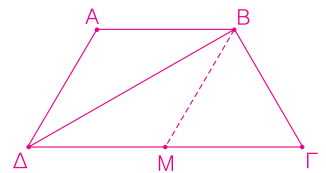
α. Επειδή  $\text{AB} = \text{A}\Delta$ , είναι  $\hat{\text{A}\text{B}\Delta} = \hat{\text{A}\Delta\text{B}}$ . Αφού  $\text{AB} \parallel \Gamma\Delta$ , είναι  $\hat{\text{A}\text{B}\Delta} = \hat{\text{B}\Delta\Gamma}$ , ως εντός εναλλάξ.

Άρα  $\hat{\text{A}\Delta\text{B}} = \hat{\text{B}\Delta\Gamma}$ , οπότε η ΔΒ είναι η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{\Delta}$ .

β. Επειδή  $\text{AB} \parallel \Delta\text{M}$ , το ΑΒΜΔ είναι παραλληλόγραμμο. Αφού επιπλέον είναι  $\text{AB} = \text{A}\Delta$ , έχουμε ότι το ΑΒΜΔ είναι ρόμβος.

- Είναι:
- $\text{BM} \parallel \text{A}\Delta$ , οπότε  $\hat{\text{B}\text{M}\Gamma} = \hat{\Delta} = 60^\circ$ , ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη
  - $\text{BM} = \text{M}\Delta \Leftrightarrow \text{BM} = \text{M}\Gamma$

Οπότε το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές με μια γωνία  $60^\circ$ , άρα είναι ισόπλευρο.

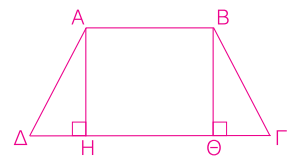


**349 Θέμα 2 - 37010**

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΗΑΔ και ΘΒΓ έχουν:

- $\text{A}\Delta = \text{B}\Gamma$
  - $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ , ως γωνίες προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τραπεζίου
- Οπότε είναι ίσα, άρα  $\text{A}\Delta = \text{B}\Gamma$ .

β. Η διάμεσος του τραπεζίου ΕΖ είναι:  $\text{EZ} = \frac{\text{AB} + \Gamma\Delta}{2} = \frac{8 + 12}{2} = 10$



**350 Θέμα 2 - 36106**

- α. Είναι:
- $\hat{A} = \hat{B} = 135^\circ$
  - $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 135^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 45^\circ$
  - $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$

β. Είναι  $\text{AE} = \text{BZ}$ , ως αποστάσεις των παράλληλων ΑΒ και ΓΔ.

Στα ορθογώνια τρίγωνα ΕΑΔ και ΖΒΓ είναι:

- $\hat{\Delta} + \hat{\Delta\text{A}\text{E}} = 90^\circ \Leftrightarrow 45^\circ + \hat{\Delta\text{A}\text{E}} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta\text{A}\text{E}} = 45^\circ$ , άρα  $\hat{\Delta} = \hat{\Delta\text{A}\text{E}}$
- $\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma\text{B}\text{Z}} = 90^\circ \Leftrightarrow 45^\circ + \hat{\Gamma\text{B}\text{Z}} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma\text{B}\text{Z}} = 45^\circ$ , άρα  $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma\text{B}\text{Z}}$

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΑΔ και ΖΒΓ είναι ισοσκελή, οπότε  $\Delta\text{E} = \text{A}\text{E}$  και  $\text{Z}\Gamma = \text{B}\text{Z}$ .

Άρα  $\text{A}\text{E} = \text{E}\Delta = \text{B}\text{Z} = \text{Z}\Gamma$ .

### 351 Θέμα 2 - 36166

α. Είναι: •  $EB = AB - AE = 3 - 1 = 2$

$$\bullet \text{ΚΛ} = \frac{\Gamma\Delta + EB}{2} = \frac{4 + 2}{2} = 3 .$$

β. Είναι  $\text{ΚΛ} // \text{EB}$ , οπότε  $\text{ΚΛ} // \text{AB}$  και  $\text{ΚΛ} = \text{AB} = 3$ , οπότε το  $\text{ΑΒΛΚ}$  είναι παραλληλόγραμμο.

### 352 Θέμα 2 - 13497

α. Είναι: •  $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$  (1), ως εντός εναλλάξ.

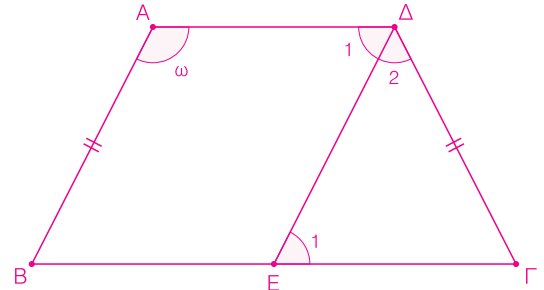
•  $\hat{\Delta}_2 = \hat{E}_1$  (2), ως γωνίες προσκείμενες στη βάση ΔΕ του ισοσκελούς τριγώνου ΔΓΕ.

Από (1) και (2) έχουμε ότι  $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ , άρα η ΔΕ είναι διχοτόμος της  $\hat{\text{ΑΔΓ}}$ .

β. Αν  $\hat{\text{Α}} = 120^\circ$ , τότε, επειδή το τραπέζιο  $\text{ΑΒΓΔ}$  είναι ισοσκελές, θα είναι  $\hat{\text{ΑΔΓ}} = 120^\circ$ .

Επειδή η ΔΕ είναι διχοτόμος της  $\hat{\text{ΑΔΓ}}$ , θα είναι  $\hat{\Delta}_2 = 60^\circ$  οπότε η (2)  $\Leftrightarrow \hat{E}_1 = 60^\circ$ .

Επομένως, το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ισόπλευρο, γιατί έχει δύο γωνίες  $60^\circ$ , οπότε και η τρίτη γωνία  $\hat{\Gamma}$  θα είναι  $60^\circ$ .



### 353 Θέμα 2 - 13824

α. Τα τρίγωνα ΓΕΖ και ΘΖΒ έχουν:

i.  $EZ = ZB$ ,

ii.  $\hat{ZEG} = \hat{ZB\Theta}$ , ως εντός αναλλάξ

iii.  $\hat{EZG} = \hat{\Theta ZB}$ , ως κατακορυφήν

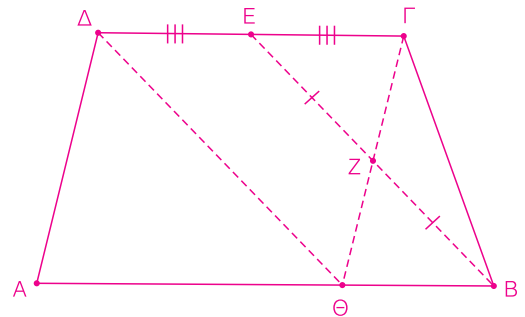
Άρα είναι ίσα (ΓΠΓ).

β. Από την ισότητα των τριγώνων ΓΕΖ και ΘΖΒ έχουμε ότι  $E\Gamma = \Theta B$ .

γ. Είναι: •  $\Delta E // B\Theta$  ως τμήματα των βάσεων ΓΔ και ΑΒ του τραπέζιου ΑΒΓΔ.

•  $E\Gamma = B\Theta$  και  $E\Gamma = \Delta E$ , άρα  $B\Theta = \Delta E$ .

Επομένως το τετράπλευρο ΕΒΘΔ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει δύο απέναντι πλευρές του, τις ΔΕ και ΘΒ, παράλληλες και ίσες.



### 354 Θέμα 2 - 36340

α. Επειδή το  $\text{ΑΒΓΔ}$  είναι ισοσκελές τραπέζιο έχουμε ότι  $\text{ΑΔ} = \text{ΒΓ}$ ,  $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ .

Τα τρίγωνα ΜΚΔ και ΜΛΓ έχουν:

•  $\text{ΜΔ} = \text{ΜΓ}$

•  $\Delta\text{Κ} = \text{ΓΛ}$ , ως μισά ίσων τμημάτων

•  $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε  $\text{ΚΜ} = \text{ΛΜ}$ .

β. Τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΜΒΓ έχουν:

•  $\text{ΜΔ} = \text{ΜΓ}$

•  $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$

•  $\text{ΑΔ} = \text{ΒΓ}$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε  $\text{ΑΜ} = \text{ΒΜ}$ .

**355 Θέμα 2 - 36112**

- α. Είναι:
- $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$
  - $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 120^\circ$
  - $\hat{A} = \hat{B} = 120^\circ$
- β. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ έχουν:
- $ΑΔ = ΒΓ$
  - $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$

Οπότε είναι ίσα.

γ. Το ΑΒΖΕ είναι ορθογώνιο, οπότε  $EZ = AB = 6$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΖΒΓ είναι  $\hat{\Gamma} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ .

Οπότε  $ZG = \frac{BG}{2} = 2$ .

Επειδή τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ είναι ίσα, έχουμε  $\Delta E = ZG = 2$ .

Οπότε  $\Gamma\Delta = \Delta E + EZ + ZG = 2 + 6 + 2 = 10$ .

Η περίμετρος του ΑΒΓΔ είναι  $\Pi_{ΑΒΓΔ} = AB + BG + \Gamma\Delta + \Delta A = 6 + 4 + 2 + 6 + 2 + 4 = 24$ .

**356 Θέμα 2 - 34509**

α. Επειδή το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο, έχουμε  $ΑΔ = ΒΓ$  και  $\hat{A} = \hat{B}$ .

- Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΒΓΕ έχουν:
- $ΑΔ = ΒΓ$
  - $ΑΖ = ΒΕ$
  - $\hat{A} = \hat{B}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), επομένως  $\Delta Z = \Gamma E$ .

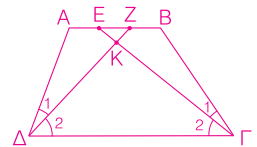
β. Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΒΓΕ είναι ίσα, έχουμε  $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_1$ .

Στο ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι  $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ , οπότε  $\hat{\Delta}_2 = \hat{\Gamma}_2$ .

Άρα το τρίγωνο ΚΓΔ είναι ισοσκελές, οπότε  $ΚΔ = ΚΓ$ .

Επειδή  $\Delta Z = \Gamma E$  και  $ΚΔ = ΚΓ$  είναι και  $ΚΖ = ΚΕ$ .

Οπότε το τρίγωνο ΚΖΕ είναι ισοσκελές.

**357 Θέμα 2 - 1563**

α. Επειδή το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο έχουμε  $ΑΔ = ΒΓ$  και  $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ .

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΑΔ και ΖΒΓ έχουν:

- $ΑΔ = ΒΓ$
- $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$

Οπότε είναι ίσα, άρα  $\Delta E = \Gamma Z$ .

β. Είναι  $AE \perp \Gamma\Delta$  και  $AB \parallel \Gamma\Delta$ , οπότε  $AE \perp AB$ , άρα  $\hat{EAB} = 90^\circ$ .

Στο τετράπλευρο ΑΒΖΕ είναι  $\hat{A} = \hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ$ , οπότε είναι ορθογώνιο.

Άρα  $AB = EZ$ .

**358 Θέμα 2 - 36337**

α. Στο τρίγωνο ΑΒΓ, τα Δ, Ζ είναι τα μέσα των ΒΑ, ΒΓ, οπότε  $\Delta Z \parallel \frac{ΑΓ}{2} \Rightarrow \Delta Z \parallel AE$ .

Επομένως το ΑΕΖΔ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή έχει  $\hat{A} = 90^\circ$  είναι ορθογώνιο.

**β.** Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$ , τα  $\Delta$ ,  $E$  είναι τα μέσα των  $AB$ ,  $A\Gamma$ , οπότε  $\Delta E \parallel B\Gamma$ .

Άρα το  $E\Delta B\Gamma$  είναι τραπέζιο και επειδή  $B\Delta = E\Gamma$ , ως μισά ίσων τμημάτων, είναι ισοσκελές τραπέζιο.

### 359 Θέμα 2 - 34392

**α.** Για να είναι τραπέζιο το  $B\Delta E\Gamma$ , αρκεί  $\Delta E \parallel B\Gamma$ .

Επειδή το  $\Delta$  είναι μέσο της  $AB$ , θα είναι το  $E$  το μέσο του  $A\Gamma$ .

**β.** Για να είναι το  $B\Delta E\Gamma$  ισοσκελές τραπέζιο, αρκεί  $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ , δηλαδή το τρίγωνο  $AB\Gamma$  να είναι ισοσκελές.

### 360 Θέμα 2 - 34385

**α.** Επειδή η  $E\Delta$  είναι η μεσοκάθετος του  $AB$ , έχουμε  $AE = BE$ .

**β.** Επειδή  $ZE \parallel B\Gamma$ , το  $B\Gamma EZ$  είναι τραπέζιο.

Αφού επιπλέον το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές, έχουμε  $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ , οπότε το  $B\Gamma EZ$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

### 361 Θέμα 2 - 34409

**α.** Είναι

$$MN = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow x + 4 = \frac{(3x + 2) + (x + 2)}{2} \Leftrightarrow 2x + 8 = 4x + 4 \Leftrightarrow -2x = -4 \Leftrightarrow x = 2$$

**β.** Έχουμε  $\hat{\Gamma} = 2\hat{B}$  και επειδή  $AB \parallel \Gamma\Delta$  είναι

$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} + 2\hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 3\hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 60^\circ.$$

Οπότε  $\hat{\Gamma} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$ .

Επειδή το  $AB\Gamma\Delta$  είναι ισοσκελές τραπέζιο έχουμε  $\hat{A} = \hat{B} = 60^\circ$  και  $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = 120^\circ$ .

### 362 Θέμα 2 - 34488

**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα  $E\Delta\Gamma$  και  $ZB\Gamma$  έχουν:  $A\Delta = B\Gamma$  και  $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ .

Οπότε είναι ίσα, άρα  $\Delta E = \Gamma Z$ .

**β.** Είναι  $AE \perp \Gamma\Delta$  και  $AB \parallel \Gamma\Delta$ , οπότε  $AE \perp AB$ , άρα  $\hat{E\hat{A}B} = 90^\circ$ .

Στο τετράπλευρο  $ABZE$  είναι  $\hat{A} = \hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ$ .

Οπότε είναι ορθογώνιο.

### 363 Θέμα 4 - 34506

Επειδή  $AB \parallel \Gamma\Delta$  είναι  $\hat{A\hat{B}\hat{\Gamma}} = 180^\circ - \hat{\Gamma} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$ .

Οπότε  $\hat{A\hat{B}\hat{\Delta}} = \hat{A\hat{B}\hat{\Gamma}} - \hat{\Delta\hat{B}\hat{\Gamma}} = 70^\circ - 30^\circ = 40^\circ$ . Αφού  $\Delta A = \Delta B$ , το τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι ισοσκελές, οπότε  $\hat{A} = \hat{A\hat{B}\hat{\Delta}} = 40^\circ$ .

Στο τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι  $\hat{A\hat{\Delta}\hat{B}} + \hat{A} + \hat{A\hat{B}\hat{\Delta}} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A\hat{\Delta}\hat{B}} + 40^\circ + 40^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A\hat{\Delta}\hat{B}} = 100^\circ$ .

### 364 Θέμα 4 - 36172

**α.** Το τρίγωνο  $B\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $B\Delta = B\Gamma$ , άρα  $\hat{B\hat{\Delta}\hat{\Gamma}} = \hat{\Gamma}$ .

Στο τρίγωνο  $B\Delta\Gamma$  έχουμε

$$\hat{B\hat{\Delta}\hat{\Gamma}} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta\hat{B}\hat{\Gamma}} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} + 110^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} = 70^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 35^\circ$$

**β.** Είναι  $\hat{B\hat{\Delta}\hat{\Gamma}} = \hat{\Gamma} = 35^\circ$  οπότε  $\hat{A\hat{\Delta}\hat{\Gamma}} = \hat{A\hat{\Delta}\hat{B}} + \hat{B\hat{\Delta}\hat{\Gamma}} = 25^\circ + 35^\circ = 60^\circ$ .

Οι γωνίες  $\hat{A}$  και  $\hat{A\hat{\Delta}\hat{\Gamma}}$  είναι εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  που τέμνονται από την  $A\Delta$  και είναι παραπληρωματικές, οπότε  $\hat{A} + \hat{A\hat{\Delta}\hat{\Gamma}} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 120^\circ$

**365 Θέμα 4 - 13539**

**α.** Αφού τα τμήματα  $ΑΓ$ ,  $ΑΕ$  να τριχοτομούν τη γωνία  $\hat{A} = 108^\circ$ , θα είναι

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{A}_3 = \frac{\hat{A}}{3} = \frac{108^\circ}{3} = 36^\circ.$$

Οι γωνίες  $\hat{A}$  και  $\hat{\Delta}$  του τραpezίου είναι παραπληρωματικές, άρα

$$\hat{\Delta} = 180^\circ - \hat{A} = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ.$$

Είναι  $\hat{E}_1 = \hat{BAE}$ , ως εντός εναλλάξ, άρα

$$\hat{E}_1 = \hat{BAE} = \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ.$$

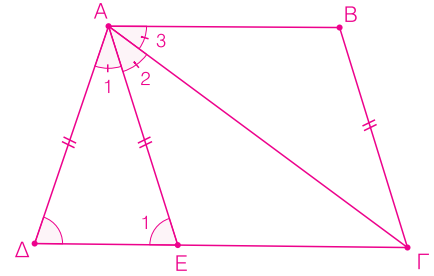
**β. i.** Από το ερώτημα **α.** έχουμε ότι  $\hat{\Delta} = \hat{E}_1 = 72^\circ$  (1), οπότε το τρίγωνο  $ΑΔΕ$  είναι ισοσκελές με  $ΑΔ = ΑΕ$  (2).

**ii.** Το τραpezίο  $ΑΒΓΔ$  είναι ισοσκελές, άρα  $\hat{B\Gamma\Delta} = \hat{\Delta}$  (3).

Από τις ισότητες (1), (3) προκύπτει  $\hat{B\Gamma\Delta} = \hat{E}_1$ , οπότε  $ΑΕ // ΒΓ$ , γιατί σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες.

Είναι  $ΑΔ = ΒΓ$  (4) και  $ΑΔ = ΑΕ$ , οπότε  $ΑΕ = ΒΓ$ .

Άρα το τετράπλευρο  $ΑΒΓΕ$  είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι απέναντι πλευρές του  $ΑΕ$ ,  $ΒΓ$  είναι ίσες και παράλληλες. Όμως η  $ΑΓ$  διχοτομεί τη γωνία  $\hat{BAE}$ , αφού  $\hat{A}_2 = \hat{A}_3 = 36^\circ$ , οπότε το τετράπλευρο  $ΑΒΓΕ$  είναι ρόμβος.



**366 Θέμα 4 - 36113**

**α.** Είναι: •  $\hat{B} = 180^\circ - \hat{\Gamma} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ , αφού  $ΑΒ // ΓΔ$ .

•  $ΑΔ \perp ΑΒ$  και  $ΑΒ // ΓΔ$ , οπότε  $ΑΔ \perp ΓΔ$ , άρα  $\hat{\Delta} = 90^\circ$ .

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $ΕΒΓ$  είναι  $\hat{E\hat{B}\Gamma} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{E\hat{B}\Gamma} + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{E\hat{B}\Gamma} = 30^\circ$

Οπότε  $ΕΓ = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow 2ΕΓ = ΒΓ$ .

**γ.** Η  $ΜΝ$  είναι η διάμεσος του τραpezίου  $ΑΒΓΔ$ .

Οπότε  $ΜΝ = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2}$ .

Είναι: •  $ΔΕ = ΑΒ = 4$ , αφού το  $ΑΒΕΔ$  είναι ορθογώνιο

•  $ΕΓ = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{4}{2} = 2$

•  $ΓΔ = ΔΕ + ΕΓ = 4 + 2 = 6$ .

Οπότε  $ΜΝ = \frac{4 + 6}{2} = 5$ .

**367 Θέμα 4 - 1747**

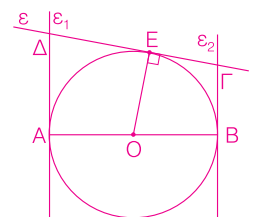
**α i.** Είναι  $\epsilon_1 \perp ΑΒ$  και  $\epsilon_2 \perp ΑΒ$ , οπότε  $\epsilon_1 // \epsilon_2$ .

Επειδή το  $Ε$  δεν είναι μέσο του  $\widehat{ΑΒ}$ , έχουμε  $\widehat{Β\hat{O}Ε} \neq 90^\circ$  και αφού  $\hat{E} = 90^\circ$  προκύπτει  $ΓΔ \not\parallel ΑΒ$ .

Οπότε το  $ΑΒΓΔ$  είναι τραpezίο.

**ii.** Είναι  $ΔΕ = ΔΑ$  και  $ΓΕ = ΓΒ$ , ως εφαπτόμενα τμήματα.

Οπότε  $ΓΔ = ΓΕ + ΔΕ = ΓΒ + ΔΑ = ΑΔ + ΒΓ$





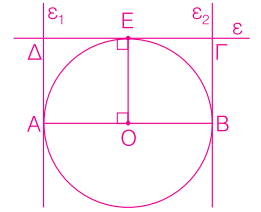
**β.** Αν το E είναι το μέσο του  $\widehat{AB}$ , τότε  $EO \perp AB$ .

Επειδή  $EO \perp \Gamma\Delta$  έχουμε  $EO \parallel A\Delta$  και  $EO \parallel B\Gamma$ .

Το  $OB\Gamma E$  είναι τετράγωνο αφού  $\widehat{B} = \widehat{O} = \widehat{E} = 90^\circ$  και  $OB = OE = R$

Το  $AB\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνιο, αφού  $A\Delta \parallel B\Gamma$  και  $\widehat{A} = 90^\circ$

Άρα  $\Pi_{\Delta\Gamma B} = 2(AB + A\Delta) = 2(2R + R) = 6R$ .



**368 Θέμα 4 - 1758**

**α.** Είναι  $GE = GB$  και  $DE = DA$ , ως εφαπτόμενα τμήματα.

Οπότε  $\Gamma\Delta = GE + ED = GB + DA = A\Delta + B\Gamma$ .

**β.** Οι  $OG$ ,  $OD$  είναι διακεντρικές ευθείες, οπότε είναι οι διχοτόμοι των  $\widehat{BOE}$ ,  $\widehat{EOA}$ .

Άρα  $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$  και  $\widehat{O}_3 = \widehat{O}_4$

Είναι  $\widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 + \widehat{O}_4 = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{O}_2 + 2\widehat{O}_3 = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma\widehat{O}\Delta = 90^\circ$ .

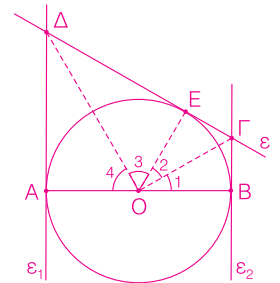
Άρα  $OG \perp OD$ , οπότε το  $\Gamma\widehat{O}\Delta$  είναι ορθογώνιο.

**γ.** Οι  $A\Delta$ ,  $B\Gamma$  είναι εφαπτόμενες του κύκλου, οπότε  $A\Delta \perp AB$  και  $B\Gamma \perp AB$ .

Άρα  $A\Delta \parallel B\Gamma$ .

- Αν το σημείο E δεν είναι μέσο του ημικυκλίου AB τότε οι  $\Gamma\Delta$  και  $AB$  δεν είναι παράλληλες οπότε το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι τραπέζιο.

- Αν το E είναι μέσο του ημικυκλίου AB, τότε  $\widehat{BOE} = 90^\circ$  (επίκεντρη γωνία που βαίνει σε τεταρτοκύκλιο) και  $EG \perp OE$ , άρα  $EG \parallel AB$ . Οπότε το  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο και αφού έχει μια ορθή γωνία, είναι ορθογώνιο.



**369 Θέμα 4 - 1783**

**α.** Είναι: •  $\widehat{\Delta AZ} = \widehat{ZAB}$ , αφού AE διχοτόμος

•  $AB \parallel \Gamma\Delta$ , άρα  $\widehat{ZAB} = \widehat{AZ\Delta}$ , ως εντός εναλλάξ.

Οπότε  $\widehat{\Delta AZ} = \widehat{\Delta ZA}$ , επομένως το  $\Delta AZ$  είναι ισοσκελές.

**β.** Από το ισοσκελές τρίγωνο  $\Delta AZ$  έχουμε  $A\Delta = \Delta Z \Rightarrow AB + \Gamma\Delta = \Gamma\Delta + \Gamma Z \Rightarrow AB = \Gamma Z$ .

Επειδή επιπλέον  $AB \parallel \Gamma Z$  το  $ABZ\Gamma$  είναι παραλληλόγραμμο.

Οπότε το E είναι το μέσο της διαγωνίου του  $B\Gamma$ .

**γ.** Το E είναι το μέσο και της διαγωνίου  $AZ$ , του παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ .

Στο ισοσκελές τρίγωνο  $\Delta AZ$ , το  $\Delta E$  είναι διάμεσος, οπότε η  $\Delta E$  είναι διχοτόμος της  $\widehat{\Delta}$ .

**370 Θέμα 4 - 37162**

**α.** • Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$ , τα  $\Delta$ , E είναι τα μέσα των  $AB$ ,  $A\Gamma$ , οπότε  $\Delta E \parallel B\Gamma$ .

Άρα το  $\Delta EZH$  είναι τραπέζιο.

- Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $HAB$  ( $\widehat{H} = 90^\circ$ ), η  $H\Delta$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα,

οπότε  $H\Delta = \frac{AB}{2}$  (1).

- Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$ , τα E, Z είναι τα μέσα των  $A\Gamma$ ,  $B\Gamma$ , οπότε  $EZ = \frac{AB}{2}$  (2).

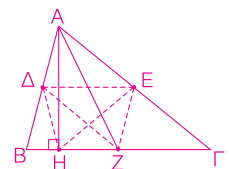
Από τις (1) και (2) έχουμε  $H\Delta = EZ$ .

Άρα το τραπέζιο  $\Delta EZH$  είναι ισοσκελές.

**β.** Τα τρίγωνα  $H\Delta Z$  και  $HEZ$  έχουν:

- $EZ = H\Delta$
- $HZ$  κοινή
- $\widehat{\Delta HZ} = \widehat{EZH}$ , ως γωνίες βάσης του ισοσκελούς τραpezίου.

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα  $\widehat{H\Delta Z} = \widehat{HEZ}$ .



- γ. Είναι:
- $\widehat{ΕΔΖ} = \widehat{ΔΖΗ}$  , ως εντός εναλλάξ
  - $\widehat{ΔΖΗ} = \widehat{ΕΗΖ}$  , από την ισότητα των τριγώνων  $ΔΗΖ$  και  $ΕΗΖ$ .

Άρα  $\widehat{ΕΔΖ} = \widehat{ΕΗΖ}$

### 371 Θέμα 4 - 1815

α. Είναι:

- $\widehat{ΑΔΜ} = \widehat{ΜΔΓ}$  αφού  $ΔΜ$  διχοτόμος
- $\widehat{ΑΜΔ} = \widehat{ΜΔΓ}$  , ως εντός εναλλάξ αφού  $ΔΓ // ΑΒ$  .

Άρα  $\widehat{ΑΔΜ} = \widehat{ΑΜΔ}$  , οπότε το  $\widehat{ΑΔΜ}$  είναι ισοσκελές με  $ΑΔ = ΑΜ$  .

β. Έχουμε  $ΑΒ = ΑΔ + ΒΓ \Rightarrow ΑΜ + ΜΒ = ΑΔ + ΒΓ \Rightarrow ΑΔ + ΜΒ = ΑΔ + ΒΓ \Rightarrow ΜΒ = ΒΓ$  .

Άρα το  $\widehat{ΜΒΓ}$  είναι ισοσκελές.

γ. Επειδή:

- $ΔΓ // ΑΒ$  , είναι  $\widehat{ΔΓΜ} = \widehat{ΓΜΒ}$  , ως εντός εναλλάξ
- το  $\widehat{ΜΒΓ}$  είναι ισοσκελές, έχουμε  $\widehat{ΓΜΒ} = \widehat{ΜΓΒ}$

Άρα  $\widehat{ΔΓΜ} = \widehat{ΜΓΒ}$  , οπότε η  $ΓΜ$  είναι η διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{Γ}$  του τραπέζιου.

### 372 Θέμα 4 - 37134

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $ΕΒΓ$  ( $\widehat{Ε} = 90^\circ$ ) είναι

$$\widehat{ΕΒΓ} + \widehat{Γ} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{ΕΒΓ} + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{ΕΒΓ} = 30^\circ ,$$

$$\text{Οπότε } ΕΓ = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{2ΑΒ}{2} = ΑΒ .$$

Επειδή  $ΑΒ // ΕΓ$  , το  $ΑΒΓΕ$  είναι παραλληλόγραμμο.

β. Από το παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΕ$  έχουμε  $ΑΕ = ΒΓ = 2ΑΒ$  . Είναι  $ΖΕ = ΓΔ - ΕΓ - ΔΖ = 4ΑΒ - ΑΒ - ΑΒ = 2ΑΒ$  . Άρα  $ΑΕ = ΖΕ$  και  $\widehat{ΑΕΖ} = \widehat{Γ} = 60^\circ$  , ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη, αφού  $ΑΕ // ΒΓ$  .

Επομένως το  $\widehat{ΖΑΕ}$  είναι ισόπλευρο.

γ. Τα τρίγωνα  $ΔΑΖ$  και  $ΓΑΕ$  έχουν:

- $ΑΖ = ΑΕ$  , αφού το  $\widehat{ΖΑΕ}$  είναι ισόπλευρο
- $ΔΖ = ΕΓ$  , αφού  $ΔΖ = ΑΒ$  και  $ΑΒ = ΕΓ$
- $\widehat{ΑΖΔ} = \widehat{ΑΕΓ}$  , ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών  $\widehat{ΑΖΕ} = 60^\circ$  και  $\widehat{ΑΕΖ} = 60^\circ$  .

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

### 373 Θέμα 4 - 13519

α. Το τρίγωνο  $ΑΔΕ$  είναι ισοσκελές, γιατί  $ΑΔ = ΑΕ$  .

Επομένως, η διάμεσος  $ΑΜ$  που αντιστοιχεί στην βάση θα είναι και ύψος.

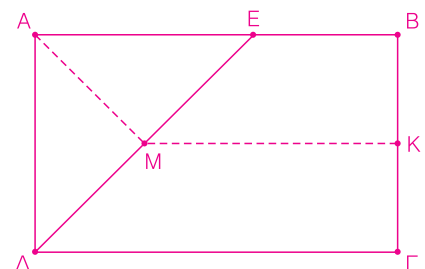
Άρα,  $ΑΜ \perp ΔΕ$  .

β. Το  $ΕΒΓΔ$  είναι τραπέζιο γιατί  $ΕΒ // ΔΓ$  και η  $ΔΕ$  δεν είναι παράλληλη με την  $ΒΓ$ .

Από το μέσο  $Μ$  της  $ΔΕ$  φέραμε  $ΜΚ // ΔΓ$  , άρα το  $Κ$  είναι το μέσο πλευράς  $ΒΓ$ .

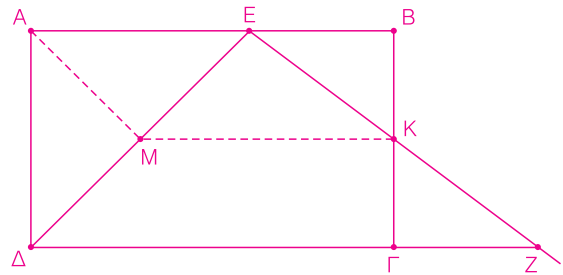
Η  $ΜΚ$  είναι διάμεσος του τραπέζιου  $ΕΒΓΔ$  , οπότε

$$\begin{aligned} ΜΚ &= \frac{ΔΓ + ΕΒ}{2} \Leftrightarrow 2ΜΚ = ΔΓ + ΕΒ \Leftrightarrow 2ΜΚ = ΑΒ + ΑΒ - ΑΕ \\ &\Leftrightarrow 2ΜΚ = 2ΑΒ - ΑΔ , (5). \end{aligned}$$



γ. Στο τρίγωνο ΔΕΖ το Μ είναι μέσο της ΔΕ και ΜΚ // ΔΖ, άρα η ΜΚ διέρχεται από το μέσο Κ της ΕΖ. Επομένως:

$$MK = \frac{\Delta Z}{2} \Leftrightarrow 2MK = \Delta Z \Leftrightarrow 2AB - A\Delta = \Delta\Gamma + \Gamma Z \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2AB - A\Delta = AB + \Gamma Z \Leftrightarrow \Gamma Z = AB - A\Delta$$



**374 Θέμα 4 - 37080**

α. Είναι  $E\Gamma = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{2AB}{2} = AB$  και  $E\Gamma // AB$ , οπότε το ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ η ΖΗ είναι διάμεσος, οπότε  $ZH // \Gamma\Delta // AB$ .

• Στο  $\triangle A\Delta E$ , το Ζ είναι το μέσο του ΑΔ και  $Z\Theta // \Delta E$ , οπότε το Θ μέσο του ΑΕ.

• Στο  $\triangle B\Gamma E$ , το Η είναι το μέσο του ΒΓ και  $H\Lambda // E\Gamma$ , οπότε το Ι είναι το μέσο του ΒΕ.

γ. Είναι  $ZH = \frac{\Gamma\Delta + AB}{2} = \frac{2AB + AB}{2} = \frac{3}{2}AB$ .

**375 Θέμα 4 - 1757**

α. Στο τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι  $\hat{A} = \hat{E} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ , οπότε είναι ορθογώνιο.

β. Επειδή το ΑΒΕΔ είναι ορθογώνιο, έχουμε  $\Delta E = AB$  και  $BE = A\Delta$ .

Είναι:

•  $E\Gamma = \Delta\Gamma - \Delta E = 4AB - AB = 3AB$

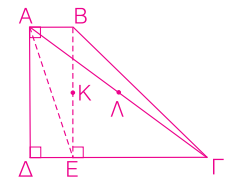
•  $BE = A\Delta = 3AB$

Άρα  $E\Gamma = BE$ , οπότε το  $\triangle BE\Gamma$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

γ. Στο τραπέζιο ΑΒΓΕ, τα Κ, Λ είναι τα μέσα των διαγωνίων του, οπότε

$$K\Lambda = \frac{E\Gamma - AB}{2} = \frac{3AB - AB}{2} = AB \text{ και } K\Lambda // AB$$

Άρα το ΑΒΛΚ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε η ΑΓ διέρχεται από το μέσο του ΒΚ.



**376 Θέμα 4 - 1767**

α. Είναι  $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow 3\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 45^\circ$ .

β. Το ΑΒΕΔ έχει  $\hat{A} = \hat{\Delta} = \hat{E} = 90^\circ$ , οπότε είναι ορθογώνιο, άρα  $\Delta E = AB$ .

Έχουμε  $\Delta\Gamma = 2AB \Leftrightarrow \Delta E + E\Gamma = 2AB \Leftrightarrow AB + E\Gamma = 2AB \Leftrightarrow E\Gamma = AB$ .

Επειδή επιπλέον  $AB // E\Gamma$ , το ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Επειδή  $\hat{\Gamma} = 45^\circ$ , στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ είναι  $\hat{B} = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ .

Οπότε το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές με  $BE = E\Gamma$ , άρα  $BE = E\Delta$ .

Επομένως το ορθογώνιο ΑΒΕΔ είναι τετράγωνο, άρα οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα, δηλαδή  $AE \perp BD$ .

**377 Θέμα 4 - 37115**

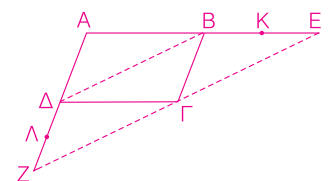
α. i. Επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε:

•  $AB // \Gamma\Delta \Leftrightarrow BE // \Gamma\Delta$

•  $A\Delta // B\Gamma \Leftrightarrow \Delta Z // B\Gamma$

Άρα τα ΒΔΓΕ και ΒΔΖΓ είναι παραλληλόγραμμα.

ii. Από τα παραλληλόγραμμα ΒΔΓΕ και ΒΔΖΓ, έχουμε  $\Gamma Z // \Delta B$  και  $\Gamma E // \Delta B$ , άρα τα Ε, Γ, Ζ είναι συνευθειακά.



**β.** Στο τρίγωνο  $AZE$  τα  $\Delta, B$  είναι μέσα των  $AZ, AE$ , οπότε  $\Delta B \parallel ZE$ .

Επειδή  $\Delta B \parallel ZE$ , το τετράπλευρο  $\Delta BEZ$  είναι τραπέζιο.

Η  $KL$  είναι η διάμεσος του τραπέζιου  $\Delta BEZ$ , οπότε:

- $KL \parallel \Delta B$
- $KL = \frac{\Delta B + ZE}{2} = \frac{\Delta B + Z\Gamma + \Gamma E}{2} = \frac{\Delta B + \Delta B + \Delta B}{2} = \frac{3}{2}\Delta B$ .

### 378 Θέμα 4 - 37107

**α.** Οι  $B_x, B_y$  είναι οι διχοτόμοι των γωνιών  $\hat{B}$  και  $\hat{B}_{εξ}$ , οπότε είναι  $\Gamma\hat{B}\Delta = \Delta\hat{B}A$  και  $A\hat{B}E = E\hat{B}Z$ .  
Είναι  $\Gamma\hat{B}\Delta + \Delta\hat{B}A + A\hat{B}E + E\hat{B}Z = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Delta\hat{B}A + 2A\hat{B}E = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta\hat{B}A + A\hat{B}E = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta\hat{B}E = 90^\circ$ .

Το τετράπλευρο  $A\Delta BE$  έχει  $\hat{B} = \hat{\Delta} = \hat{E} = 90^\circ$ , οπότε είναι ορθογώνιο.

**β.** Επειδή το  $A\Delta BE$  είναι ορθογώνιο, έχουμε  $AB = E\Delta \Leftrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{E\Delta}{2} \Leftrightarrow KB = K\Delta$ .

Άρα το τρίγωνο  $K\Delta B$  είναι ισοσκελές, επομένως  $K\hat{\Delta}B = K\hat{B}\Delta$ .

Είναι  $K\hat{B}\Delta = \Delta\hat{B}\Gamma$ , οπότε  $K\hat{\Delta}B = \Delta\hat{B}\Gamma$

Επομένως οι  $E\Delta$  και  $B\Gamma$  που τέμνονται από τη  $B\Delta$  σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες τους ίσες, άρα  $E\Delta \parallel B\Gamma$ .

Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  το  $K$  είναι το μέσο της  $AB$  και  $KM \parallel B\Gamma$ , οπότε το  $M$  είναι το μέσο της  $AG$ .

**γ.** Από το **β.** ερώτημα έχουμε  $KM \parallel B\Gamma$ , οπότε το  $KM\Gamma B$  είναι τραπέζιο και  $KM = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}$ . Η διάμεσος του τραπέζιου  $KM\Gamma B$  είναι ίση με

$$\frac{B\Gamma + KM}{2} = \frac{\alpha + \frac{\alpha}{2}}{2} = \frac{3\alpha}{4}.$$

### 379 Θέμα 4 - 14888

**α.** Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$ , τα  $\Delta, E$  είναι τα μέσα των  $AB, A\Gamma$ , οπότε:

- $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{2K\Lambda}{2} = K\Lambda$
- $\Delta E \parallel B\Gamma$ , οπότε  $\Delta E \parallel K\Lambda$

Οπότε το  $\Delta E\Lambda K$  είναι παραλληλόγραμμο.

**β.** Στο τρίγωνο  $ABM$ , τα  $\Delta, K$  είναι τα μέσα των  $AB, BM$ , οπότε  $\Delta K \parallel AM$ .

Άρα το  $K\Delta AM$  είναι τραπέζιο.

Για τη διάμεσο  $\delta$  του τραπέζιου  $K\Delta AM$ , έχουμε  $\delta = \frac{AM + \Delta K}{2}$ .

- Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ), η  $AM$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε  $AM = \frac{B\Gamma}{2}$ .
- Στο τρίγωνο  $ABM$  τα  $\Delta, K$  είναι τα μέσα των  $AB, BM$ , οπότε  $\Delta K = \frac{AM}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$ .

$$\text{Άρα } \delta = \frac{\frac{B\Gamma}{2} + \frac{B\Gamma}{4}}{2} = \frac{\frac{3B\Gamma}{4}}{2} = \frac{3}{8}B\Gamma.$$

**380 Θέμα 4 - 1821**

**α.** Το  $\Lambda$  είναι μέσο του  $\Gamma\Delta$ , οπότε  $\Gamma\Delta = 2\Gamma\Lambda \Leftrightarrow 2AB = 2\Gamma\Lambda \Leftrightarrow AB = \Gamma\Lambda$ .

Επομένως  $AB \parallel \Gamma\Lambda$ , άρα το  $AB\Gamma\Lambda$  είναι παραλληλόγραμμο. Οπότε  $A\Lambda \parallel B\Gamma$ .

Τα τετράπλευρα  $ABKZ$ ,  $ZK\Gamma\Lambda$  είναι παραλληλόγραμμα γιατί έχουν τις απέναντι πλευρές παράλληλες.

Οπότε  $BK = AZ$  και  $K\Gamma = Z\Lambda$ .

Αφού  $BK = K\Gamma$  έχουμε  $AZ = Z\Lambda$ .

Άρα το  $Z$  θα είναι το μέσο του  $A\Lambda$ .

**β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $\Delta A\Lambda$  ( $\hat{\Delta} = 90^\circ$ ), η  $\Delta Z$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε

$$\Delta Z = \frac{A\Lambda}{2} \Leftrightarrow \Delta Z = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2\Delta Z.$$

**γ.** Το  $ZK\Gamma\Lambda$  είναι παραλληλόγραμμο και  $K\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{2AB}{2} = AB = ZK$ , άρα είναι ρόμβος.

**δ.** Στο τρίγωνο  $AK\Lambda$ , η  $KZ$  είναι διάμεσος και  $KZ = \Lambda Z = \frac{A\Lambda}{2}$ .

Οπότε το τρίγωνο  $AK\Lambda$  είναι ορθογώνιο με  $\hat{AK\Lambda} = 90^\circ$ .

**381 Θέμα 4 - 37103**

**α.** Τα τρίγωνα  $A\Delta\Gamma$  και  $B\Delta\Gamma$  έχουν:

- $A\Delta = B\Gamma$
- $A\Gamma = B\Delta$
- $\Gamma\Delta$  κοινή

Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ), επομένως  $\hat{A\Gamma\Delta} = \hat{B\Delta\Gamma}$ .

Οπότε το τρίγωνο  $\Delta O\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $O\Gamma = O\Delta$ .

Επειδή  $B\Delta = A\Gamma$  και  $O\Gamma = O\Delta$  έχουμε  $O\Lambda = O\Lambda$ , δηλαδή το τρίγωνο  $O\Lambda B$  είναι ισοσκελές.

**β.** Στο τρίγωνο  $ABO$ , είναι  $O\Lambda = O\Lambda$  οπότε  $\hat{\Gamma\Lambda B} = \hat{A\Lambda B}$ .

Επειδή τα τρίγωνα  $A\Gamma\Delta$  και  $B\Gamma\Delta$  είναι ίσα, έχουμε  $\hat{\Delta\Lambda\Gamma} = \hat{\Delta\Lambda\Gamma}$ .

Άρα  $\hat{\Delta\Lambda B} = \hat{\Delta\Lambda\Gamma} + \hat{\Gamma\Lambda B} = \hat{\Delta\Lambda\Gamma} + \hat{A\Lambda B} = \hat{A\Lambda\Gamma}$

**γ.** Τα τρίγωνα  $A\Gamma\Delta$  και  $B\Gamma\Delta$  είναι ίσα, οπότε  $\hat{A\Delta\Gamma} = \hat{B\Gamma\Delta}$

Στο τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  έχουμε:

$$\hat{\Delta\Lambda B} + \hat{A\Lambda\Gamma} + \hat{A\Delta\Gamma} + \hat{B\Gamma\Delta} = 360^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Delta\Lambda B} + 2\hat{A\Delta\Gamma} = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta\Lambda B} + \hat{A\Delta\Gamma} = 180^\circ$$

Οι γωνίες  $\hat{\Delta\Lambda B}$  και  $\hat{A\Delta\Gamma}$  είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  που τέμνονται από την  $A\Delta$  και είναι παραπληρωματικές, οπότε  $AB \parallel \Gamma\Delta$ .

Άρα το  $AB\Gamma\Delta$  είναι τραπέζιο και επειδή  $A\Delta = B\Gamma$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**382 Θέμα 4 - 1778**

**α.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $OEB$  έχουμε  $\hat{O\Lambda E} = 90^\circ - \hat{B\Lambda E}$

$$\text{Είναι } \hat{A\Lambda\Delta} + 90^\circ + \hat{B\Lambda E} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A\Lambda\Delta} = 90^\circ - \hat{B\Lambda E} \Leftrightarrow \hat{A\Lambda\Delta} = \hat{O\Lambda E}.$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα  $O\Lambda\Delta$  και  $O\Lambda E$  έχουν:

- $O\Lambda = O\Lambda$
- $\hat{A\Lambda\Delta} = \hat{O\Lambda E}$

Άρα είναι ίσα.

**β.** Επειδή τα τρίγωνα  $O\Lambda\Delta$  και  $O\Lambda E$  είναι ίσα, έχουμε  $A\Delta = OE$  και  $O\Lambda = BE$ .

Είναι  $A\Delta + BE = OE + O\Lambda = \Delta E$ .

γ. Είναι  $AD \perp DE$  και  $BE \perp DE$ , οπότε  $AD \parallel BE$ , άρα το  $ADEB$  είναι τραπέζιο.

Η  $MN$  είναι διάμεσος του τραπεζίου, οπότε  $MN = \frac{AD + BE}{2} = \frac{\beta \cdot DE}{2}$ .

δ. Είναι  $MN \parallel AD$  και  $AD \perp DE$ , οπότε  $MN \perp DE$ . Στο  $\triangle AME$  η  $MN$  είναι διάμεσος και ύψος, οπότε το  $\triangle AME$  είναι ισοσκελές. Επειδή στο  $\triangle AME$  η διάμεσος  $MN$  είναι ίση με  $\frac{DE}{2}$ , το τρίγωνο είναι ορθογώνιο. Άρα το  $\triangle AME$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

**383 Θέμα 4 - 37135**

α. Τα τρίγωνα  $ABD$  και  $ABG$  είναι ισοσκελή και τα  $AE, BZ$  είναι ύψη τους, οπότε είναι και διάμεσοί τους. Άρα τα  $Z, E$  είναι τα μέσα των  $AG, BD$  αντίστοιχα.

β. Επειδή το  $ABGD$  είναι ισοσκελές τραπέζιο, έχουμε  $AG = BD$ , οπότε και  $EB = ZA$ .

Τα ορθογώνια τρίγωνα  $EAB$  και  $ZAB$  έχουν:

- $EB = ZA$
- $AB$  κοινή

Άρα είναι ίσα, οπότε  $AE = BZ$ .

γ. Στο τραπέζιο  $ABGD$  τα  $E, Z$  είναι τα μέσα των διαγωνίων του, οπότε  $EZ \parallel AB$ .

Άρα το  $A EZB$  είναι τραπέζιο και επειδή  $AE = BZ$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

δ. Το τρίγωνο  $ABD$  είναι ισοσκελές με  $AB = AD$ , οπότε  $\hat{A}DB = \hat{A}BD$ . Επειδή  $AB \parallel GD$  έχουμε  $\hat{A}BD = \hat{B}DG$ , ως εντός εναλλάξ.

Άρα  $\hat{A}DB = \hat{B}DG$ , οπότε η  $BD$  είναι η διχοτόμος της  $\hat{A}$ .

**384 Θέμα 4 - 1797**

α. Επειδή τα  $K, \Lambda, M, N$  είναι τα μέσα των πλευρών του τετραπλεύρου  $ABGD$ , το  $K\Lambda MN$  είναι παραλληλόγραμμο.

Αφού το  $ABGD$  είναι ισοσκελές τραπέζιο, έχουμε  $AG = BD$ .

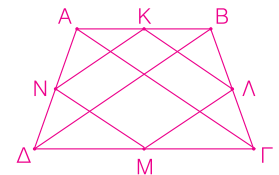
Στο  $\triangle ABD$ , τα  $K, N$  είναι τα μέσα των  $AB, AD$ , οπότε  $KN = \frac{BD}{2}$ .

Στο  $\triangle ABG$ , τα  $K, \Lambda$  είναι τα μέσα των  $AB, BG$ , οπότε  $K\Lambda = \frac{AG}{2}$ . Άρα  $K\Lambda = KN$ , οπότε το  $K\Lambda MN$  είναι ρόμβος.

β. Επειδή το  $K\Lambda MN$  είναι ρόμβος, έχουμε  $KN = K\Lambda$  και από το α. ερώτημα  $AG = BD$ .

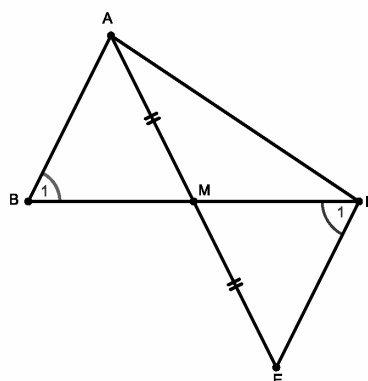
Οπότε για να σχηματίζεται ρόμβος, αρκεί το  $ABGD$  να έχει ίσες διαγωνίους.

Άρα δεν είναι υποχρεωτικό το  $ABGD$  να είναι ισοσκελές τραπέζιο.



**385 Θέμα 4 - 14885**

α)

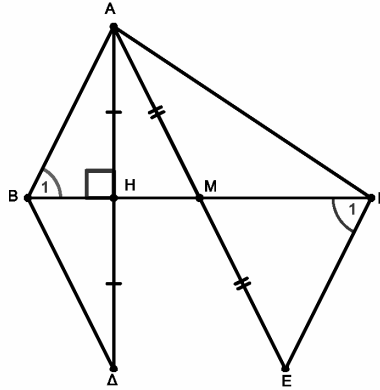


i. Τα τρίγωνα  $ABM$  και  $EΓM$  έχουν:

- $AM = EM$ , από υπόθεση
- $BM = ΓM$ , το  $M$  είναι μέσο του  $BΓ$
- $\widehat{AMB} = \widehat{EMΓ}$ , ως κατακορυφήν γωνίες ίσες

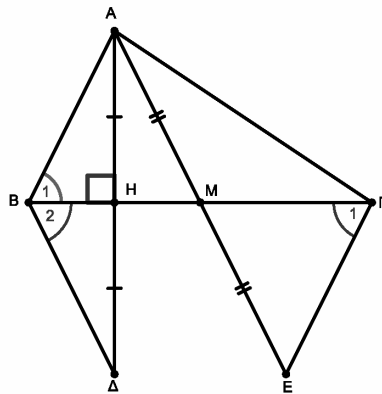
Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα  $ABM$  και  $EΓM$  είναι ίσα, οπότε έχουν και τις τρίτες πλευρές τους ίσες, δηλαδή  $AB = ΓE$ .

ii.



Από την υπόθεση έχουμε ότι  $AH \perp BΓ$  αφού  $AH$  ύψος, άρα  $BH \perp AD$  (1). Επίσης  $AH = HD$  από κατασκευή, άρα το σημείο  $H$  είναι μέσο του τμήματος  $AD$  (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι στο τρίγωνο  $ABD$  το τμήμα  $BH$  είναι ύψος και διάμεσος, επομένως το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση  $AD$  και  $AB = BD$ .

β)

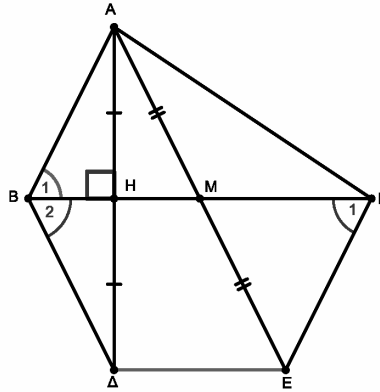


Στο ισοσκελές τρίγωνο  $ABD$  του α) ii. ερωτήματος το τμήμα  $BH$  θα είναι και διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{ABD}$ , άρα  $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ . Στα ίσα τρίγωνα  $ABM$  και  $EΓM$  του α) i. ερωτήματος απέναντι από τις ίσες πλευρές  $AM$  και  $ME$  θα βρίσκονται ίσες γωνίες, δηλαδή  $\widehat{B}_1 = \widehat{Γ}_1$ . Οπότε τελικά  $\widehat{B}_2 = \widehat{Γ}_1$  ή  $\widehat{GBD} = \widehat{ΓE}$ .

γ)

- i. Από την ισότητα των γωνιών  $\widehat{B}_1$  και  $\widehat{Γ}_1$  που είναι γωνίες εντός εναλλάξ των των  $AB$  και  $ΓE$  τεμνομένων από το  $AB$  συμπεραίνουμε ότι  $AB \parallel ΓE$ . Επειδή το τμήμα  $BD$  τέμνει το τμήμα  $AB$ , θα τέμνει και το παράλληλό του τμήμα  $ΓE$ . Άρα το  $BD$  δεν μπορεί να είναι παράλληλο στο  $ΓE$ .

ii.



Στο τρίγωνο ΑΔΕ το Η είναι μέσο του τμήματος ΑΔ και το Μ είναι μέσο του τμήματος ΑΕ από κατασκευή. Άρα το τμήμα ΗΜ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του, οπότε είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά, δηλαδή  $HM \parallel DE$  ή  $BG \parallel DE$ . Άρα το τετράπλευρο ΒΓΕΔ έχει δύο μόνο πλευρές παράλληλες, αφού δείξαμε ότι στο γ) i. ερώτημα ότι η ΒΔ δεν μπορεί να είναι παράλληλη στην ΓΕ, άρα είναι τραπέζιο. Συγχρόνως από το β) ερώτημα οι γωνίες της βάσης του ΒΓ είναι ίσες, αφού  $\widehat{B\Delta} = \widehat{B\Gamma}$ , άρα το τραπέζιο είναι ισοσκελές.

**386 Θέμα 4 - 37129**

α. Είναι  $MN = MA + AN = \frac{AD}{2} + \frac{AD}{2} = AD = BG$ .

Επειδή  $MN \parallel BG$ , το ΜΝΒΓ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Τα Κ, Λ είναι τα μέσα των παράλληλων τμημάτων ΜΓ, ΝΒ, οπότε  $MK \parallel NL$ , άρα το ΜΝΛΚ είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως  $KL \parallel MN$ , άρα  $KL \parallel AD$ .

Οπότε το ΑΔΚΛ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Επειδή  $AM \parallel KL$ , το ΑΜΚΛ είναι τραπέζιο.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΝ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) η ΑΛ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε  $AL = \frac{BN}{2} = \frac{MG}{2} = MK$ .

Επομένως το ΑΜΚΛ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**387 Θέμα 4 - 37099**

α. Στο τρίγωνο ΑΚΕ, το ΚΗ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β. Στο τρίγωνο ΑΕΓ, τα Η, Κ είναι τα μέσα των ΑΕ, ΑΓ, οπότε  $HK \parallel EG$ .

Επειδή  $HK \perp AE$ , είναι  $EG \perp AE$ .

Άρα το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο.

γ. Επειδή  $DB \perp AE$  και  $GE \perp AE$ , έχουμε  $DB \parallel GE$ , οπότε το ΔΒΓΕ είναι τραπέζιο.

Η ΔΒ είναι η μεσοκάθετος του ΑΕ, οπότε  $DE = DA$ .

Είναι  $DA = GB$ , αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, άρα  $DE = BG$ .

Οπότε το ΔΒΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**388 Θέμα 4 - 1789**

α. Στο τρίγωνο ΓΔΒ, τα Κ, Μ είναι τα μέσα των ΓΔ, ΒΓ, οπότε  $KM \parallel \frac{BD}{2} \Leftrightarrow KM \parallel DN$ .

Άρα το ΚΜΝΔ είναι παραλληλόγραμμο.



**β.** Επειδή  $KM \parallel AB$ , το  $AKMN$  είναι τραπέζιο. Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) η  $AK$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε  $AK = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ .

Επειδή το  $KMNA$  είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε  $MN = K\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ .

Άρα  $AK = MN$ , οπότε το  $AKMN$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**γ.** Η διάμεσος του τραπεζίου  $AKMN$  είναι  $\delta = \frac{KM + AN}{2} = \frac{\Delta N + AN}{2} = \frac{NB + AN}{2} = \frac{AB}{2}$ .

### 389 Θέμα 4 - 37114

**α.** Στο τρίγωνο  $A\Delta Z$ , το  $\Delta E$  είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

**β.** Στο τρίγωνο  $AZ\Gamma$ , τα  $E, O$  είναι τα μέσα των  $AZ, A\Gamma$ , οπότε  $OE \parallel Z\Gamma$  και  $OE = \frac{Z\Gamma}{2} \Leftrightarrow Z\Gamma = 2OE$ .

**γ.** Είναι  $OE \parallel Z\Gamma$ , άρα  $B\Delta \parallel Z\Gamma$ , οπότε το  $B\Delta\Gamma Z$  είναι τραπέζιο.

Η  $\Delta B$  είναι η μεσοκάθετος του  $AZ$ , οπότε  $BA = BZ$ .

Είναι  $AB = \Gamma\Delta$ , αφού το  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο, άρα  $BZ = \Delta\Gamma$ .

Οπότε το  $B\Delta\Gamma Z$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

### 390 Θέμα 4 - 1790

**α.** Στο τρίγωνο  $ABZ$ , το  $AE$  είναι ύψος και διάμεσος.

Άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με  $AZ = AB$ .

Αφού το  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο, είναι  $AB = \Delta\Gamma$ , οπότε  $AZ = \Delta\Gamma$ .

Επειδή  $Z\Gamma \parallel A\Delta$  και  $AZ = \Delta\Gamma$  το  $AZ\Gamma\Delta$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**β.** Είναι:

- $\hat{\Delta} = \hat{B} = 70^\circ$ , ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου
- $Z\hat{A}\Delta = \hat{\Delta} = 70^\circ$
- $\hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{B} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$
- $A\hat{Z}\Gamma = \hat{\Gamma} = 110^\circ$

Άρα οι γωνίες του τραπεζίου  $AZ\Gamma\Delta$  είναι  $\hat{\Delta} = Z\hat{A}\Delta = 70^\circ$  και  $\hat{\Gamma} = A\hat{Z}\Gamma = 110^\circ$ .

**γ.** Στο ισοσκελές τραπέζιο  $A\Delta\Gamma Z$  είναι  $A\Gamma = \Delta Z$ .

Στο τρίγωνο  $BZ\Delta$  τα  $M, E$  τα μέσα των  $B\Delta, BZ$ , οπότε  $EM = \frac{\Delta Z}{2}$ . Άρα  $EM = \frac{A\Gamma}{2}$ .

### 391 Θέμα 4 - 1791

**α.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) η  $AM$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε

$$AM = \frac{B\Gamma}{2} = MB.$$

Άρα το  $M\hat{A}B$  είναι ισοσκελές και επειδή  $\hat{B} = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$  είναι ισόπλευρο.

**β.** Τα ορθογώνια τρίγωνα  $EM\Gamma$  ( $\hat{E} = 90^\circ$ ) και  $\Delta MA$  ( $\hat{\Delta} = 90^\circ$ ), έχουν:

- $MA = M\Gamma$
- $A\hat{M}\Delta = \Gamma\hat{M}E$

Άρα είναι ίσα, οπότε  $ME = M\Delta$ .

Στο ισόπλευρο τρίγωνο  $MAB$ , το ύψος  $AM$  είναι και διάμεσος, οπότε

$$M\Delta = \frac{MB}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$$

γ. Στο  $\triangle M\Delta E$  έχουμε  $M\Delta = ME$ , άρα  $\widehat{ME\Delta} = \widehat{M\Delta E}$ .

Η γωνία  $\widehat{AMB}$  είναι εξωτερική στο τρίγωνο  $M\Delta E$  οπότε

$$\widehat{AMB} = \widehat{ME\Delta} + \widehat{M\Delta E} \Leftrightarrow 60^\circ = 2\widehat{M\Delta E} \Leftrightarrow \widehat{M\Delta E} = 30^\circ.$$

Επειδή  $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma\Delta E}$  ( $= 30^\circ$ ) και είναι εντός εναλλάξ, έχουμε  $\Delta E \parallel \Delta\Gamma$ , άρα το  $A\Delta E\Gamma$  είναι τραπέζιο.

Αφού  $\widehat{\Gamma E\Delta} = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ = \widehat{E\Delta A}$  το  $A\Delta E\Gamma$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

### 392 Θέμα 4 - 37098

α. Στο ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Delta$  το  $BH$  είναι διάμεσος οπότε είναι ύψος και διχοτόμος.

$$\text{Άρα } BH \perp A\Delta \text{ και } \widehat{HB\Delta} = \widehat{HB A} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$

$$\text{Είναι } \widehat{HBE} = 180^\circ - \widehat{HB A} - \widehat{EB\Gamma} = 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ.$$

Οπότε  $BH \perp \Delta H$  και  $BH \perp EB$ , άρα  $EB \parallel \Delta H$ .

$$\text{Έχουμε } EB = B\Gamma = \frac{AB}{2} = \frac{A\Delta}{2} = H\Delta.$$

Επειδή  $EB \parallel \Delta H$  το  $BH\Delta E$  είναι παραλληλόγραμμο και αφού επιπλέον είναι  $\widehat{H} = 90^\circ$ , είναι ορθογώνιο.

β. Είναι  $\widehat{A\Delta Z} = 90^\circ$ , αφού το  $BH\Delta E$  είναι ορθογώνιο.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $A\Delta Z$  το  $H$  είναι το μέσο της  $A\Delta$  και  $HB \parallel \Delta Z$ , οπότε το  $B$  είναι το μέσο της  $AZ$ .

$$\text{Επομένως } AB = BZ \Rightarrow AB = B\Gamma + \Gamma Z \Rightarrow 2B\Gamma = B\Gamma + \Gamma Z \Rightarrow B\Gamma = \Gamma Z.$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $BEZ$  ( $\widehat{E} = 90^\circ$ ) η  $E\Gamma$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε

$$E\Gamma = \frac{BZ}{2} \Leftrightarrow E\Gamma = \Gamma Z.$$

Άρα το τρίγωνο  $\Gamma ZE$  είναι ισοσκελές.

γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $A\Delta Z$  το  $B$  είναι το μέσο του  $AZ$  και  $BE \parallel A\Delta$ , οπότε το  $E$  είναι το μέσο της

$AZ$ . Στο  $\triangle A\Delta Z$  τα  $H, E$  είναι τα μέσα των  $A\Delta, \Delta Z$ , οπότε  $HE \parallel AZ$ .

Άρα το  $HE\Gamma A$  είναι τραπέζιο και επειδή  $\widehat{A} = \widehat{E\Gamma B} = 60^\circ$ , είναι ισοσκελές τραπέζιο.

### 393 Θέμα 4 - 37128

α. Επειδή το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι ισοσκελές τραπέζιο, έχουμε  $\widehat{A} = \widehat{B}$  και  $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta}$ .

Είναι  $AB \parallel \Gamma\Delta$ , οπότε

$$\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{\Gamma} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 60^\circ.$$

$$\text{Άρα } \widehat{B} = 2\widehat{\Gamma} = 120^\circ, \widehat{A} = \widehat{B} = 120^\circ \text{ και } \widehat{\Delta} = \widehat{\Gamma} = 60^\circ.$$

β. i. Στο τρίγωνο  $BK\Gamma$  είναι  $\widehat{KB\Gamma} = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$ ,  $\widehat{\Gamma} = 60^\circ$  και  $\widehat{BK\Gamma} = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$ .

Άρα είναι ισόπλευρο, οπότε  $KB = B\Gamma = K\Gamma$ .

$$\text{Έχουμε } B\Gamma = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow 2B\Gamma = \Delta\Gamma \Leftrightarrow 2K\Gamma = \Delta K + K\Gamma \Leftrightarrow K\Gamma = \Delta K \Leftrightarrow BK = \Delta K.$$

Επειδή  $AB = BK = K\Delta = A\Delta$  το  $ABK\Delta$  είναι ρόμβος.

ii. Επειδή το τρίγωνο  $BK\Gamma$  είναι ισόπλευρο και το  $KM$  είναι ύψος, θα είναι και διάμεσος, οπότε το  $M$  είναι το μέσο του  $B\Gamma$ .

### 394 Θέμα 4 - 37139

α. Επειδή το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι ισοσκελές τραπέζιο, έχουμε  $A\Delta = B\Gamma$ .

- Στο τρίγωνο  $\Delta B\Gamma$  τα  $M, E$  είναι τα μέσα των  $\Delta\Gamma, \Delta B$ , οπότε  $ME = \frac{B\Gamma}{2}$ .
- Στο τρίγωνο  $\Gamma\Delta A$ , τα  $M, Z$  είναι τα μέσα των  $\Gamma\Delta, \Gamma A$  οπότε  $MZ = \frac{A\Delta}{2}$ .

Άρα  $ME = MZ$ .

**β.** Στο τρίγωνο  $\Gamma\Delta A$ , τα  $M, Z$  είναι τα μέσα των  $\Gamma\Delta, \Gamma A$ , οπότε  $MZ \parallel A\Delta$  και επειδή  $A\Delta \perp A\Gamma$  είναι και  $MZ \perp A\Gamma$ .

- γ.** Τα τρίγωνα  $M\Delta E$  και  $MZ\Gamma$  έχουν:
- $M\Delta = M\Gamma$
  - $ME = MZ$
  - $\Delta E = Z\Gamma$  ως μισά ίσων τμημάτων

Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ).

**δ.** Επειδή τα τρίγωνα  $M\Delta E$  και  $M\Gamma Z$  είναι ίσα έχουμε  $\widehat{E\Delta M} = \widehat{M\Gamma Z}$ .

Άρα το τρίγωνο  $O\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $O\Delta = O\Gamma$ .

Οπότε  $O\Gamma - O\Delta = O\Gamma - O\Delta = OZ$ .

Επειδή  $O\Gamma = OZ$  και  $ME = MZ$ , η  $OM$  είναι η μεσοκάθετος του  $EZ$ .

### 395 Θέμα 4 - 1893

**α. i.** Επειδή το  $O$  είναι το κέντρο του ορθογωνίου, έχουμε  $OA = OD$ .

Αφού επιπλέον  $\widehat{AOD} = 60^\circ$ , το τρίγωνο  $AO\Delta$  είναι ισόπλευρο.

Επειδή το  $\Delta M$  είναι ύψος του ισόπλευρου τριγώνου  $AO\Delta$ , θα είναι και διάμεσος. Άρα το  $M$  είναι το μέσο του  $OA$ .

**ii.** Είναι  $AM = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}A\Gamma = \frac{1}{4}A\Gamma$ .

**β.** Στο τρίγωνο  $O\Gamma B$  είναι  $OB = O\Gamma$  και  $\widehat{BO\Gamma} = 60^\circ$ , οπότε είναι ισόπλευρο.

Επειδή το  $\Gamma N$  είναι ύψος του, θα είναι και διάμεσος, οπότε το  $N$  είναι το μέσο του  $OB$ .

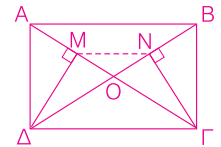
Στο τρίγωνο  $OAB$ , τα  $M, N$  είναι τα μέσα των  $OA, OB$ , οπότε  $MN \parallel AB$ .

Επειδή  $AB \parallel \Gamma\Delta$  έχουμε  $MN \parallel \Gamma\Delta$ , άρα το τετράπλευρο  $MN\Gamma\Delta$  είναι τραπέζιο.

Είναι: •  $OM = \frac{OA}{2} = \frac{OB}{2} = ON$

- $O\Gamma = OD$

Οπότε  $OM + O\Gamma = ON + OD \Leftrightarrow M\Gamma = N\Delta$ . Άρα το  $MN\Gamma\Delta$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.



### 396 Θέμα 4 - 37089

**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $EB\Delta$  έχουν:

- $B\Delta$  κοινή
- $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$

Άρα είναι ίσα, οπότε  $BA = BE$ .

Επομένως το τρίγωνο  $ABE$  είναι ισοσκελές.

**β.** Τα ορθογώνια τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $BEZ$  έχουν:

- $AB = BE$
- $\widehat{B}$  κοινή

Άρα είναι ίσα.

**γ.** Επειδή τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $EB\Delta$  είναι ίσα, έχουμε  $\Delta A = \Delta E$  και  $BA = BE$ .

Οπότε η  $B\Delta$  είναι η μεσοκάθετος του  $AE$ .

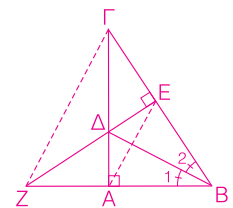
Επειδή τα  $\Delta AB\Gamma$  και  $\Delta BEZ$  είναι ίσα, έχουμε  $B\Gamma = BZ$  και  $A\Gamma = ZE$ .

Οπότε  $\Delta\Gamma = A\Gamma - \Delta A = ZE - \Delta E = \Delta Z$ .

Αφού  $B\Gamma = BZ$  και  $\Delta\Gamma = \Delta Z$ , η  $B\Delta$  είναι η μεσοκάθετος του  $Z\Gamma$ .

**δ.** Επειδή  $AE \perp B\Delta$  και  $\Gamma Z \perp B\Delta$  είναι  $AE \parallel \Gamma Z$ .

Επομένως το  $AE\Gamma Z$  είναι τραπέζιο. Αφού επιπλέον  $A\Gamma = ZE$ , το  $AE\Gamma Z$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.



### 397 Θέμα 4 - 37118

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι  $\widehat{B\Delta A} + \widehat{B} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{B\Delta A} + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{B\Delta A} = 30^\circ$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $A\epsilon H$  είναι  $\widehat{E\eta A} + \widehat{E\Delta H} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{E\eta A} + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{E\eta A} = 60^\circ$ .

$$\text{Άρα } \widehat{E\eta Z} = \frac{\widehat{E\eta A}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $ZHE$  ( $\widehat{E} = 90^\circ$ ), έχουμε  $\widehat{E\eta Z} = 30^\circ$ , άρα  $EZ = \frac{ZH}{2} \Leftrightarrow ZH = 2EZ$ .

β. Είναι  $\widehat{E\eta\Theta} = \widehat{A\eta\Theta} - \widehat{E\eta A} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ , άρα  $\widehat{E\eta\Theta} = \widehat{E\eta Z}$ .

Οπότε στο τρίγωνο  $\Theta ZH$  το  $HE$  είναι ύψος και διχοτόμος.

Άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές και αφού επιπλέον είναι  $\widehat{Z\eta\Theta} = 60^\circ$ , είναι ισόπλευρο.

γ. Επειδή  $\Theta H \perp A\Delta$  και  $B\Gamma \perp A\Delta$ , έχουμε  $\Theta H \parallel B\Gamma$ , οπότε το  $\Theta HKB$  είναι τραπέζιο.

Είναι  $\widehat{K} = \widehat{H\eta Z} = 60^\circ$ , ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

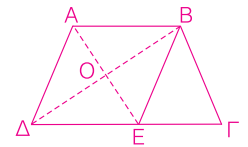
Αφού το  $\Theta HKB$  είναι τραπέζιο και ισχύει  $\widehat{B} = \widehat{K} = 60^\circ$ , το  $\Theta HKB$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

### 398 Θέμα 4 - 1755

α. Επειδή  $AB = A\Delta$ , είναι  $\widehat{A\beta\Delta} = \widehat{A\Delta\beta}$ .

Αφού  $AB \parallel \Gamma\Delta$ , έχουμε  $\widehat{A\beta\Delta} = \widehat{B\Delta\Gamma}$ , ως εντός εναλλάξ.

Άρα  $\widehat{A\Delta\beta} = \widehat{B\Delta\Gamma}$ , επομένως η  $\Delta B$  είναι η διχοτόμος της  $\Delta$ .



β. Από το  $B$  φέρουμε παράλληλη στην  $A\Delta$  που τέμνει την  $\Gamma\Delta$  στο  $E$ .

Το τετράπλευρο  $ABE\Delta$  έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες ( $AB = A\Delta$ ), οπότε είναι ρόμβος.

γ. Επειδή το  $ABE\Delta$  είναι ρόμβος, οι διαγώνιοί του  $AE$  και  $B\Delta$  διχοτομούν τις γωνίες του και τέμνονται κάθετα. Είναι:

- $\widehat{B\theta E} = 90^\circ$
- $\widehat{A\beta\Gamma} = \widehat{B\Delta\Delta} = 120^\circ$
- $\widehat{A\beta\Gamma} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 60^\circ$
- $\widehat{O\beta\Gamma} = \widehat{A\beta\Gamma} - \widehat{A\beta O} = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$
- $\widehat{O\epsilon\Gamma} = 360^\circ - (\widehat{B\theta E} + \widehat{\Gamma} + \widehat{O\beta\Gamma}) = 360^\circ - (90^\circ + 60^\circ + 90^\circ) = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$

### 399 Θέμα 4 - 14882

α. Στο τρίγωνο  $AB\Delta$ , η  $A\Gamma$  είναι διάμεσος και  $A\Gamma = B\Gamma = \frac{B\Delta}{2}$ , οπότε  $\widehat{B\Delta A} = 90^\circ$ .

Είναι  $\widehat{B} = 60^\circ$ , οπότε  $\widehat{\Delta} = 90^\circ - \widehat{B} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ .

β. i. Στο τρίγωνο  $AB\Delta$ , τα  $K, \Lambda$  είναι τα μέσα των  $AB, A\Delta$ , οπότε

- $K\Lambda \parallel B\Delta$ , άρα το  $K\Lambda\Gamma M$  είναι τραπέζιο
- $K\Lambda = \frac{B\Delta}{2} = \frac{2B\Gamma}{2} = B\Gamma = 2M\Gamma$ .

Στα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $AB\Delta$  τα  $K, M$  και  $\Gamma, \Lambda$  είναι τα μέσα των πλευρών τους, οπότε  $KM = \frac{A\Gamma}{2}$  και

$$\Gamma\Lambda = \frac{AB}{2}.$$

Αφού  $AB = A\Gamma$  έχουμε  $KM = \Gamma\Lambda$ .

Άρα το τραπέζιο  $K\Lambda\Gamma M$  είναι ισοσκελές.

- ii. Είναι:
- $\widehat{A\hat{K}\Lambda} = \widehat{B} = 60^\circ$  , ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη
  - $\widehat{\Lambda\hat{K}M} = \widehat{K\hat{M}B}$  , ως εντός εναλλάξ
  - $\widehat{K\hat{M}B} = \widehat{A\hat{\Gamma}B} = 60^\circ$  , ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη

Οπότε  $\widehat{\Lambda\hat{K}M} = 60^\circ = \widehat{A\hat{K}\Lambda}$  .

- Τα τρίγωνα  $K\Lambda M$  και  $A\hat{K}\Lambda$  έχουν:
- $K\Lambda$  κοινή
  - $AK = KM$  , αφού  $AK = \frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma}{2} = KM$
  - $\widehat{\Lambda\hat{K}M} = \widehat{A\hat{K}\Lambda}$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ) , οπότε  $\widehat{K\hat{M}\Lambda} = \widehat{A} = 90^\circ$  .

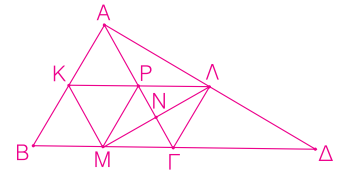
Επομένως το τρίγωνο  $K\Lambda M$  είναι ορθογώνιο.

### 2<sup>ος</sup> τρόπος

Έστω  $P$  το σημείο τομής των  $K\Lambda$  ,  $A\Gamma$  .

Αφού το  $\Lambda$  είναι το μέσο του  $A\Delta$  και  $P\Lambda \parallel \Gamma\Delta$  , το  $P$  είναι το μέσο του  $A\Gamma$  .

$$\text{Είναι } PM = \frac{AB}{2} = AK = \frac{K\Lambda}{2} .$$



Επειδή επιπλέον η  $PM$  είναι διάμεσος στο τρίγωνο  $K\Lambda M$  έχουμε  $\widehat{K\hat{M}\Lambda} = 90^\circ$  , άρα το τρίγωνο  $K\Lambda M$  είναι ορθογώνιο.

## 400 Θέμα 4 - 37161

α. Στο ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  η διάμεσος  $A\Delta$  είναι ύψος και διχοτόμος.

Επειδή το  $K$  ανήκει στη μεσοκάθετο  $A\Delta$  του  $B\Gamma$  έχουμε  $KB = K\Gamma$  .

Οπότε το τρίγωνο  $KB\Gamma$  είναι ισοσκελές.

Επειδή Το  $K$  ανήκει στην  $A\Delta$  διχοτόμο της γωνίας  $\widehat{A}$  έχουμε  $KZ = KE$  , οπότε το τρίγωνο  $ZKE$  είναι ισοσκελές.

- β. Τα ορθογώνια τρίγωνα  $ZAK$  και  $EAK$  έχουν:
- $AK$  κοινή
  - $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

Άρα είναι ίσα, οπότε  $AZ = AE$  .

Επομένως το τρίγωνο  $AZE$  είναι ισοσκελές, με  $\widehat{AZE} = \widehat{AEZ}$

$$\text{Είναι } \widehat{AZE} + \widehat{AEZ} + \widehat{A} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{AZE} = 180^\circ - \widehat{A} \Leftrightarrow \widehat{AZE} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} .$$

$$\text{Το τρίγωνο } AB\Gamma \text{ είναι ισοσκελές, με } \widehat{B} = \widehat{\Gamma} \text{ και έχουμε } \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{B} = 180^\circ - \widehat{A} \Leftrightarrow \widehat{B} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} .$$

Άρα  $\widehat{B} = \widehat{AZE}$  , οι οποίες είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη, οπότε  $ZE \parallel B\Gamma$  .

Επομένως το  $Z\epsilon\Gamma B$  είναι τραπέζιο και επειδή  $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

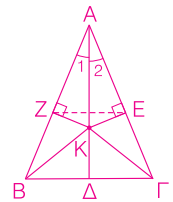
γ. Η απάντηση είναι ελλιπής διότι ο μαθητής έλαβε υπόψη του γωνίες που δεν είναι προσκείμενες σε κάθε πλευρά. Έπρεπε να αναφέρει ότι αφού τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, θα έχουν και τις τρίτες τους γωνίες ίσες, δηλαδή  $\widehat{A\hat{K}B} = \widehat{A\hat{K}\Gamma}$  . Οπότε τα τρίγωνα είναι ίσα με το κριτήριο ΓΠΓ.

## 401 Θέμα 4 - 37086

α. i. Είναι  $AA' \perp \epsilon$  και  $\Gamma\Gamma' \perp \epsilon$  , οπότε  $AA' \parallel \Gamma\Gamma'$  . Άρα το  $AA'\Gamma'\Gamma$  είναι τραπέζιο.

Είναι  $AA' \parallel OO' \parallel \Gamma\Gamma'$  και  $OA = O\Gamma$  , οπότε  $O'A' = O'\Gamma'$  .

Άρα η  $OO'$  είναι διάμεσος του τραpezίου  $AA'\Gamma'\Gamma$  .



Οπότε  $OO' = \frac{AA' + \Gamma\Gamma'}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$  .

ii. Είναι  $BB' \perp \varepsilon$  και  $\Delta\Delta' \perp \varepsilon$  , οπότε  $BB' \perp \Delta\Delta'$  .

Άρα το  $BB'\Delta'\Delta$  είναι τραπέζιο.

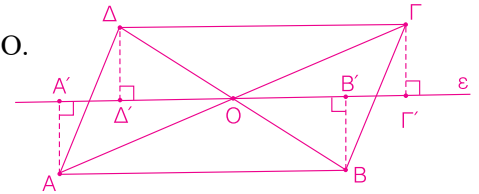
Βρίσκουμε ότι η  $OO'$  είναι διάμεσος και του τραpezίου  $BB'\Delta'\Delta$  .

Οπότε  $OO' = \frac{BB' + \Delta\Delta'}{2} \Leftrightarrow 4 = \frac{2 + \Delta\Delta'}{2} \Leftrightarrow \Delta\Delta' = 6$  .

β. Η ευθεία  $\varepsilon$  είναι παράλληλη στις  $AB, \Gamma\Delta$  και διέρχεται από το κέντρο  $O$ .

Επομένως η ευθεία  $\varepsilon$  είναι μεσοπαράλληλος των  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  .

Τα σημεία  $A, B, \Gamma$  και  $\Delta$  των  $AB, \Gamma\Delta$  ισαπέχουν από τη μεσοπαράλληλό τους, οπότε  $AA' = BB' = \Gamma\Gamma' = \Delta\Delta'$  .



**402 Θέμα 4 - 1770**

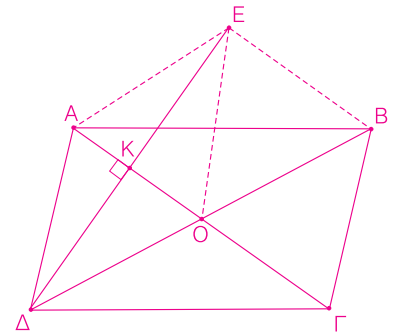
α. Η  $A\Gamma$  είναι μεσοκάθετος του  $\Delta E$  , οπότε  $OE = OD \Leftrightarrow OE = \frac{BD}{2}$  .

β. Στο  $\Delta BE$  η  $EO$  είναι διάμεσος και ίση με  $\frac{BD}{2}$  , οπότε το τρίγωνο είναι

ορθογώνιο με  $\hat{\Delta EB} = 90^\circ$  .

γ. Είναι  $BE \perp \Delta E$  και  $A\Gamma \perp \Delta E$  , οπότε  $BE \parallel A\Gamma$  . Επειδή η  $A\Gamma$  είναι μεσοκάθετος του  $\Delta E$  , έχουμε  $AE = AD \Leftrightarrow AE = B\Gamma$  .

Οπότε το  $AEB\Gamma$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.



**403 Θέμα 4 - 1736**

α. Επειδή  $AB \parallel \Gamma\Delta$  είναι  $\hat{ABE} = \hat{\Gamma} = 30^\circ$  , ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $EAB$  είναι  $\hat{B} = 30^\circ$  , οπότε  $AE = \frac{AB}{2} \Rightarrow AB = 2AE$  .

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $E\Delta\Gamma$  είναι  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$  , οπότε  $E\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow \Gamma\Delta = 2E\Delta$  .

Τα  $K, \Lambda$  είναι μέσα των διαγώνιων του τραpezίου  $AB\Gamma\Delta$  , οπότε

$K\Lambda = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2} \Leftrightarrow K\Lambda = \frac{2E\Delta - 2AE}{2} \Leftrightarrow K\Lambda = \frac{2(E\Delta - AE)}{2} \Leftrightarrow K\Lambda = E\Delta - AE \Leftrightarrow K\Lambda = A\Delta$  .

γ. Είναι  $K\Lambda \parallel AB$  , οπότε για να είναι το  $AB\Lambda K$  παραλληλόγραμμο αρκεί  $K\Lambda = AB$  .

Είναι  $K\Lambda = A\Delta$  , οπότε αρκεί  $A\Delta = AB$  , δηλαδή το τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι ισοσκελές.

**404 Θέμα 4 - 1876**

α. Επειδή τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $BA\Delta$  , είναι ίσα, θα έχουν τις γωνίες της κορυφής ίσες, οπότε έχουμε  $\hat{A} = \hat{B}$  .

Άρα το τρίγωνο  $EAB$  είναι ισοσκελές με  $EA = EB$  .

Επειδή  $A\Gamma = B\Delta$  , έχουμε  $E\Delta = E\Gamma$  , ως διαφορές ίσων τμημάτων.

β. Τα τρίγωνα  $E\Gamma\Delta$  και  $EAB$  είναι ορθογώνια και ισοσκελή, οπότε:

- $E\hat{\Delta}\Gamma = E\hat{\Gamma}\Delta = 45^\circ$
- $E\hat{A}B = E\hat{B}A = 45^\circ$

Επομένως  $E\hat{\Delta}\Gamma = \Delta\hat{B}A$  , οι οποίες είναι εντός εναλλάξ, άρα  $\Delta\Gamma \parallel AB$  .

γ. • Στα ορθογώνια τρίγωνα  $E\Delta\Lambda$  και  $E\Gamma\Lambda$  οι  $E\Lambda$  ,  $E\Lambda$  είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, επομένως

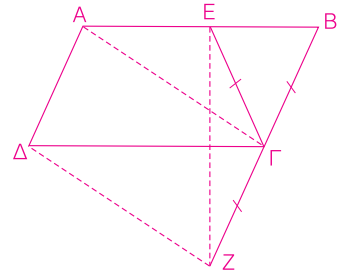
$E\Lambda = \frac{E\Delta}{2}$  και  $E\Lambda = \frac{E\Gamma}{2}$  .

Οπότε  $E\Lambda = E\Lambda$  , άρα το τρίγωνο  $E\Lambda\Gamma$  είναι ισοσκελές.

• Είναι  $\Delta\Gamma \parallel AB$  οπότε το  $\Delta\Gamma B A$  είναι τραπέζιο και επειδή η  $K\Lambda$  είναι διάμεσος, έχουμε  $K\Lambda \parallel AB$  .

**405 Θέμα 4 - 37130**

α. Στο τρίγωνο EBZ η ΕΓ είναι διάμεσος και  $ΕΓ = ΓΒ = \frac{BZ}{2}$ , οπότε



$\widehat{B\acute{E}Z} = 90^\circ$ .

β. Επειδή  $AE \parallel \Gamma\Delta$ , το AEGΔ είναι τραπέζιο.

Έχουμε  $ΓΕ = ΓΒ$  και  $ΓΒ = A\Delta$ , οπότε  $ΓΕ = A\Delta$ , άρα το AEGΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

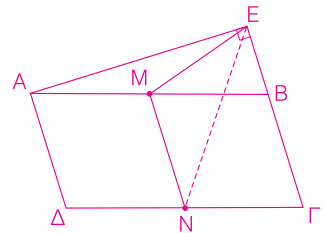
γ. Είναι  $B\Gamma \parallel A\Delta$ , οπότε  $\Gamma Z \parallel A\Delta$ , άρα το AΓZΔ είναι παραλληλόγραμμο.

**406 Θέμα 4 - 1786**

α. Είναι  $MB \parallel \Gamma N$  και  $MB = \Gamma N$ , ως μισά ίσων τμημάτων.

Επειδή  $MB \parallel \Gamma N$ , το MBΓN είναι παραλληλόγραμμο.

Είναι  $MB = \frac{AB}{2} = \frac{2B\Gamma}{2} = B\Gamma$ . Άρα το MBΓN είναι ρόμβος.



β. Επειδή το MBΓN είναι ρόμβος έχουμε  $MN \parallel B\Gamma$ , οπότε το MEGN είναι τραπέζιο. Στο ορθογώνιο τρίγωνο EAB, το EM είναι διάμεσος προς την

υποτείνουσα, οπότε  $EM = \frac{AB}{2} = MB = \Gamma N$ .

Οπότε το MEGN είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ. Επειδή  $ME = MN$  έχουμε  $\widehat{M\acute{E}N} = \widehat{M\acute{N}E}$ . Αφού  $MN \parallel E\Gamma$ , έχουμε  $\widehat{M\acute{N}E} = \widehat{N\acute{E}\Gamma}$ , ως εντός εναλλάξ.

Άρα  $\widehat{M\acute{E}N} = \widehat{N\acute{E}\Gamma}$ , οπότε η EN είναι διχοτόμος της  $\widehat{M\acute{E}\Gamma}$ .

**407 Θέμα 4 - 13838**

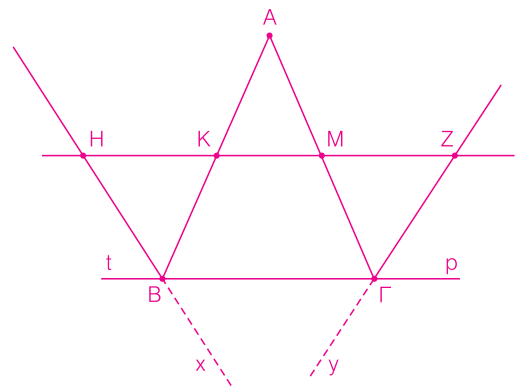
α. Στο τρίγωνο ABΓ τα K και M είναι τα μέσα των AB και AΓ αντίστοιχα, άρα  $KM \parallel B\Gamma$ . Το KMGΒ είναι τραπέζιο αφού  $KM \parallel B\Gamma$ . Είναι  $KB = M\Gamma$ , ως μισά των ίσων τμημάτων AB και AΓ.

Άρα το KMGΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β. Είναι: •  $KM \parallel B\Gamma$ , άρα και  $HZ \parallel B\Gamma$ . Επιπλέον οι BH και ΓZ τεμνόμενες από τη BΓ σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά γωνίες τους ( $\widehat{B\acute{x}}$  και  $\widehat{B\acute{\gamma}}$ ) με άθροισμα μικρότερο από 2 ορθές, αφού:

•  $\widehat{B\acute{x}} = \widehat{H\acute{B}t} = \frac{\widehat{B\epsilon\xi}}{2}$

•  $\widehat{B\acute{\gamma}} = \widehat{Z\acute{\Gamma}p} = \frac{\widehat{\Gamma\epsilon\xi}}{2}$



Το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές, οπότε οι ίσες γωνίες  $\widehat{B}$  και  $\widehat{\Gamma}$  είναι οξείες άρα οι εξωτερικές τους  $\widehat{B\epsilon\xi}$  και  $\widehat{\Gamma\epsilon\xi}$  είναι αμβλείες επομένως:

$\widehat{B\epsilon\xi} < 180^\circ \Leftrightarrow \frac{\widehat{B\epsilon\xi}}{2} < 90^\circ$  και  $\widehat{\Gamma\epsilon\xi} < 180^\circ \Leftrightarrow \frac{\widehat{\Gamma\epsilon\xi}}{2} < 90^\circ$

Άρα  $\frac{\widehat{B\epsilon\xi}}{2} + \frac{\widehat{\Gamma\epsilon\xi}}{2} < 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{H\acute{B}t} + \widehat{Z\acute{\Gamma}p} < 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{B\acute{x}} + \widehat{B\acute{\gamma}} < 180^\circ$ . Οι BH και ΓZ τέμνονται, άρα το τετράπλευρο BΓZH είναι τραπέζιο με βάσεις BΓ και ZH.

Έχουμε: •  $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} \Leftrightarrow \widehat{B\epsilon\xi} = \widehat{\Gamma\epsilon\xi} \Leftrightarrow \frac{\widehat{B\epsilon\xi}}{2} = \frac{\widehat{\Gamma\epsilon\xi}}{2} \Leftrightarrow \widehat{K\acute{B}H} = \widehat{M\acute{\Gamma}Z}$

•  $\widehat{\Gamma\acute{B}H} = \widehat{B\acute{\Gamma}Z}$  ως άθροισμα ίσων γωνιών  $\widehat{B} + \widehat{K\acute{B}H}$  και  $\widehat{\Gamma} + \widehat{M\acute{\Gamma}Z}$ .

Άρα το τραπέζιο BΓZH είναι ισοσκελές, αφού έχει τις προσκείμενες στη βάση BΓ γωνίες του  $\widehat{B\acute{B}H}$  και  $\widehat{B\acute{\Gamma}Z}$  ίσες.

**408 Θέμα 4 - 1784**

α. Επειδή  $AZ = A\Delta$ , το  $\hat{\Delta}AZ$  είναι ισοσκελές, οπότε  $\hat{AZ}\Delta = \hat{A}\Delta Z$ .

Στο  $\hat{\Delta}AZ$  είναι  $\hat{A}\Delta Z + \hat{AZ}\Delta + \hat{\Delta}AZ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{AZ}\Delta + \varphi = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{A}\Delta Z = 180^\circ - \varphi \Leftrightarrow \hat{AZ}\Delta = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}$ .

β. Επειδή  $A\Delta // BE$ , έχουμε  $\hat{ZBE} + \varphi = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{ZBE} = 180^\circ - \varphi$ .

Αφού το  $BZE$  είναι ισοσκελές, έχουμε  $\hat{EZB} = \hat{ZEB}$ .

Στο  $BZE$  είναι  $\hat{EZB} + \hat{ZEB} + \hat{ZBE} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{EZB} + \hat{EZB} + 180^\circ - \varphi = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{EZB} = \varphi \Leftrightarrow \hat{EZB} = \frac{\varphi}{2}$ .

γ. Είναι  $\hat{\Delta ZE} = 180^\circ - \hat{AZ}\Delta - \hat{EZB} = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{\varphi}{2} = 180^\circ - 90^\circ + \frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi}{2} = 90^\circ$ .

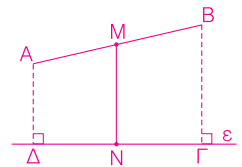
Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $\Delta ZE$  η  $ZO$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε  $ZO = \frac{\Delta E}{2} = O\Delta = OE$ .

Επειδή:

- $AZ = A\Delta$  και  $OZ = O\Delta$ , η  $AO$  είναι η μεσοκάθετος του  $\Delta Z$ .
- $BZ = BE$  και  $OZ = OE$ , η  $BO$  είναι η μεσοκάθετος του  $ZE$ .

**409 Θέμα 4 - 37084**

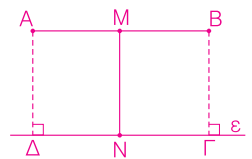
α. i. 1. Αν  $A\Delta < B\Gamma$ , τότε  $A\Delta \neq B\Gamma$  άρα το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  δεν είναι παραλληλόγραμμο οπότε έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες και είναι τραπέζιο.



2. Αν  $A\Delta = B\Gamma$ , τότε  $A\Delta // B\Gamma$ .

Οπότε το  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο και επειδή  $\hat{A} = 90^\circ$  είναι ορθογώνιο.

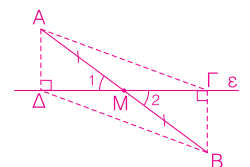
ii. • Αν  $A\Delta < B\Gamma$ , τότε το  $MN$  είναι η διάμεσος του τραπέζιου  $AB\Gamma\Delta$ , οπότε  $MN = \frac{A\Delta + B\Gamma}{2}$ .



• Αν  $A\Delta = B\Gamma$ , τότε  $MN = A\Delta = B\Gamma$ .

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα  $\Delta AM$  και  $\Gamma BM$  έχουν:

- $MA = MB$
- $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$



Οπότε είναι ίσα, άρα  $M\Delta = M\Gamma$

Επομένως το  $M$  είναι μέσο και του  $\Gamma\Delta$ , οπότε τα  $M, N$  ταυτίζονται.

Επειδή  $MA = MB$  και  $M\Delta = M\Gamma$  το  $A\Gamma B\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο.

Επειδή  $AM > M\Delta$  και  $MB > M\Gamma$  θα είναι  $AM + MB > M\Delta + M\Gamma \Leftrightarrow AB > \Gamma\Delta$ .

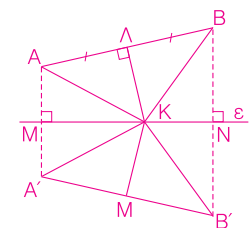
Άρα το  $A\Gamma B\Delta$  δεν έχει ίσες διαγώνιες οπότε δεν είναι ορθογώνιο.

**410 Θέμα 4 - 1735**

α. Επειδή  $AA' \perp \varepsilon$  και  $BB' \perp \varepsilon$ , είναι  $AA' // BB'$ .

β. Επειδή η  $K\Lambda$  είναι η μεσοκάθετος του  $AB$ , έχουμε  $KA = KB$ . Αφού η ευθεία  $\varepsilon$  είναι η μεσοκάθετος των  $AA'$  και  $BB'$  έχουμε  $KA = KA'$  και  $KB = KB'$ .

Οπότε  $KA' = KB'$ , άρα το  $K$  ανήκει στη μεσοκάθετο του  $A'B'$ .



γ. Για να είναι το τετράπλευρο  $ABB'A'$  ορθογώνιο, πρέπει  $\hat{A} = 90^\circ$ .

Οπότε  $AB \perp AA'$  και αφού  $\varepsilon \perp AA'$ , θα έχουμε  $AB // \varepsilon$ .

**411 Θέμα 2 - 1581**

α. Η επίκεντρη γωνία  $x$  και η εγγεγραμμένη γωνία  $\hat{A}$  βαίνουν στο ίδιο τόξο, οπότε  $x = 2\hat{A} = 2 \cdot 44^\circ = 88^\circ$ .



β. Επειδή  $\widehat{B\hat{O}D} = 88^\circ$ , είναι  $\widehat{B\hat{G}D} = 88^\circ$ , άρα  $\widehat{B\hat{A}D} = 360^\circ - 88^\circ = 272^\circ$ . Οπότε  $y = \frac{272^\circ}{2} = 136^\circ$ .

#### 412 Θέμα 2 - 13441

α. Η  $\hat{\Gamma}$  είναι εγγεγραμμένη γωνία του κύκλου που βαίνει στο τόξο AB, άρα  $\hat{\Gamma} = \frac{64^\circ}{2} = 32^\circ$ .

Στο τρίγωνο ABΓ είναι  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + 74^\circ + 32^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 74^\circ$ .

β. Το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές, γιατί έχει δύο ίσες γωνίες, τις  $\hat{A} = \hat{B} = 74^\circ$ .

γ. Το σημείο M είναι το μέσο του τόξου AG, άρα  $\widehat{AM} = \widehat{MG}$  είναι ίσα, οπότε  $\widehat{ABM} = \widehat{GBM}$ , γιατί είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν σε ίσα τόξα.

Άρα η BM είναι διχοτόμος της γωνίας B.

#### 413 Θέμα 2 - 12638

α. Η γωνία  $\hat{\Gamma}$  είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο, που βαίνει στο τόξο AB άρα  $\hat{\Gamma} = \frac{AB}{2} - \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$ .

β. Στο τρίγωνο BΓΔ είναι:  $\hat{B} + \hat{\Gamma} + \widehat{B\hat{D}\hat{G}} = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + 30^\circ + \widehat{B\hat{D}\hat{G}} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{B\hat{D}\hat{G}} = 100^\circ$ .

Επομένως η  $\widehat{A\hat{D}O} = 100^\circ$ , ως κατά κορυφήν της.

#### 414 Θέμα 2 - 13753

α. Η γωνία BΑΓ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικόκλιο οπότε  $\widehat{B\hat{A}\hat{G}} = 90^\circ$ .

β. Η BΓ είναι διάμετρος του κύκλου, επομένως  $\widehat{B\hat{D}} + \widehat{D\hat{B}\hat{G}} = 180^\circ \Leftrightarrow 2x + x = 180^\circ \Leftrightarrow 3x = 180^\circ \Leftrightarrow x = 60^\circ$ .

γ. Η γωνία B $\hat{O}$ D είναι επίκεντρη η οποία βαίνει στο τόξο B $\hat{D}$ . Άρα  $\widehat{B\hat{O}D} = 2x = 120^\circ$

#### 415 Θέμα 2 - 1663

Επειδή  $\widehat{B\hat{A}D} = \widehat{G\hat{A}D}$ , είναι  $\widehat{B\hat{D}} = \widehat{D\hat{B}\hat{G}}$ , οπότε  $B\hat{D} = D\hat{B}\hat{G}$ .

Είναι  $\widehat{A\hat{B}D} = \widehat{A\hat{G}D} = 90^\circ$ , διότι είναι εγγεγραμμένες και βαίνουν σε ημικόκλια.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ABΔ και AΔΓ έχουν:

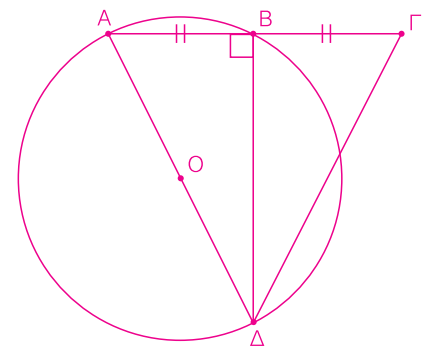
- $B\hat{D} = D\hat{B}\hat{G}$
- AΔ κοινή

Άρα είναι ίσα.

#### 416 Θέμα 2 - 13740

α. Στο τρίγωνο ΔΑΓ το τμήμα ΔB είναι διάμεσος και ύψος, άρα το ΔΑΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ, επομένως  $\Delta A = \Delta G$ .

β. Η γωνία A $\hat{B}D$  είναι εγγεγραμμένη και επειδή είναι ορθή, θα βαίνει σε ημικόκλιο. Δηλαδή η AΔ είναι διάμετρος του κύκλου.



#### 417 Θέμα 2 - 12642

α. Η γωνία BΔΓ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο και βαίνει στο τόξο BΓ, οπότε θα ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης. Άρα  $\widehat{B\hat{D}\hat{G}} = \frac{\widehat{B\hat{O}\hat{G}}}{2} = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ$ .

**β.** Επειδή η  $ΑΔ$  είναι διάμετρος, η γωνία  $ΑΒΔ$  ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, θα είναι ορθή.

Άρα  $\widehat{ΑΒΔ} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ΔΒΕ} = 90^\circ$ . Είναι  $\widehat{ΒΔΓ} = 25^\circ$ .

Οι γωνίες  $ΒΔΕ$  και  $ΒΕΔ$  είναι συμπληρωματικές, οπότε  $\widehat{ΒΕΔ} = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$ .

Άρα  $\widehat{ΑΕΔ} = 65^\circ$ .

### 418 Θέμα 2 - 13756

**α.** Η γωνία  $\widehat{ΑΚΒ}$  είναι επίκεντρη και η γωνία  $\widehat{ΑΓΒ}$  είναι εγγεγραμμένη που βαίνουν στο ίδιο τόξο  $ΑΒ$ .

Άρα  $\widehat{ΑΚΒ} = 2\widehat{ΑΓΒ}$ .

**β.** Είναι  $ΚΑ = ΚΒ = ρ$ , άρα το τρίγωνο  $ΑΚΒ$  είναι ισοσκελές.

**γ.** Στο τρίγωνο  $ΚΑΒ$ :

$$\widehat{ΚΑΒ} + \widehat{ΑΒΚ} + \widehat{ΑΚΒ} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{ΚΑΒ} + \widehat{ΚΑΒ} + 2\widehat{ΑΓΒ} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{ΚΑΒ} + 2\widehat{ΑΓΒ} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{ΚΑΒ} + \widehat{ΑΓΒ} = 90^\circ$$

### 419 Θέμα 2 - 1580

**α.** Η εγγεγραμμένη γωνία  $\widehat{ΒΓΔ}$  και η επίκεντρη  $\widehat{ΒΟΔ}$  βαίνουν στο ίδιο τόξο, οπότε

$$\widehat{ΒΓΔ} = \frac{\widehat{ΒΟΔ}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ.$$

**β.** Στο τρίγωνο  $ΒΜΓ$  η  $\widehat{ΒΓΔ}$  είναι εξωτερική, οπότε  $\widehat{ΒΓΔ} = \widehat{ΓΒΜ} + \omega \Leftrightarrow 60^\circ = 15^\circ + \omega \Leftrightarrow \omega = 45^\circ$ .

### 420 Θέμα 2 - 1673

**α.** Επειδή  $ΟΑ = ΚΑ = ΟΚ = ρ$ , το τρίγωνο  $ΟΑΚ$  είναι ισόπλευρο.

- β.** Είναι:
- $\widehat{ΒΑΚ} = 90^\circ$ , ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο.
  - $\widehat{Κ} = 60^\circ$ , αφού το τρίγωνο  $ΟΑΚ$  είναι ισόπλευρο
  - $\widehat{ΒΑΚ} + \widehat{Κ} + \widehat{Β} = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 60^\circ + \widehat{Β} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{Β} = 30^\circ$

### 421 Θέμα 2 - 1696

**α.** Είναι  $ΒΑ = ΚΓ = ΚΑ = ΚΒ = ρ$ , άρα το τρίγωνο  $ΒΚΑ$  είναι ισόπλευρο.

- β.** Είναι:
- $\widehat{ΒΚΑ} = 60^\circ$ , αφού το  $\widehat{ΒΚΑ}$  είναι ισόπλευρο
  - $\widehat{ΒΔΑ} = \frac{\widehat{ΒΚΑ}}{2} = 30^\circ$

- γ.** Είναι:
- $\widehat{ΒΑΓ} = 90^\circ$ , ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο
  - $\widehat{ΑΒΓ} = 60^\circ$ , αφού το  $\widehat{ΒΚΑ}$  είναι ισόπλευρο
  - $\widehat{ΒΓΑ} = \widehat{ΒΔΑ} = 30^\circ$ .

### 422 Θέμα 2 - 1561

- α.** Είναι:
- $\widehat{ΒΑΓ} = \frac{\widehat{ΒΔΓ}}{2} = \frac{160^\circ}{2} = 80^\circ$
  - $\widehat{\Gamma} = \widehat{\phi} = 30^\circ$ , ως γωνία χορδής και εφαπτομένης
  - $\widehat{Β} = 180^\circ - \widehat{ΒΑΓ} - \widehat{\Gamma} = 180^\circ - 80^\circ - 30^\circ = 70^\circ$ .

**β.** Είναι  $\widehat{Β} = 70^\circ$ , οπότε  $\frac{\widehat{ΑΕΓ}}{2} = 70^\circ \Leftrightarrow \widehat{ΑΕΓ} = 140^\circ$ .

**423 Θέμα 2 - 13747**

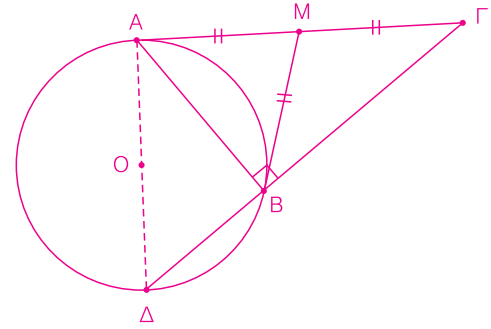
**α.** Είναι: •  $MA = MB$ , ως εφαπτόμενα τμήματα

•  $MG = AM$ , άρα  $MA = MB = MG$

Δηλαδή η  $BM$ , που είναι διάμεσος προς την πλευρά  $AG$  στο τρίγωνο  $BAG$ , ισούται με το μισό της  $AG$ .

Οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτεινούσα την πλευρά  $AG$  και  $\hat{A}B\Gamma = 90^\circ$ .

**β.** Είναι  $\hat{A}B\Gamma = 90^\circ$ , οπότε και  $\hat{A}B\Delta = 90^\circ$ , η οποία είναι εγγεγραμμένη γωνία και επειδή είναι ορθή θα βαίνει σε ημικύκλιο. Δηλαδή η  $A\Delta$  είναι διάμετρος επομένως τα σημεία  $A, \Delta$  είναι αντιδιαμετρικά.

**424 Θέμα 2 - 12637**

**α.** Η  $\hat{B}A\chi$  είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης και η  $\hat{\Gamma}$  είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής, επομένως  $\hat{\Gamma} + \hat{B}A\chi = 35^\circ$ .

**β.** Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$ , η γωνία του  $\hat{A}$  είναι εγγεγραμμένη, που βαίνει στο τόξο  $B\Gamma$ , άρα  $\hat{A} = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ$ .

Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 55^\circ + 35^\circ = 90^\circ$ , οπότε και  $\hat{B} = 90^\circ$ , επομένως το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο.

**425 Θέμα 2 - 13754**

**α.** Η γωνία  $BAG$  είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, επομένως  $\hat{B}A\Gamma = 90^\circ$ .

**β.** Είναι  $\hat{B}A\Delta = \hat{B}\Gamma\Delta = 50^\circ$ , ως εγγεγραμμένες και βαίνουν στο ίδιο τόξο  $B\Delta$ .

**γ.** Η γωνία  $\hat{\Delta}_1$  σχηματίζεται από τη χορδή  $\Delta\Gamma$  του κύκλου και την εφαπτομένη του στο σημείο  $\Delta$ .

Επομένως  $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}A\Gamma = \hat{B}A\Gamma - \hat{B}A\Delta = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$ . Άρα  $\hat{\Delta}_1 = 40^\circ$ .

**426 Θέμα 2 - 1665**

**α.** Η εφαπτόμενη  $B\Gamma$  είναι κάθετη στην ακτίνα  $OB$  στο σημείο επαφής, άρα  $\hat{\Gamma}B\hat{O} = 90^\circ$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $B\Gamma\hat{O}$  ( $\hat{B} = 90^\circ$ ), έχουμε  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ , οπότε  $OB = \frac{O\Gamma}{2} \Rightarrow OA = \frac{O\Gamma}{2} \Rightarrow O\Gamma = 2OA$ .

**β.** Είναι  $\hat{B}\Delta A = 90^\circ$ , ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $B\Gamma\hat{O}$  είναι  $\hat{B}\hat{O}\Gamma + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B}\hat{O}\Gamma + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B}\hat{O}\Gamma = 60^\circ$ .

Είναι  $OB = OD$  και  $\hat{B}\hat{O}\Delta = 60^\circ$ , οπότε το τρίγωνο  $OB\Delta$  είναι ισόπλευρο, άρα  $B\Delta = OB$ .

Έχουμε  $\hat{A} = \frac{\hat{B}\hat{O}\Delta}{2} = 30^\circ$ , ως εγγεγραμμένη γωνία και επίκεντρη που βαίνουν στο ίδιο τόξο.

Τα ορθογώνια τρίγωνα  $B\Gamma\hat{O}$  και  $B\Delta A$  έχουν:

- $OB = B\Delta$
- $\hat{\Gamma} = \hat{A}$

Άρα είναι ίσα, οπότε  $B\Gamma = A\Delta$ .

**427 Θέμα 2 - 1626**

**α.** Είναι: •  $O\Gamma \perp \Gamma\Delta$ , άρα  $\hat{O}\Gamma\Delta = 90^\circ$

•  $\hat{\Gamma}\hat{O}\Delta = 2\hat{A} = 60^\circ$ , ως εγγεγραμμένη γωνία και επίκεντρη που βαίνουν στο ίδιο τόξο

•  $\hat{O}\hat{\Gamma}\Delta + \hat{\Gamma}\hat{O}\Delta + \hat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 60^\circ + \hat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 30^\circ$

**β.** Επειδή  $\hat{A} = \hat{\Delta}$  είναι  $\Gamma A = \Gamma \Delta$ .

Είναι  $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = \hat{A} = 30^\circ$ , ως γωνία χορδής και εφαπτομένης

Οπότε  $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = \hat{\Delta} = 30^\circ$ , άρα το τρίγωνο  $B\Gamma\Delta$  είναι ισοσκελές.

### 428 Θέμα 2 - 1672

**α.** Είναι:

•  $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 90^\circ$ , ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικόκλιο

•  $\hat{B} = \hat{\Gamma}\hat{A}x = 45^\circ$ , ως γωνία χορδής και εφαπτομένης

•  $\hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{B} - \hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ$

**β.** Έχουμε  $B\Gamma \parallel \Delta E$ , οπότε το  $B\Gamma E\Delta$  είναι τραπέζιο. Επειδή επιπλέον είναι  $\hat{B} = \hat{\Gamma} (= 45^\circ)$ , το  $B\Gamma E\Delta$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

### 429 Θέμα 2 - 1530

**α.** Η  $x\hat{A}\hat{\Delta}$  σχηματίζεται από τη χορδή  $A\Delta$  και την εφαπτομένη  $Ax$ , οπότε  $x\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = 40^\circ$ .

Είναι: •  $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}\hat{A}x - x\hat{A}\hat{\Delta} = 85^\circ - 40^\circ = 45^\circ$

•  $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}\hat{A}\hat{\Gamma} = 45^\circ$ , ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο

**β.** Είναι  $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 40^\circ + 45^\circ = 85^\circ$

Στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  έχουμε

$\hat{\phi} + \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \phi = 180^\circ - \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} \Leftrightarrow \phi = 180^\circ - 85^\circ \Leftrightarrow \phi = 95^\circ$ .

### 430 Θέμα 2 - 1703

**α.** Είναι  $\hat{B}\hat{\Delta} + \hat{\Delta}\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 2x + x = 180^\circ \Leftrightarrow 3x = 180^\circ \Leftrightarrow x = 60^\circ$ .

**β.** Επειδή  $\hat{B}\hat{\Delta} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$ , έχουμε  $\hat{B}\hat{O}\hat{\Delta} = 120^\circ$ .

**γ.** Είναι  $\hat{B}\hat{A}\hat{\Delta} = \frac{\hat{B}\hat{O}\hat{\Delta}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$ .

### 431 Θέμα 2 - 1695

**α.** Είναι: •  $x = \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 30^\circ$ , ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο  $\widehat{A\Gamma}$ .

•  $y = 2x = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$ , αφού η  $y$  είναι επίκεντρη και η  $x$  εγγεγραμμένη που βαίνουν στο ίδιο τόξο  $\widehat{A\Gamma}$ .

•  $\omega = \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 30^\circ$ , αφού η  $\omega$  σχηματίζεται από τη χορδή  $A\Gamma$  και την εφαπτομένη  $\epsilon$  στο  $\Gamma$  που στο αντίστοιχο τόξο βαίνει η εγγεγραμμένη  $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ .

**β.** Επειδή  $OA = OG = \rho$  και  $\hat{A}\hat{O}\hat{\Gamma} = 60^\circ$ , το  $\hat{O}\hat{A}\hat{\Gamma}$  είναι ισόπλευρο.

### 432 Θέμα 2 - 1769

**α.** Οι  $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{\Gamma}$ ,  $\hat{\Delta}\hat{B}\hat{\Gamma}$  είναι ίσες ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο  $\widehat{\Delta\Gamma}$ .

**β.** Είναι  $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} = 90^\circ$ , ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ημικόκλιο.

Τα  $A\Delta E Z$  και  $E Z B\Gamma$  είναι εγγράψιμα διότι:

•  $\hat{\Delta} + \hat{Z} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

•  $\hat{\Gamma} + \hat{Z} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

- γ. Είναι:
- $\widehat{\Delta Z E} = \widehat{\Delta \hat{A} E}$ , αφού το  $\Delta \Delta E Z$  είναι εγγράμιμο
  - $\widehat{E Z \Gamma} = \widehat{E B \Gamma}$ , αφού το  $E Z B \Gamma$  είναι εγγράμιμο
  - $\widehat{\Delta \hat{A} E} = \widehat{E \hat{B} \Gamma}$ , από το α. ερώτημα

Άρα  $\widehat{\Delta Z E} = \widehat{E Z \Gamma}$ , οπότε η  $EZ$  είναι η διχοτόμος της  $\widehat{\Delta Z \Gamma}$ .

### 433 Θέμα 2 - 1712

α. i. Το  $\Gamma$  είναι μέσο του  $\widehat{A B}$ , άρα  $\widehat{A \Gamma} = \widehat{\Gamma B}$ , οπότε  $A \Gamma = B \Gamma$ . Αφού το  $A \Gamma B \Delta$  είναι εγγεγραμμένο, έχουμε  $\widehat{\Gamma \hat{A} \Delta} = \widehat{\Gamma \hat{B} E}$ .

- Τα τρίγωνα  $\Delta \Delta \Gamma$  και  $B E \Gamma$  έχουν:
- $A \Gamma = B \Gamma$
  - $\Delta \Delta = B E$
  - $\widehat{\Gamma \hat{A} \Delta} = \widehat{\Gamma \hat{B} E}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

ii. Είναι  $\widehat{\Delta \hat{\Gamma} E} = \widehat{\Delta \hat{\Gamma} B} + \widehat{B \hat{\Gamma} E} \stackrel{a.i.}{=} \widehat{\Delta \hat{\Gamma} B} + \widehat{A \hat{\Gamma} \Delta} = \widehat{A \hat{\Gamma} B} = 90^\circ$ , αφού η  $A \hat{\Gamma} B$  είναι εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικόκλιο. Οπότε  $\Gamma \Delta \perp \Gamma E$ .

β. Αν  $\Gamma \Delta$  διάμετρος, τότε  $O \Gamma \perp \Gamma E$ , οπότε η  $\Gamma E$  είναι εφαπτομένη του κύκλου.

### 434 Θέμα 4 - 13520

α. • Οι ακτίνες  $O A$  και  $O B$  είναι κάθετες στα εφαπτόμενα τμήματα  $P A$  και  $P B$ , οπότε τα τρίγωνα  $O A P$  και  $O B P$  είναι ορθογώνια.

• Η  $P O$  είναι διχοτόμος της  $\widehat{A P B} = 60^\circ$ , οπότε  $\hat{P}_1 = \hat{P}_2 = 30^\circ$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $O A P$  είναι  $\hat{P}_1 = 30^\circ$ , οπότε  $O A = \frac{O P}{2} \Leftrightarrow P O = 2\rho$

β. • Στο τρίγωνο  $O P A$  έχουμε:

$$\hat{O}_1 + \hat{O A P} + \hat{O P A} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{O}_1 = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ \Leftrightarrow \hat{O}_1 = 60^\circ.$$

• Είναι  $O A = O \Gamma = \rho$ , οπότε το τρίγωνο  $O \Gamma A$  είναι ισοσκελές με μία γωνία  $60^\circ$ , άρα είναι ισόπλευρο. Επομένως  $\hat{\Gamma}_1 = 60^\circ$  (1).

• Στο τρίγωνο  $O P B$  έχουμε:

$$\hat{O}_2 + \hat{O B P} + \hat{O P B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{O}_2 = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ \Leftrightarrow \hat{O}_2 = 60^\circ.$$

• Είναι  $O B = O \Gamma = \rho$ , οπότε το τρίγωνο  $O \Gamma B$  είναι ισοσκελές με μία γωνία  $60^\circ$ , άρα ισόπλευρο.

Επομένως,  $\hat{\Gamma}_2 = 60^\circ$  (2).

Από (1) και (2) έχουμε ότι  $\widehat{A \hat{\Gamma} B} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$ .

γ. Τα τρίγωνα  $O \Gamma A$  και  $O \Gamma B$  είναι ισόπλευρα, οπότε  $A \Gamma = O A = O \Gamma = O B$ .

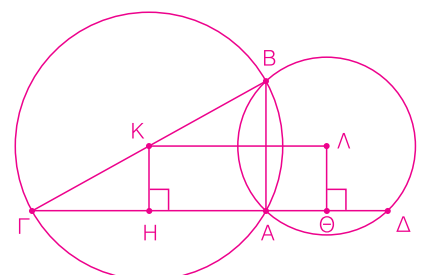
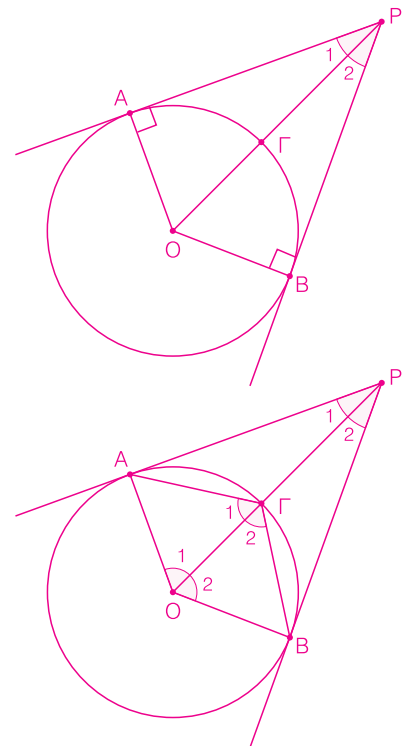
Το τετράπλευρο  $O A \Gamma B$  είναι ρόμβος γιατί έχει όλες τις πλευρές του ίσες. Επομένως, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

### 435 Θέμα 4 - 12419

α. Έστω οι κύκλοι  $(K, R)$  και  $(\Lambda, r)$  με  $R > r$ , οι οποίοι τέμνονται στα σημεία  $A, B$  και η τέμνουσα  $\Gamma \Delta$  παράλληλη στη διάκεντρο  $K \Lambda$ .

Φέρουμε τα αποστήματα  $K H$  και  $\Lambda \Theta$  των χορδών  $A \Gamma$  και  $A \Delta$  αντίστοιχα.

Το τετράπλευρο  $K \Lambda \Theta H$  είναι παραλληλόγραμμο, διότι οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες ( $K \Lambda // H \Theta$  από υπόθεση και  $K H // H \Theta$  αφού  $K H, \Lambda \Theta$  είναι κάθετα στη  $\Gamma \Delta$ ). Οπότε  $K \Lambda = H \Theta$ .



Επίσης, τα σημεία Η, Θ είναι μέσα των χορδών ΑΓ και ΑΔ αντίστοιχα.

Οπότε έχουμε:  $\Gamma\Delta = \Gamma\text{A} + \text{A}\Delta = 2\text{H}\text{A} + 2\text{A}\Theta = 2(\text{H}\text{A} + \text{A}\Theta) = 2\text{H}\Theta = 2\text{K}\Lambda$

**β.** Η διάκεντρος ΚΛ των δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους ΑΒ, οπότε  $\text{A}\text{B} \perp \text{K}\Lambda$ . Αφού,  $\text{K}\Lambda // \Gamma\Delta$  έχουμε,  $\text{A}\text{B} \perp \text{K}\Lambda$ .

Επομένως, η γωνία  $\widehat{\text{B}\Lambda\Gamma}$  είναι ορθή και εγγεγραμμένη στον κύκλο (Κ, R), οπότε η ΒΓ είναι διάμετρος.

Άρα, τα σημεία Β και Γ είναι αντιδιαμετρικά.

### 436 Θέμα 4 - 1739

**α.** Είναι: •  $\widehat{\text{A}\text{B}} = \widehat{\text{A}\Gamma} = 120^\circ$   
•  $\widehat{\text{B}\Gamma} = 360^\circ - 120^\circ - 120^\circ = 120^\circ$

Οπότε  $\widehat{\text{A}\text{B}} = \widehat{\text{B}\Gamma} = \widehat{\text{A}\Gamma}$ , άρα  $\text{A}\text{B} = \text{B}\Gamma = \Gamma\text{A}$

Επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

**β.** Είναι  $\widehat{\text{A}\Delta} = \widehat{\text{A}\text{E}} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$ , οπότε  $\text{A}\Delta = \text{A}\text{E}$ .

Είναι  $\widehat{\Delta\text{A}\text{B}} = \frac{\widehat{\text{B}\Delta}}{2} = 30^\circ$  και  $\widehat{\text{A}\Delta\text{E}} = \frac{\widehat{\text{A}\text{E}}}{2} = 30^\circ$ .

Όμοια  $\widehat{\text{E}\text{A}\text{H}} = \widehat{\text{A}\text{E}\text{H}} = 30^\circ$ , οπότε  $\widehat{\text{A}\text{Z}\Delta} = \widehat{\text{A}\text{H}\text{E}} = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ .

Τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΗΕ έχουν:

- $\text{A}\Delta = \text{A}\text{E}$
- $\widehat{\Delta\text{A}\text{Z}} = \widehat{\text{H}\text{A}\text{E}}$
- $\widehat{\text{A}\Delta\text{Z}} = \widehat{\text{A}\text{E}\text{H}}$

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ).

**γ.** Στο τρίγωνο ΑΖΗ, είναι:

- $\widehat{\text{A}} = \frac{\widehat{\text{B}\Gamma}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$
- $\widehat{\text{Z}} = 180^\circ - \widehat{\text{A}\text{Z}\Delta} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$
- $\widehat{\text{H}} = 180^\circ - \widehat{\text{A}\text{H}\text{E}} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$
- $\widehat{\text{A}} = \widehat{\text{Z}} = \widehat{\text{H}} = 60^\circ$

Οπότε είναι ισόπλευρο, άρα  $\text{A}\text{Z} = \text{Z}\text{H} = \text{A}\text{H}$ .

Αφού  $\Delta\text{Z} = \text{A}\text{Z}$ ,  $\text{H}\text{E} = \text{A}\text{H}$  έχουμε  $\Delta\text{Z} = \text{Z}\text{H} = \text{H}\text{E}$ .

Οπότε η ΔΕ τριχοτομείται από τις ΑΒ και ΑΓ.

### 437 Θέμα 4 - 1720

**α.** Είναι: •  $\text{Z}\text{B} = \text{Z}\Gamma$ , οπότε το τρίγωνο ΖΒΓ είναι ισοσκελές.  
•  $\widehat{\text{Z}\text{B}\Gamma} = \widehat{\text{B}\Lambda\Gamma} = 60^\circ$  ως γωνία χορδής και εφαπτομένης.

Επομένως το τρίγωνο ΖΒΓ είναι ισόπλευρο.

**β.** Είναι  $\text{A}\text{B} = \text{A}\Gamma = \text{B}\Gamma$  και  $\text{Z}\text{B} = \text{Z}\Gamma = \text{B}\Gamma$ . Οπότε  $\text{A}\text{B} = \text{A}\Gamma = \text{Z}\text{B} = \text{Z}\Gamma$ , άρα το ΑΓΖΒ είναι ρόμβος.

**γ.** Επειδή το ΑΓΖΒ είναι ρόμβος, έχουμε  $\text{B}\Gamma \perp \text{A}\text{Z}$  και αφού έχουμε  $\Theta\text{H} \perp \text{A}\text{Z}$ , είναι  $\text{B}\Gamma // \Theta\text{H}$ .

Άρα το ΒΓΗΘ είναι τραπέζιο.

Είναι  $\widehat{\Theta} = \widehat{\text{B}} = 60^\circ$  και  $\widehat{\text{H}} = \widehat{\Gamma} = 60^\circ$ , ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

Οπότε  $\widehat{\Theta} = \widehat{\text{H}}$ , άρα το ΒΓΗΘ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

### 438 Θέμα 4 - 1717

**α.** Επειδή η γωνία  $\widehat{\text{A}\text{B}\Gamma}$  είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο (Κ, ρ) και βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

Άρα  $\widehat{\text{A}\text{B}\Gamma} = 90^\circ$ .

**β.** Η γωνία  $\widehat{AB\Delta}$  είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο  $(\Lambda, R)$  και βαίνει σε ημικύκλιο, οπότε  $\widehat{AB\Delta} = 90^\circ$ .

Είναι  $\widehat{\Gamma B\Delta} = \widehat{AB\Gamma} + \widehat{AB\Delta} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ . Άρα τα  $\Gamma, B, \Delta$  είναι συνευθειακά.

**γ.** Τα  $K, \Lambda$  είναι τα μέσα των πλευρών  $A\Gamma, A\Delta$  στο τρίγωνο  $A\Gamma\Delta$  οπότε  $K\Lambda // \Gamma\Delta$ .

Άρα το  $K\Lambda\Delta\Gamma$  είναι τραπέζιο.

#### 439 Θέμα 4 - 34326

**α.** Έχουμε  $A\Delta = B\Gamma$ , οπότε  $\widehat{A\Delta} = \widehat{B\Gamma}$ . Άρα  $\widehat{A\Gamma\Delta} = \widehat{\Gamma\Delta B}$  οι οποίες είναι εντός εναλλάξ, οπότε  $AB // \Delta\Gamma$ .

**β.** Επειδή  $\widehat{A\Delta\Gamma} = \widehat{AB\Gamma}$  και  $\widehat{A\Delta} = \widehat{B\Gamma}$ , έχουμε  $\widehat{\Delta\Gamma} = \widehat{AB}$ , οπότε  $A\Delta // B\Gamma$ .

Είναι  $AB // \Delta\Gamma$  και  $A\Delta // B\Gamma$ , οπότε το  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο.

Επειδή  $\widehat{B} = 90^\circ$ , ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, έχουμε ότι το  $AB\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνιο.

**γ.** Επειδή το  $AB\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνιο, έχουμε  $\widehat{\Delta A B} = 90^\circ$ , οπότε  $\widehat{\Delta\Gamma B} = 180^\circ$ .

Άρα η  $B\Delta$  είναι διάμετρος του κύκλου.

**δ.** Επειδή τα  $K, \Lambda$  είναι τα μέσα των χορδών  $\Gamma\Delta, \Gamma B$ , έχουμε ότι  $OK \perp \Gamma\Delta$  και  $OL \perp \Gamma B$ .

Το  $OL\Gamma K$  έχει τρεις ορθές γωνίες  $\widehat{K} = \widehat{\Lambda} = \widehat{\Gamma} = 90^\circ$ , οπότε είναι ορθογώνιο.

#### 440 Θέμα 4 - 1897

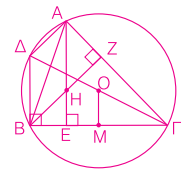
**α.** Επειδή η γωνία  $\widehat{\Delta B\Gamma}$  είναι εγγεγραμμένη και  $\widehat{\Delta B\Gamma} = 90^\circ$ , η  $\Delta\Gamma$  είναι διάμετρος.

Οπότε και  $\widehat{\Delta A\Gamma} = 90^\circ$ , άρα  $\Delta A \perp A\Gamma$ .

**β.** Είναι: 

- $AH \perp B\Gamma$  και  $\Delta B \perp B\Gamma$ , άρα  $AH // \Delta B$
- $BH \perp A\Gamma$  και  $A\Delta \perp A\Gamma$ , άρα  $BH // A\Delta$

Οπότε το  $A\Delta B H$  είναι παραλληλόγραμμο.



**γ.** Στο τρίγωνο  $B\Gamma\Delta$  τα  $O, M$  είναι τα μέσα των  $\Gamma\Delta$  και  $B\Gamma$ , οπότε  $OM = \frac{B\Delta}{2} = \frac{AH}{2}$ , αφού το  $A\Delta B H$  είναι παραλληλόγραμμο.

#### 441 Θέμα 4 - 1772

**α.** Είναι  $OE \perp ZH$ , αφού η ακτίνα είναι κάθετη στην εφαπτομένη στο σημείο επαφής.

Επειδή το  $E$  είναι το μέσο του  $\widehat{B\Gamma}$ , έχουμε  $\widehat{EB} = \widehat{E\Gamma}$ , οπότε  $EB = E\Gamma$ .

Αφού επιπλέον  $OB = O\Gamma = \rho$ , το  $OE$  είναι μεσοκάθετος του  $B\Gamma$ .

Άρα  $OE \perp B\Gamma$ , επομένως  $B\Gamma // ZH$ .

**β.** Είναι  $\widehat{EB} = \widehat{E\Gamma}$ , άρα  $\widehat{BOE} = \widehat{\Gamma OE}$ .

Στο τρίγωνο  $OZH$ , το  $OE$  είναι ύψος και διχοτόμος.

Οπότε το τρίγωνο  $OZH$  είναι ισοσκελές με κορυφή το  $O$ , άρα  $OZ = OH$ .

**γ. i.** Είναι: 

- $\widehat{BEZ} = \widehat{B\Gamma E}$ , ως γωνία χορδής και εφαπτομένης

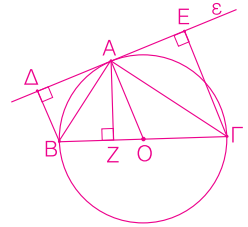
- $\widehat{B\Gamma E} = \frac{\widehat{BOE}}{2}$ , ως εγγεγραμμένη γωνία και επίκεντρη που βαίνουν στο ίδιο τόξο

Οπότε  $\widehat{BEZ} = \frac{\widehat{BOE}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\widehat{ZOH}}{2} = \frac{\widehat{ZOH}}{4}$ .

**ii.** Το τρίγωνο  $OEZ$  είναι ορθογώνιο ( $\widehat{E} = 90^\circ$ ) με  $OE = OB = \frac{OZ}{2}$ .

Άρα  $\widehat{Z} = 30^\circ$ , οπότε  $\widehat{H} = \widehat{Z} = 30^\circ$  και  $\widehat{O} = 180^\circ - \widehat{Z} - \widehat{H} = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$ .

**442 Θέμα 4 - 1809**



- α.** Είναι:
- $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 90^\circ$  , ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο
  - $\widehat{\Delta\hat{A}B} = \widehat{A\hat{\Gamma}B}$  και  $\widehat{E\hat{A}\Gamma} = \widehat{A\hat{B}\Gamma}$  , ως γωνίες χορδής και εφαπτομένης
- Οπότε:
- $\widehat{\Delta\hat{B}A} = 90^\circ - \widehat{\Delta\hat{A}B} = 90^\circ - \widehat{A\hat{\Gamma}B} = \widehat{A\hat{B}\Gamma}$  .
  - $\widehat{E\hat{\Gamma}A} = 90^\circ - \widehat{E\hat{A}\Gamma} = 90^\circ - \widehat{A\hat{B}\Gamma} = \widehat{A\hat{\Gamma}B}$

Επομένως η BA είναι η διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{\Delta\hat{B}\Gamma}$  , και η ΓA είναι η διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{E\hat{\Gamma}B}$  .

- β.** Η BA είναι η διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{\Delta\hat{B}\Gamma}$  , οπότε  $AD = AZ$  .  
 Η ΓA είναι η διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{E\hat{\Gamma}B}$  , οπότε  $AZ = AE$  .  
 Άρα  $AD = AE = AZ$  .

**γ.** Επειδή  $BD \perp \epsilon$  και  $GE \perp \epsilon$  , έχουμε  $BD \parallel GE$  , οπότε το BΔΕΓ είναι τραπέζιο.

Επειδή το O είναι το μέσο του BG και  $OA \perp \epsilon$  , έχουμε  $OA \parallel BD$  .

Επομένως η OA είναι η διάμεσος του τραπέζιου.

Άρα  $OA = \frac{BD + GE}{2} \Rightarrow BD + GE = 2OA \Rightarrow BD + GE = 2OB \Rightarrow BD + GE = BG$  .

**443 Θέμα 4 - 1883**

- α.** Είναι  $\widehat{\Gamma\hat{A}\Delta} = 90^\circ$  , ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο. Στο ορθογώνιο τρίγωνο AΔΓ είναι  $\widehat{\Delta\hat{A}\Gamma} = 90^\circ - \widehat{\Gamma} \Leftrightarrow \widehat{\Delta\hat{A}\Gamma} = \widehat{B}$  , αφού  $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ$  στο ορθογώνιο τρίγωνο  $\widehat{A\hat{B}\Gamma}$  .

Οπότε  $\widehat{\Gamma\hat{A}\Delta} = \widehat{B}$  .

- β.** Είναι:
- $\widehat{B} = 90^\circ - \widehat{\Gamma}$
  - $\widehat{M\hat{\Delta}B} = 180^\circ - 90^\circ - \widehat{O\hat{\Delta}\Gamma} = 90^\circ - \widehat{\Gamma}$  , αφού το τρίγωνο OΓΔ είναι ισοσκελές

Άρα  $\widehat{B} = \widehat{M\hat{\Delta}B}$  , οπότε το τρίγωνο ΔMB είναι ισοσκελές.

- γ.** Είναι:
- $MA = M\Delta$  , ως εφαπτόμενα τμήματα
  - $MB = M\Delta$  , αφού το τρίγωνο ΔMB είναι ισοσκελές

Οπότε  $MA = MB$  , άρα το M είναι το μέσο του AB .

**444 Θέμα 4 - 1768**

- α.** Στο τετράπλευρο PAOB είναι  $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$  . Οπότε  $\widehat{P} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 120^\circ = 60^\circ$  . Επιπλέον  $PA = PB$  ως εφαπτόμενα τμήματα. Άρα, το τρίγωνο PAB είναι ισόπλευρο.

- β.** Είναι  $\widehat{A\hat{O}B} = 120^\circ$  ή  $\widehat{A\hat{M}B} = 120^\circ$  .

Άρα το μη κυρτογώνιο τόξο  $\widehat{AB}$  είναι ίσο με  $240^\circ$  .

Η γωνία  $\widehat{A\hat{M}B}$  είναι εγγεγραμμένη στο μη κυρτογώνιο τόξο  $\widehat{AB}$  .

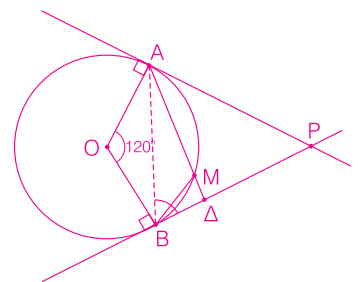
Τότε  $\widehat{A\hat{M}B} = \frac{240^\circ}{2} = 120^\circ$  .

Στο τρίγωνο MAB έχουμε  $\widehat{M\hat{A}B} + \widehat{M\hat{B}A} + \widehat{A\hat{M}B} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{M\hat{A}B} + \widehat{M\hat{B}A} + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{M\hat{A}B} + \widehat{M\hat{B}A} = 60^\circ$  .

- γ.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο AΔB είναι  $\widehat{B} = 60^\circ$  οπότε  $\widehat{M\hat{A}B} = 30^\circ$  .

Από το ερώτημα β. προκύπτει ότι  $\widehat{M\hat{B}A} = 30^\circ$  . Άρα  $MA = MB$  .

Επομένως  $AM \perp BP$  στην περίπτωση που το M είναι μέσο του τόξου  $\widehat{AB}$  .





**445 Θέμα 2 - 12643**

α. Η γωνία  $\widehat{E\Gamma B}$  είναι εξωτερική στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$ , άρα θα ισούται με την απέναντι εσωτερική. Δηλαδή η  $\widehat{E\Gamma B} = \widehat{A} = 80^\circ$ .

β. Η γωνία  $\widehat{EB\Gamma}$  είναι παραπληρωματική της  $\widehat{B}$  του τετραπλεύρου, οπότε  $\widehat{EB\Gamma} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$ .  
Στο τρίγωνο  $EB\Gamma$  έχουμε:

$$\widehat{BE\Gamma} + \widehat{EB\Gamma} + \widehat{E\Gamma B} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{BE\Gamma} + 70^\circ + 80^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{BE\Gamma} = 30^\circ.$$

**446 Θέμα 2 - 13818**

α. Επειδή το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι εγγράψιμο, οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

$$\text{Άρα } \widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow x + 40^\circ + 3x = 180^\circ \Leftrightarrow 4x = 140^\circ \Leftrightarrow x = 35^\circ.$$

β. Έχουμε  $\widehat{A} = 35^\circ + 40^\circ = 75^\circ$ ,  $\widehat{B} = 35^\circ + 20^\circ = 55^\circ$ ,  $\widehat{\Gamma} = 3 \cdot 35^\circ = 105^\circ$ .

Οι γωνίες  $\widehat{B}$  και  $\widehat{\Delta}$  είναι απέναντι γωνίες του εγγράψιμου τετραπλεύρου  $AB\Gamma\Delta$ , άρα είναι παραπληρωματικές.

$$\text{Οπότε } \widehat{B} + \widehat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow 55^\circ + \widehat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Delta} = 125^\circ.$$

**447 Θέμα 2 - 12641**

α. Τα εφαπτόμενα τμήματα από σημείο εκτός κύκλου είναι κάθετα στις ακτίνες που αντιστοιχούν στα σημεία επαφής, οπότε  $\widehat{PAO} + \widehat{PBO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ .

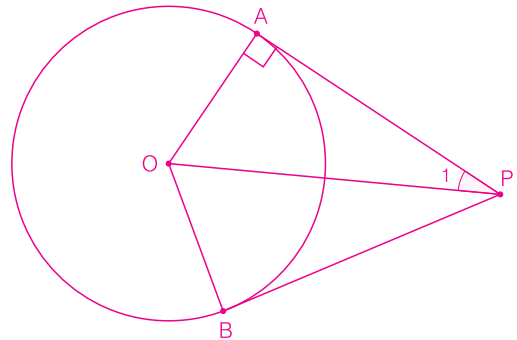
Επομένως το τετράπλευρο  $PAOB$  είναι εγγράψιμο.

β. Η διακεντρική ευθεία διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων

$$\text{τμημάτων, άρα } \widehat{APO} = \frac{\widehat{APB}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$

γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $OAP$  η γωνία  $\widehat{P}_1 = 30^\circ$ , οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

$$\text{Άρα } OA = \frac{OP}{2} \Leftrightarrow OP = 2 \cdot OA \Leftrightarrow OP = 2 \cdot 4 \Leftrightarrow OP = 8 \text{ cm}.$$

**448 Θέμα 4 - 1807**

α. Στα ορθογώνια τρίγωνα  $AB\Gamma$  ( $\widehat{A} = 90^\circ$ ),  $\Delta B\Gamma$  ( $\widehat{\Delta} = 90^\circ$ ) οι  $AM$ ,  $\Delta M$  είναι διάμεσοι, οπότε  $AM = \frac{B\Gamma}{2}$

$$\text{και } \Delta M = \frac{B\Gamma}{2}.$$

$$\text{Άρα } AM = \Delta M.$$

β. Στο ισοσκελές τρίγωνο  $MA\Delta$ , η  $MN$  είναι διάμεσος, άρα είναι και ύψος, οπότε  $MN \perp A\Delta$ .

γ. Το  $AB\Gamma\Delta$  είναι εγγράψιμο, αφού  $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \widehat{B\hat{\Delta}\Gamma} = 90^\circ$ , οπότε η  $B\Gamma$  φαίνεται από τις κορυφές  $A$  και  $\Delta$ , υπό ίσες γωνίες. Άρα  $\widehat{\Gamma B\Delta} = \widehat{\Gamma A\Delta}$ .

**449 Θέμα 4 - 1886**

α. Στα ορθογώνια τρίγωνα  $AB\Gamma$  ( $\widehat{A} = 90^\circ$ ) και  $\Delta B\Gamma$  ( $\widehat{\Delta} = 90^\circ$ ) οι  $AM$ ,  $\Delta M$  είναι διάμεσοι, οπότε  $AM = \frac{B\Gamma}{2}$  και  $\Delta M = \frac{B\Gamma}{2}$ . Άρα  $AM = \Delta M$ , οπότε το τρίγωνο  $AM\Delta$  είναι ισοσκελές.

β. Επειδή  $\widehat{A} + \widehat{\Delta} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ , το τετράπλευρο  $A\Gamma\Delta B$  είναι εγγράψιμο σε κύκλο με κέντρο  $M$ . Οπότε  $\widehat{AM\Delta} = 2\widehat{A\Gamma\Delta}$ , αφού η  $\widehat{AM\Delta}$  είναι επίκεντρη και η  $\widehat{A\Gamma\Delta}$  εγγεγραμμένη που βαίνει στο ίδιο τόξο με την  $\widehat{AM\Delta}$ .

γ. Επειδή το τετράπλευρο ΑΓΔΒ είναι εγγράψιμο η πλευρά του ΓΔ φαίνεται από τις κορυφές Α και Β υπό ίσες γωνίες. Άρα  $\widehat{ΓΒΔ} = \widehat{ΓΑΔ}$ .

#### 450 Θέμα 4 - 34324

α. Είναι  $OB \perp AB$  και  $OG \perp AG$ .

Επειδή  $\widehat{ΑΒΟ} + \widehat{ΑΓΟ} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ , το ΑΒΟΓ είναι εγγράψιμο. Η διακεντρική ευθεία ΑΟ είναι η διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ, οπότε  $\widehat{ΒΑΟ} = \frac{\widehat{ΒΑΓ}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΟ είναι  $\widehat{ΒΑΟ} = 30^\circ$ , άρα  $OB = \frac{OA}{2} \Rightarrow OA = 2OB$ .

β. Η ΖΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο Δ, άρα  $ZE \perp OD$ .

Στο τρίγωνο ΑΕΖ η ΑΔ είναι διχοτόμος και ύψος.

Οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και επειδή  $\widehat{Α} = 60^\circ$  είναι ισόπλευρο.

γ. Είναι  $ZB = ZΔ$ , ως εφαπτόμενα τμήματα.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΔ είναι  $\widehat{ΖΑΔ} = 30^\circ$ , οπότε  $ZΔ = \frac{AZ}{2} \Rightarrow ZB = \frac{AZ}{2} \Rightarrow 2ZB = AZ$ .

δ. Η διακεντρική ευθεία ΑΟ είναι κάθετη στη χορδή ΒΓ, άρα  $AO \perp BG$ .

Είναι  $AD \perp ZE$  και  $AD \perp BG$ , οπότε  $ZE \parallel BG$ .

Άρα το ΕΖΒΓ είναι τραπέζιο.

Είναι: •  $EG = ED$ , ως εφαπτόμενα τμήματα

•  $ED = ΔΖ$ , αφού το ύψος ΑΔ στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΕΖ είναι και διάμεσος.

•  $ΔΖ = ΖΒ$ , ως εφαπτόμενα τμήματα

Άρα  $ZB = EG$ , οπότε το ΕΖΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

#### 451 Θέμα 4 - 1892

α. Είναι  $AD \perp BG$  και  $OM \perp BG$ , οπότε  $AD \parallel OM$ .

Άρα  $\widehat{ΔΑΜ} = \widehat{ΑΜΟ}$ , ως εντός εναλλάξ.

Επειδή  $OA = OM$ , είναι  $\widehat{ΑΜΟ} = \widehat{ΜΑΟ}$ .

Οπότε  $\widehat{ΔΑΜ} = \widehat{ΜΑΟ}$ , άρα η ΑΜ είναι η διχοτόμος της  $\widehat{ΔΑΟ}$ .

β. Επειδή το Μ είναι το μέσο του  $\widehat{ΒΓ}$  έχουμε  $\widehat{ΒΑΜ} = \widehat{ΜΑΓ}$ . Από το α. ερώτημα είναι  $\widehat{ΔΑΜ} = \widehat{ΜΑΟ}$ , οπότε  $\widehat{ΒΑΜ} - \widehat{ΔΑΜ} = \widehat{ΜΑΓ} - \widehat{ΜΑΟ} \Rightarrow \widehat{ΔΑΒ} = \widehat{ΟΑΓ}$ .

γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΓ είναι  $\widehat{ΔΑΓ} = 90^\circ - \widehat{Γ}$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΒ είναι  $\widehat{ΔΑΒ} = 90^\circ - \widehat{Β}$ .

Είναι  $\widehat{ΔΑΟ} = \widehat{ΔΑΓ} - \widehat{ΟΑΓ} = 90^\circ - \widehat{Γ} - \widehat{ΔΑΒ} = 90^\circ - \widehat{Γ} - (90^\circ - \widehat{Β}) = \widehat{Β} - \widehat{Γ}$ .

#### 452 Θέμα 4 - 1864

α. Είναι: •  $\widehat{Α} = \widehat{Γ} = 90^\circ$ , ως εγγεγραμμένες που βαίνουν σε ημικόκλιο.

•  $\widehat{Β} + \widehat{Δ} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{Δ} + \widehat{Δ} = 180^\circ \Leftrightarrow 3\widehat{Δ} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{Δ} = 60^\circ$ , οπότε  $\widehat{Β} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$ .

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΑΒ ( $\widehat{Α} = 90^\circ$ ) και ΔΓΒ ( $\widehat{Γ} = 90^\circ$ ) έχουν:

- $AB = ΒΓ$
- ΒΔ κοινή

Άρα είναι ίσα.

γ. Επειδή  $AB = BG$ , έχουμε  $\widehat{AB} = \widehat{BG}$ , οπότε  $\widehat{A\hat{D}B} = \widehat{G\hat{D}B}$ .

Επομένως η  $\Delta B$  είναι η διχοτόμος της  $\hat{A}$ , άρα  $\widehat{A\hat{D}B} = 30^\circ$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Delta$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) είναι  $\widehat{A\hat{D}B} = 30^\circ$ , οπότε  $AB = \frac{B\Delta}{2} = \rho$ .

Άρα  $OA = AB = BG = OG$ , οπότε το  $ABGO$  είναι ρόμβος.

δ. Στο τετράπλευρο  $ABOE$  είναι  $\hat{A} + \hat{O} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ , οπότε το  $ABOE$  είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

### 453 Θέμα 4 - 1896

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) η  $AM$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε

$$AM = \frac{B\Gamma}{2} = MB.$$

Επομένως  $\widehat{M\hat{A}B} = \widehat{M\hat{B}A} = 30^\circ$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $EAB$  ( $\hat{E} = 90^\circ$ ), είναι  $\widehat{E\hat{A}B} = 30^\circ$ , οπότε  $BE = \frac{AB}{2}$  (1).

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $HBA$  ( $\hat{H} = 90^\circ$ ), είναι  $\hat{B} = 30^\circ$ , οπότε  $AH = \frac{AB}{2}$  (2).

Από (1), (2) έχουμε  $AH = BE$ .

γ. Στο τετράπλευρο  $AHEB$  είναι  $\widehat{B\hat{E}A} = 90^\circ = \widehat{B\hat{H}A}$ , οπότε είναι εγγράψιμο.

δ. Είναι: •  $\widehat{H\hat{E}A} = \widehat{H\hat{B}A}$ , αφού  $AHEB$  εγγράψιμο

•  $\widehat{H\hat{B}A} = \widehat{E\hat{A}B}$ , αφού  $MA = MB$ .

Οπότε  $\widehat{H\hat{E}A} = \widehat{E\hat{A}B}$ , οι οποίες είναι εντός εναλλάξ, άρα  $EH \parallel AB$ .

### 454 Θέμα 4 - 1799

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $BE\Gamma$  ( $\hat{E} = 90^\circ$ ), η  $E\Delta$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα.

$$\text{Οπότε } E\Delta = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2E\Delta.$$

β. Είναι  $E\Delta = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow E\Delta = \Delta B$ .

Το τρίγωνο  $E\Delta B$  είναι ισοσκελές με  $\widehat{B\hat{E}\Delta} = \widehat{E\hat{B}\Delta}$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $EB\Gamma$ , έχουμε

$$\widehat{E\hat{B}\Gamma} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{E\hat{B}\Delta} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{B\hat{E}\Delta} = 90^\circ - \hat{\Gamma}.$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$ , έχουμε

$$\widehat{\Delta\hat{A}\Gamma} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \frac{\hat{A}}{2} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \frac{\hat{A}}{2} = 90^\circ - \hat{\Gamma}.$$

$$\text{Άρα } \widehat{B\hat{E}\Delta} = \frac{\hat{A}}{2}.$$

γ. Το τετράπλευρο  $AE\Delta B$  είναι εγγράψιμο, αφού  $\widehat{A\hat{E}B} = 90^\circ = \widehat{A\hat{\Delta}B}$ .

δ. Επειδή το τετράπλευρο  $AE\Delta B$  είναι εγγράψιμο, έχουμε  $\widehat{A\hat{B}E} = \widehat{A\hat{\Delta}E}$ .

### 455 Θέμα 4 - 1774

α. Έχουμε  $\widehat{\Delta\hat{A}B} = \widehat{E\hat{B}\Gamma} = 60^\circ$ , οι οποίες είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη, άρα  $A\Delta \parallel BE$ .

Οπότε το  $A\Delta EB$  είναι τραπέζιο.

β. Είναι  $\widehat{\Delta\hat{B}M} = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$ .

Τα τρίγωνα  $\Delta MB$  και  $\Delta EB$  έχουν:

- $MB = BE$
- $\Delta B$  κοινή
- $\hat{\Delta} BM = \hat{\Delta} BE$  ( $= 60^\circ$ )

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

γ. Το  $\Delta M$  είναι διάμεσος στο ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Delta$ , οπότε είναι και ύψος του, άρα  $\hat{\Delta} MB = 90^\circ$ .

Επειδή  $\hat{\Delta} MB = \hat{\Delta} EB$ , είναι ίσα έχουμε  $\hat{\Delta} MB = \hat{\Delta} EB = 90^\circ$ .

Είναι  $\hat{\Delta} MB + \hat{\Delta} EB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ , οπότε το τετράπλευρο  $\Delta MBE$  είναι εγγράψιμο.

#### 456 Θέμα 4 - 1776

α. Τα τρίγωνα  $AE\Gamma$  και  $AB\Delta$  έχουν:

- $AE = AB$
- $AG = AD$
- $\hat{E}A\Gamma = \hat{\Delta}AB$  ( $= 60^\circ + \hat{B}A\Gamma$ )

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε  $\hat{A}\Gamma E = \hat{A}\Delta B$  και  $\hat{A}E\Gamma = \hat{A}B\Delta$ .

β. Επειδή: •  $\hat{A}\Gamma E = \hat{A}\Delta B$ , το τετράπλευρο  $AZ\Gamma\Delta$  είναι εγγράψιμο.  
•  $\hat{A}E\Gamma = \hat{A}B\Delta$ , το  $AZBE$  είναι εγγράψιμο

γ. Είναι  $\hat{B}Z\Gamma = \hat{E}Z\Delta = \hat{E}Z\Delta + \hat{A}Z\Delta = \hat{E}B\Delta + \hat{A}\Gamma\Delta = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$ .

#### 457 Θέμα 4- 1779

α. i. Τα τρίγωνα  $BE\Gamma$  και  $AD\Gamma$  έχουν:

- $B\Gamma = A\Gamma$
- $GE = AD$
- $\hat{\Gamma} = \hat{A}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα  $\hat{B}E\Gamma = \hat{\Gamma}\Delta A$ .

ii. Επειδή τα τρίγωνα  $BE\Gamma$  και  $AD\Gamma$  είναι ίσα έχουμε  $\hat{E}B\Gamma = \hat{O}\Gamma E$ .

Στο τρίγωνο  $O\Gamma E$  η  $\hat{B}O\Gamma$  είναι εξωτερική, οπότε

$$\hat{B}O\Gamma = \hat{O}\Gamma E + \hat{O}E\Gamma = \hat{E}B\Gamma + \hat{O}E\Gamma = 180^\circ - \hat{B}\Gamma E = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

β. Είναι: •  $\hat{\Delta}OE = \hat{B}O\Gamma = 120^\circ$

$$\bullet \hat{A} + \hat{\Delta}OE = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$$

Άρα το τετράπλευρο  $AEOD$  είναι εγγράψιμο.

#### 458 Θέμα 4 - 14878

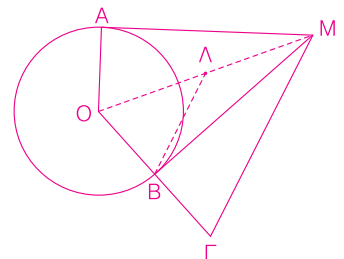
α. Είναι  $OA \perp AM$  και  $OB \perp BM$ .

Οπότε  $\hat{A} + \hat{B} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ . Άρα το τετράπλευρο  $AMBO$  είναι εγγράψιμο.

β. Αφού  $\hat{A} = 90^\circ$ , η  $OM$  είναι διάμετρος του περιγραμμένου κύκλου του τετράπλευρου  $AMBO$ .

Οπότε το κέντρο  $\Lambda$  του περιγεγραμμένου κύκλου του τετράπλευρου  $AMBO$  είναι το μέσο του  $MO$ .

γ. Στο τρίγωνο  $OM\Gamma$  τα σημεία  $B$ ,  $\Lambda$  είναι μέσα των  $O\Gamma$ ,  $OM$ , οπότε  $B\Lambda \parallel M\Gamma$ .

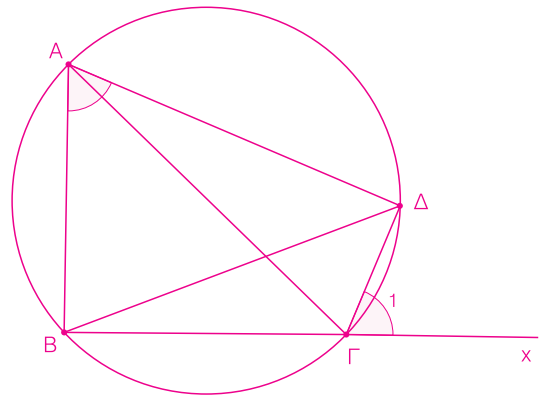


**459 Θέμα 4 - 13444**

**α.** • Η γωνία  $\hat{\Gamma}_1$ , είναι εξωτερική του εγγεγραμμένου τετράπλευρου  $AB\Gamma\Delta$ , άρα  $\hat{\Gamma}_1 = \hat{B}\hat{A}\Delta$ , (1).

• Η  $\Gamma\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}\hat{\Gamma}x$ , άρα  $\hat{\Gamma}_1 = \frac{1}{2}\hat{A}\hat{\Gamma}x$ , (2).

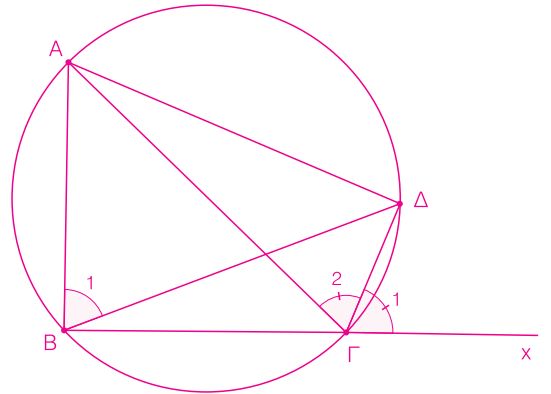
Από τις ισότητες (1), (2) προκύπτει ότι  $\hat{B}\hat{A}\Delta = \frac{1}{2}\hat{A}\hat{\Gamma}x$ , (3).



**β.** Είναι  $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_2$ , (4), ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο  $A\Delta$ .

Η  $\Gamma\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}\hat{\Gamma}x$ , άρα  $\hat{\Gamma}_2 = \frac{1}{2}\hat{A}\hat{\Gamma}x \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} \hat{B}_1 = \frac{1}{2}\hat{A}\hat{\Gamma}x \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} \hat{B}\hat{A}\Delta = \hat{B}_1$ .

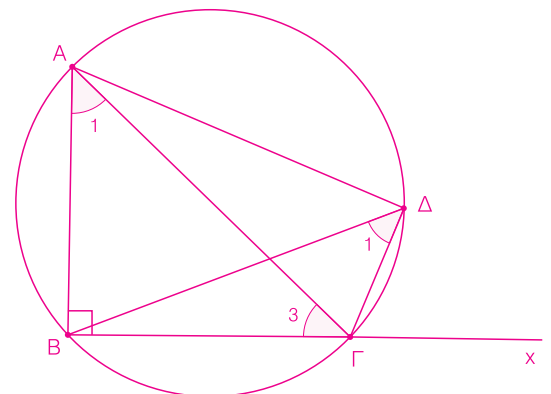
Οπότε το τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι ισοσκελές με  $\Delta B = \Delta A$ , γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες του  $\hat{B}\hat{A}\Delta$  και  $\hat{B}_1$  αντίστοιχα.



**γ.** • Αν η  $A\Gamma$  είναι διάμετρος του κύκλου, τότε  $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 90^\circ$ , ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο. Οι οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι συμπληρωματικές, δηλαδή  $\hat{\Gamma}_3 + \hat{A}_1 = 90^\circ$ , (5).

• Οι γωνίες  $\hat{A}_1, \hat{\Delta}_1$  είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο  $B\Gamma$ , άρα  $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1$ .

Οπότε  $\hat{\Gamma}_3 + \hat{\Delta}_1 = 90^\circ$ , άρα οι γωνίες  $\hat{A}\hat{\Gamma}B$  και  $\hat{B}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$  είναι συμπληρωματικές.

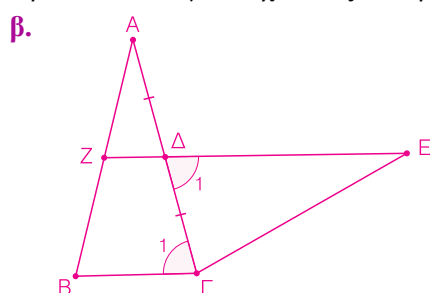


**460 Θέμα 4 - 34332**

**α.** Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $E\Gamma\Delta$  έχουν:

- $AB = E\Gamma$ ,
- $A\Gamma = E\Delta$ ,
- $B\Gamma = \Gamma\Delta$ , γιατί  $B\Gamma = \frac{AB}{2}$  και  $\Gamma\Delta = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{AB}{2}$ , αφού το  $\Delta$  είναι το μέσο της  $A\Gamma$ .

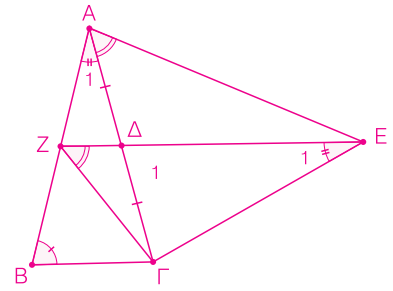
Άρα είναι ίσα, γιατί έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία (κριτήριο ΠΠΠ).



**i.** Από την ισότητα των τριγώνων  $AB\Gamma$  και  $E\Gamma\Delta$  προκύπτει ότι  $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$ .

Οι  $B\Gamma$  και  $\Delta E$  τεμνόμενες από την  $A\Gamma$  σχηματίζουν ίσες τις εντός εναλλάξ γωνίες τους  $\hat{\Gamma}_1$  και  $\hat{\Delta}_1$ , άρα η  $B\Gamma$  είναι παράλληλη στη  $\Delta E$ .

Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  το  $\Delta$  είναι το μέσο της  $A\Gamma$  και η  $\Delta Z$  είναι παράλληλη στη  $B\Gamma$ , άρα το  $Z$  είναι το μέσο της  $AB$ .



**ii.** Από την ισότητα των τριγώνων  $AB\Gamma$  και  $E\Gamma\Delta$  προκύπτει ότι  $\hat{A}_1 = \hat{E}_1$ .

Άρα το τετράπλευρο  $AE\Gamma Z$  είναι εγγράψιμο, αφού η πλευρά του  $\Gamma Z$  φαίνεται από τις απέναντι κορυφές του  $A$  και  $E$  υπό ίσες γωνίες.

Οπότε στο εγγράψιμο  $AE\Gamma Z$  η πλευρά  $\Gamma E$  φαίνεται από τις απέναντι κορυφές του  $A$  και  $Z$  υπό ίσες γωνίες, άρα θα είναι  $\hat{E}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{E}\hat{Z}\hat{\Gamma}$ .

**461 Θέμα 4 - 13521**

**α.** Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$ , το  $K$  είναι μέσο του  $AB$  και το  $\Lambda$  είναι μέσο του  $A\Gamma$ , άρα  $K\Lambda // B\Gamma$  (1).

**β. i.** Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  το  $\Lambda$  είναι μέσο του  $A\Gamma$  και το  $M$  είναι μέσο του  $B\Gamma$ , άρα  $\Lambda M = \frac{AB}{2}$  (2).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $A\Delta B$ , είναι  $\Delta K = \frac{AB}{2}$  (3), επειδή η  $\Delta K$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσά του.

Από (2) και (3) έχουμε  $\Lambda M = \Delta K$ . (4)

**ii.** Επειδή  $K\Lambda // B\Gamma$  και οι  $K\Delta$  και  $M\Lambda$  δεν είναι παράλληλες, το  $K\Lambda M\Delta$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Επομένως οι διαγώνιοι του είναι ίσες, δηλαδή  $KM = \Delta\Lambda$ . (5)

**γ.** Τα σημεία  $\Delta$  και  $M$  δεν ταυτίζονται γιατί αν ταυτίζονταν, τότε το ύψος  $A\Delta$  θα ήταν και διάμεσος, δηλαδή το τρίγωνο  $AB\Gamma$  θα ήταν ισοσκελές με  $AB = A\Gamma$ .

Άτοπο, αφού  $AB < A\Gamma$ .

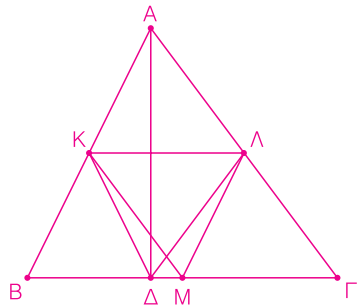
Το τραπέζιο  $K\Lambda M\Delta$  είναι ισοσκελές. Επομένως  $K\Delta = M\Lambda$  (6) και  $KM = \Delta\Lambda$ .

Τα τρίγωνα  $K\Delta\Lambda$  και  $\Lambda M\Delta$  έχουν:

- $K\Delta = M\Lambda$
- $KM = \Delta\Lambda$
- $K\Lambda$  κοινή πλευρά

Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ), οπότε  $\hat{K}\hat{\Delta}\hat{\Lambda} = \hat{K}\hat{M}\hat{\Lambda}$ .

Επομένως το τετράπλευρο  $K\Lambda M\Delta$  είναι εγγράψιμο γιατί η πλευρά  $K\Lambda$  φαίνεται από τις απέναντι κορυφές  $\Delta$  και  $M$  υπό ίσες γωνίες.



**462 Θέμα 4 - 13670**

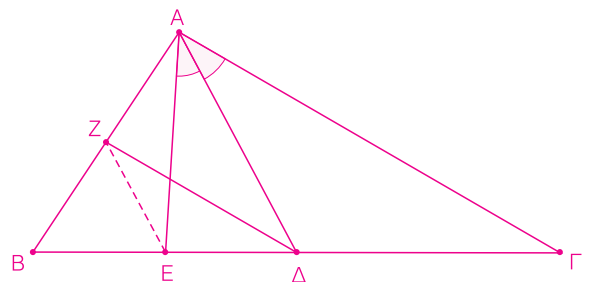
**α.** Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$ , το τμήμα  $\Delta Z$  είναι παράλληλο προς την πλευρά  $A\Gamma$  και το  $\Delta$  είναι μέσο της πλευράς  $B\Gamma$ . Επομένως, το  $Z$  θα είναι μέσο της πλευράς  $AB$ .

Τα τρίγωνα  $ABE$  και  $\Delta BZ$  έχουν:

- $AB = B\Delta$ , ως μισά του  $B\Gamma$ , αφού  $B\Gamma = 2AB$  (υπόθεση) και  $B\Gamma = 2B\Delta$  (το  $\Delta$  είναι μέσο του  $B\Gamma$ ).
- $BE = BZ$ , ως μισά των ίσων τμημάτων  $B\Delta$  και  $AB$  αντίστοιχα.

•  $\hat{B}$  κοινή γωνία.

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).



**β.** Από την ισότητα των τριγώνων  $ABE$  και  $BZ\Delta$  προκύπτει ότι  $\widehat{BAE} = \widehat{BZ\Delta}$  (1).

Το τετράπλευρο  $ZADE$  είναι εγγράψιμο διότι η πλευρά  $ZE$  φαίνεται από τις απέναντι κορυφές  $A$  και  $\Delta$  υπό τις ίσες γωνίες  $\widehat{BAE}$  και  $\widehat{BZ\Delta}$  αντίστοιχα.

**γ.** Το τρίγωνο  $BAD$  είναι ισοσκελές με  $AB = BD$ , οπότε  $\widehat{BAD} = \widehat{BDA}$  (2).

Αφαιρώντας τις (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$\widehat{BAD} - \widehat{BAE} = \widehat{BDA} - \widehat{BZ\Delta} \Leftrightarrow \widehat{EAD} = \widehat{ZDA}$$

Είναι  $\widehat{ZDA} = \widehat{DAG}$ , ως εντός εναλλάξ, οπότε  $\widehat{EAD} = \widehat{DAG}$ , άρα η  $AD$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{EAG}$ .

**463 Θέμα 4 - 13671**

**α.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $HAG$  ( $\widehat{GHA} = 90^\circ$ ), η  $HE$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα  $AG$ , οπότε

$$HE = EG = EA = \frac{AG}{2}.$$

• Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $HBG$  ( $\widehat{GHB} = 90^\circ$ ), η  $HZ$  είναι διάμεσος στην υποτείνουσα  $BG$ , οπότε

$$HZ = ZG = ZB = \frac{BG}{2}.$$

**β.** Στο τρίγωνο  $ABG$ , τα σημεία  $\Delta$  και  $Z$  είναι μέσα των πλευρών  $AB$  και  $BG$  αντίστοιχα.

Επομένως,  $\Delta Z \parallel AG$  και  $\Delta Z = \frac{AG}{2} = EG$ .

Άρα, το τετράπλευρο  $ZDEG$  είναι παραλληλόγραμμο, αφού έχει τις  $\Delta Z$  και  $EG$  ίσες και παράλληλες, οπότε

$$\widehat{ZDE} = \widehat{EGZ} \quad (1).$$

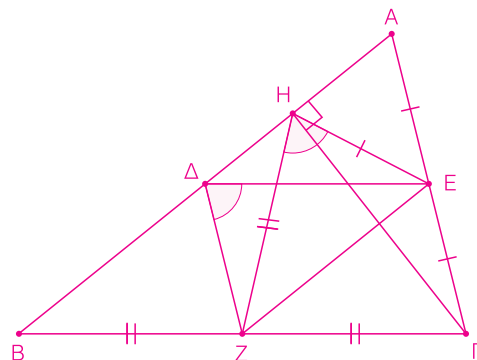
Στο ισοσκελές τρίγωνο  $HEG$  είναι  $\widehat{GHE} = \widehat{HGE}$  (2), και στο ισοσκελές τρίγωνο  $HZG$  είναι  $\widehat{ZHG} = \widehat{HZG}$  (3).

Προσθέτοντας τις ισότητες (2) και (3) κατά μέλη, έχουμε:

$$\widehat{ZHG} + \widehat{GHE} = \widehat{HZG} + \widehat{HGE} \Leftrightarrow \widehat{ZHE} = \widehat{EGZ} \quad (4).$$

Από τις (1) και (4) προκύπτει ότι  $\widehat{ZDE} = \widehat{ZHE}$ .

**γ.** Το τετράπλευρο  $ZDHE$  είναι εγγράψιμο διότι η πλευρά  $ZE$  φαίνεται από τις απέναντι κορυφές  $\Delta$  και  $H$  υπό τις ίσες γωνίες  $\widehat{ZDE}$  και  $\widehat{ZHE}$  αντίστοιχα.



**464 Θέμα 4 - 13840**

**α.** Η ευθεία  $x'x$  έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο στο σημείο  $A$ , άρα είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο  $A$ , οπότε  $OA \perp MA$ .

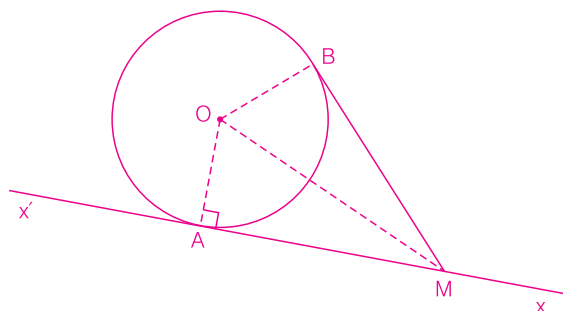
Τα τρίγωνα  $MOB$  και  $MOA$  έχουν:

- $MO$ , κοινή πλευρά
- $OB = OA$ , ως ακτίνες του κύκλου ( $O, R$ )
- $MB = MA$

Επομένως, τα τρίγωνα από το κριτήριο ισότητας Π-Π-Π είναι ίσα.

$$\widehat{A} = \widehat{B} \Leftrightarrow \widehat{B} = 90^\circ.$$

Άρα, το  $MB$  είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου ( $O, R$ ).



**β.** Έστω  $M\delta$  η διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{BMx}$ , οπότε  $M_3 = M_4$ .

Τα τμήματα  $MA$  και  $MB$  είναι εφαπτόμενα τμήματα, άρα η  $MO$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{AMB}$ , οπότε  $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ .

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \widehat{AMx} = 180^\circ &\Leftrightarrow \widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 + \widehat{M}_3 + \widehat{M}_4 = 180^\circ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\widehat{M}_2 + 2\widehat{M}_3 = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{M}_2 + \widehat{M}_3 = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{OM\delta} = 90^\circ. \end{aligned}$$

Άρα η  $M\delta$  είναι κάθετη στη  $MO$ .

**γ.** Στο τετράπλευρο  $AOBM$  έχουμε  $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$ , οπότε  $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ$ . Επομένως δύο απέναντι γωνίες του τετραπλεύρου είναι παραπληρωματικές, οπότε το  $AOBM$  είναι εγγράψιμο.

**δ.** Το ευθύγραμμο τμήμα  $OB$  και η διχοτόμος  $M\delta$  τέμνονται από το ευθύγραμμο τμήμα  $OM$ . Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζονται έχουν άθροισμα μικρότερο από  $180^\circ$ , οπότε το  $OB$  και η  $M\delta$  θα τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας  $OM$  που βρίσκονται οι γωνίες.

Πρέπει να αποδείξουμε ότι  $\widehat{BOM} + \widehat{OM\delta} < 180^\circ$ .

Η γωνία  $\widehat{BOM}$  είναι οξεία γωνία του ορθογωνίου τριγώνου  $OBM$ , οπότε  $\widehat{BOM} < 90^\circ$ .

Είναι  $\widehat{OM\delta} = \widehat{M}_2 + \widehat{M}_3 = 90^\circ$ , οπότε  $\widehat{BOM} + \widehat{OM\delta} = \widehat{BOM} + 90^\circ < 90^\circ + 90^\circ$ , δηλαδή  $\widehat{BOM} + \widehat{OM\delta} < 180^\circ$ .

### 465 Θέμα 4 - 13847

**α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα  $A\Delta Z$  και  $\Gamma\Delta M$  έχουν:

- $A\Delta = \Delta\Gamma$ , ως πλευρές του τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$
- $AZ = \Gamma M$ , από τα δεδομένα

Άρα έχουν μία προς μία ίσες τις κάθετες πλευρές τους, οπότε είναι ίσα.

**β.** Για να είναι το τετράπλευρο  $\Delta MEZ$  τετράγωνο, γνωρίζοντας ότι είναι παραλληλόγραμμο, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι ορθογώνιο και ρόμβος. Έχουμε  $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_3$  διότι βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές  $AZ$  και  $\Gamma M$  των ίσων τριγώνων  $A\Delta Z$  και  $\Gamma\Delta M$ .

Άρα  $\widehat{M\Delta Z} = \widehat{\Delta}_2 + \widehat{\Delta}_3 = \widehat{\Delta}_1 + \widehat{\Delta}_2 = 90^\circ$ , δηλαδή το παραλληλόγραμμο  $\Delta MEZ$  είναι ορθογώνιο.

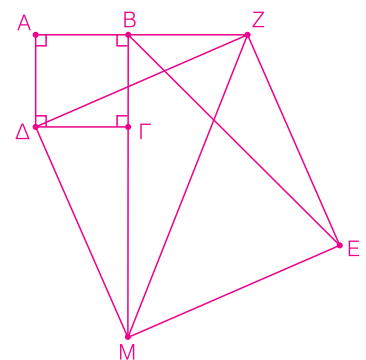
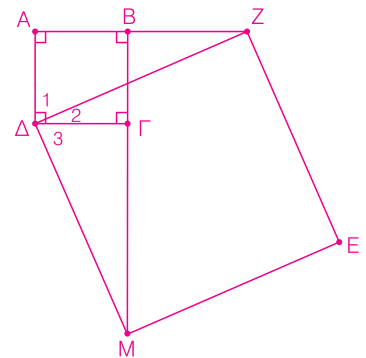
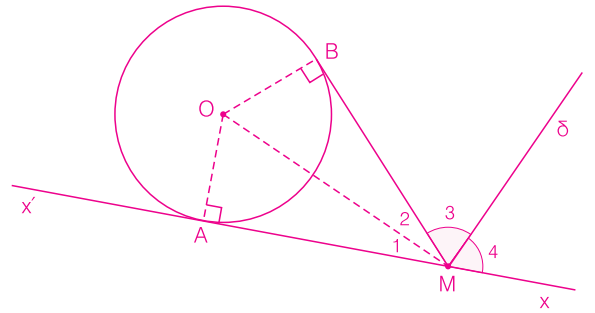
Τα τρίγωνα  $A\Delta Z$  και  $\Gamma\Delta M$  είναι ίσα, οπότε  $\Delta Z = \Delta M$ . Άρα το ορθογώνιο  $\Delta MEZ$  είναι και ρόμβος, διότι έχει δύο διαδοχικές πλευρές είναι ίσες. Άρα είναι τετράγωνο.

**γ.** Για να είναι το τετράπλευρο  $BZEM$  εγγράψιμο αρκεί να αποδείξουμε ότι  $\widehat{ZBM} + \widehat{ZEM} = 180^\circ$ .

Είναι  $\widehat{ZBM} = 90^\circ$  και από το τετράγωνο  $\Delta MEZ$  έχουμε  $\widehat{ZEM} = 90^\circ$ .

Άρα  $\widehat{ZBM} + \widehat{ZEM} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ .

**δ.** Επειδή το τετράπλευρο  $BZEM$  είναι εγγράψιμο η πλευρά  $BZ$  φαίνεται από τις απέναντι κορυφές του  $M$  και  $E$  υπό ίσες γωνίες, δηλαδή  $\widehat{BMZ} = \widehat{BEM}$ .

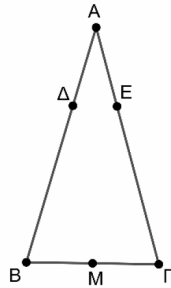




## 466 Θέμα 4 – 36099

Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$ , σημεία  $\Delta$ ,  $E$  στις ίσες πλευρές  $AB, A\Gamma$  αντίστοιχα τέτοια ώστε  $AD =$

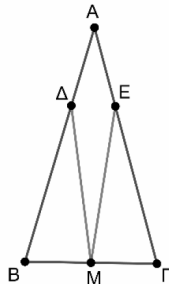
$$\frac{1}{3} AB \text{ και } AE = \frac{1}{3} A\Gamma \text{ και σημείο } M \text{ μέσο της } B\Gamma.$$



α) Επειδή  $AB = A\Gamma$  και  $AD = AE$ , έχουμε ότι:

$$BD = AB - AD = A\Gamma - AE = GE$$

β) Φέρνουμε αρχικά τα τμήματα  $DM$  και  $EM$ .

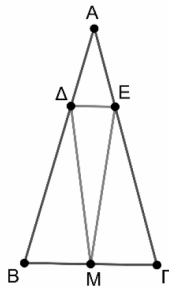


Συγκρίνουμε τα τρίγωνα  $BDM$  και  $M\Gamma E$ , τα οποία έχουν:

- $BD = GE$ , από το α) ερώτημα
- $BM = M\Gamma$ , γιατί το  $M$  είναι μέσο της  $B\Gamma$  και
- $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ , ως γωνίες προσκείμενες στη βάση  $B\Gamma$  του ισοσκελούς τριγώνου  $AB\Gamma$ .

Οπότε τα τρίγωνα  $BDM$  και  $M\Gamma E$  έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (ΠΓΠ), άρα είναι ίσα.

γ) Φέρουμε το τμήμα  $DE$ , οπότε σχηματίζεται το τρίγωνο  $DEM$ .



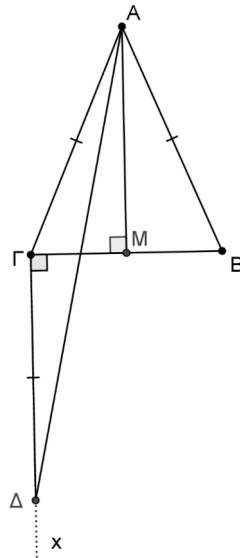
Από το β) ερώτημα έχουμε ότι τα τρίγωνα  $BDM$  και  $M\Gamma E$  είναι ίσα, οπότε θα έχουν τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, όπως  $ME = MD$  καθώς οι πλευρές αυτές βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες  $\widehat{B}$  και  $\widehat{\Gamma}$ . Συνεπώς, το τρίγωνο  $DEM$  είναι ισοσκελές.

**467 Θέμα 4 – 34777**

**α)** Είναι  $ΓΔ = ΑΒ$  και  $ΑΒ = ΑΓ$  από υπόθεση, οπότε θα είναι  $ΓΔ = ΑΓ$ , άρα το τρίγωνο  $ΑΓΔ$  είναι ισοσκελές τρίγωνο με βάση την  $ΑΔ$ , οπότε οι γωνίες οι προσκείμενες στη βάση του θα είναι ίσες, δηλαδή  $∠\hat{Α}Γ = ∠\hat{Δ}Α$ .

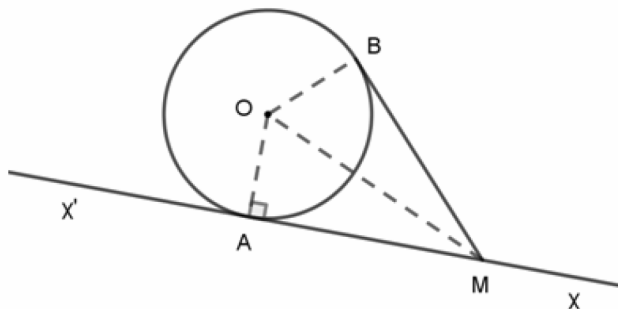
**β)** Επειδή το  $ΑΜ$  είναι ύψος του τριγώνου, τότε θα είναι κάθετο στη  $ΒΓ$ . Επίσης, από υπόθεση έχουμε ότι και  $ΓΔ$  κάθετο στη  $ΒΓ$ , άρα  $ΓΔ // ΑΜ$  ως κάθετες στην ίδια ευθεία, την  $ΒΓ$ .

**γ)** Είναι  $∠\hat{Δ}Α = ∠\hat{Μ}ΑΔ$  ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων  $ΓΔ$  και  $ΑΜ$  που τέμνονται από την  $ΑΔ$  και επειδή από το α) ερώτημα είναι  $∠\hat{Δ}ΑΓ = ∠\hat{Δ}Α$ , τότε θα είναι  $∠\hat{Δ}ΑΓ = ∠\hat{Μ}ΑΔ$ , άρα η  $ΑΔ$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $∠\hat{Μ}ΑΓ$ .



**468 Θέμα 4 – 34335**

Έστω κύκλος  $(Ο, R)$ , ευθεία  $χ'χ$  η οποία έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο  $A$ , τυχαίο σημείο  $M$  της ημιευθείας και τυχαίο σημείο  $B$  του κύκλου τέτοιο ώστε  $MB = MA$ .



**α)** Επειδή η ευθεία  $χ'χ$  έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο  $A$ , αυτή θα είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο  $A$ . Άρα  $ΟΑ \perp ΜΑ$ .

Τα τρίγωνα  $ΜΟΒ$  και  $ΜΟΑ$  έχουν:

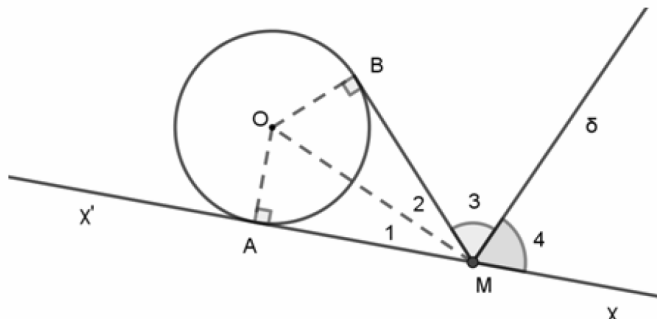
- $ΜΟ$ , κοινή πλευρά
- $ΟΒ = ΟΑ$ , ως ακτίνες του κύκλου  $(Ο, R)$
- $ΜΒ = ΜΑ$ , από την υπόθεση

Επομένως, τα τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς (κριτήριο ισότητας Π-Π-Π), οπότε είναι ίσα. Απέναντι από την πλευρά OM βρίσκονται αντίστοιχα ίσες γωνίες, οπότε  $\widehat{A} = \widehat{B}$ .

Επειδή  $\widehat{A} = 90^\circ$  συμπεραίνουμε ότι  $\widehat{B} = 90^\circ$ .

Άρα, το MB είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (O,R).

**β)** Έστω Mδ η διχοτόμος της γωνίας BMx.



Τα τμήματα MA και MB είναι εφαπτόμενα του κύκλου (O,R).

Η MO είναι διχοτόμος της γωνίας AMB, οπότε  $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ .

Επειδή Mδ είναι η διχοτόμος της γωνίας BMx έχουμε  $\widehat{M}_3 = \widehat{M}_4$ .

Είναι  $\widehat{AMx} = 180^\circ$  οπότε  $\widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 + \widehat{M}_3 + \widehat{M}_4 = 180^\circ$  ή  $2\widehat{M}_2 + 2\widehat{M}_3 = 180^\circ$  ή  $\widehat{M}_2 + \widehat{M}_3 = 90^\circ$ , δηλαδή  $\widehat{OMδ} = 90^\circ$ . Άρα η Mδ είναι κάθετη στη MO.

**γ)** Το ευθύγραμμο τμήμα OB και η διχοτόμος Mδ τέμνονται από το ευθύγραμμο τμήμα OM. Αν οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζονται από τις OB και Mδ με την τέμνουσά τους OM έχουν άθροισμα μικρότερο από  $180^\circ$ , τότε το OB και η Mδ θα τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας OM που βρίσκονται οι γωνίες.

Το ευθύγραμμο τμήμα OB σχηματίζει με το OM τη γωνία  $\widehat{BOM}$ .

Το ευθύγραμμο τμήμα OM σχηματίζει με τη διχοτόμο Mδ τη γωνία  $\widehat{OMδ}$ .

Πρέπει να αποδείξουμε ότι  $\widehat{BOM} + \widehat{OMδ} < 180^\circ$ .

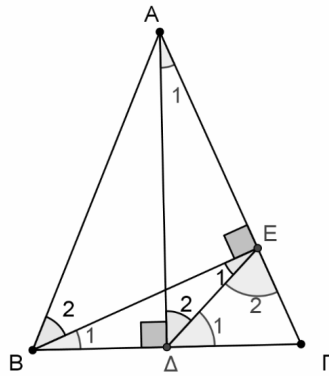
- Αν  $\widehat{BOM} + \widehat{OMδ} = 180^\circ$  και επειδή  $\widehat{OMδ} = 90^\circ$ , αφού από β) ερώτημα είναι η Mδ είναι κάθετη στη MO, τότε  $\widehat{BOM} = 90^\circ$ . Αυτό είναι αδύνατο, γιατί τότε το τρίγωνο OBM θα είχε δυο γωνίες ορθές την  $\widehat{OMδ}$  και  $\widehat{B}$ , αφού  $\widehat{B} = 90^\circ$  από α) ερώτημα.
- Αν  $\widehat{BOM} + \widehat{OMδ} > 180^\circ$  αυτό είναι αδύνατο, γιατί το άθροισμα δύο γωνιών τριγώνου (στην περίπτωση μας το τρίγωνο MOδ) είναι μικρότερο των  $180^\circ$ .

Επομένως, ισχύει ότι  $\widehat{BOM} + \widehat{OMδ} < 180^\circ$ .

### 469 Θέμα 4 – 34321

Από δεδομένα έχουμε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με  $AB = AΓ$  και το AΔ ύψος στη βάση του BΓ, άρα το AΔ είναι διάμεσος στη βάση BΔ, δηλαδή Δ το μέσο της BΓ, και διχοτόμος της

γωνίας της κορυφής A, οπότε θα ισχύει  $\widehat{A}_1 = \frac{\widehat{A}}{2}$  (1).



**α)** Από δεδομένα έχουμε ότι το BE είναι ύψος στην πλευρά AG, οπότε το τρίγωνο BEΓ είναι ορθογώνιο με  $\widehat{B\hat{E}\Gamma} = 90^\circ$  (2) και η ED είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα BΓ, οπότε  $ED = \frac{B\Gamma}{2}$  ή  $B\Gamma = 2ED$ .

**β)** Έχουμε ότι Δ μέσο της και ότι  $ED = \frac{B\Gamma}{2}$ , άρα  $ED = \Delta\Gamma = \Delta B$ , οπότε τα τρίγωνα EΔΓ και EΔB είναι ισοσκελή και θα ισχύουν  $\widehat{E}_2 = \widehat{\Gamma}$  (3) και  $\widehat{E}_1 = \widehat{B}_1$  (4), ως γωνίες προσκείμενες στις βάσεις ΔΓ και BE των τριγώνων αντίστοιχα.

Από δεδομένα έχουμε ότι το AD είναι ύψος στην πλευρά BΓ, οπότε το τρίγωνο AΔΓ είναι ορθογώνιο με  $\widehat{A\hat{\Delta}\Gamma} = 90^\circ$  και για τις οξείες γωνίες του θα ισχύει ότι:

$$\widehat{A}_1 + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \text{ ή } \widehat{A}_1 = 90^\circ - \widehat{\Gamma} \text{ (5)}$$

Επίσης στο ορθογώνιο τρίγωνο BEΓ για τις οξείες γωνίες του θα ισχύει ότι:

$$\widehat{B}_1 + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \text{ ή } \widehat{B}_1 = 90^\circ - \widehat{\Gamma} \text{ και λόγω της σχέσης (4) έχουμε ότι } \widehat{E}_1 = 90^\circ - \widehat{\Gamma} \text{ (6)}$$

Από τις σχέσεις (5), (6) και (1) προκύπτει ότι:  $\widehat{E}_1 = \frac{\widehat{A}}{2}$ .

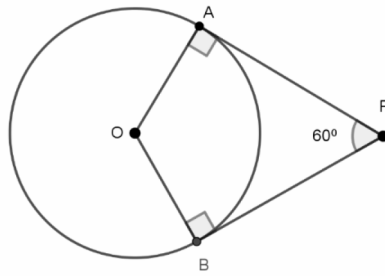
**γ)** Είναι  $\widehat{B}_2 = \widehat{B} - \widehat{B}_1 = \widehat{\Gamma} - \widehat{E}_1 = \widehat{\Gamma} - (90^\circ - \widehat{\Gamma}) = 2\widehat{\Gamma} - 90^\circ$  (7), επειδή είναι  $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$  ως γωνίες προσκείμενες στη βάση BΓ του ισοσκελούς ABΓ και  $\widehat{B}_1 = \widehat{E}_1 = 90^\circ - \widehat{\Gamma}$  από σχέσεις (4) και (6).

Ισχύει ότι  $\widehat{\Delta}_2 = 90^\circ - \widehat{\Delta}_1 = 90^\circ - 2\widehat{E}_1 = 90^\circ - 2(90^\circ - \widehat{\Gamma}) = 2\widehat{\Gamma} - 90^\circ$  (8), επειδή το τρίγωνο AΔΓ είναι ορθογώνιο με  $\widehat{A\hat{\Delta}\Gamma} = 90^\circ$ ,  $\widehat{\Delta}_1 = 2\widehat{E}_1$  ως εξωτερική γωνία του ισοσκελούς τριγώνου EBA και  $\widehat{E}_1 = 90^\circ - \widehat{\Gamma}$  από σχέση (6).

Από σχέσεις (7) και (8) προκύπτει ότι  $\widehat{B}_2 = \widehat{\Delta}_2$ .

#### 470 Θέμα 4 – 34315

α) Τα σημεία A και B είναι σημεία επαφής των εφαπτόμενων τμημάτων PA και PB με τον κύκλο αντίστοιχα και OA, OB ακτίνες του κύκλου που αντιστοιχούν στα σημεία επαφής.



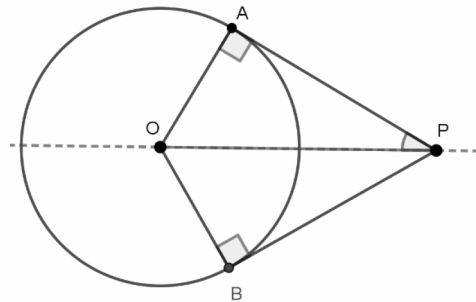
Γνωρίζουμε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα από σημείο εκτός κύκλου είναι κάθετα στις ακτίνες που αντιστοιχούν στα σημεία επαφής, οπότε θα είναι  $\widehat{OAP} = 90^\circ$  και  $\widehat{OBP} = 90^\circ$ .

Για τις γωνίες του τετράπλευρου ΡΑΟΒ ισχύει ότι:

$$\widehat{APB} + \widehat{OBP} + \widehat{AOB} + \widehat{OAP} = 360^\circ \text{ ή } 60^\circ + 90^\circ + \widehat{AOB} + 90^\circ = 360^\circ$$

$$\text{ή } \widehat{AOB} = 360^\circ - 240^\circ \text{ ή } \widehat{AOB} = 120^\circ$$

β) Φέρνουμε την διακεντρική ευθεία ΡΟ.



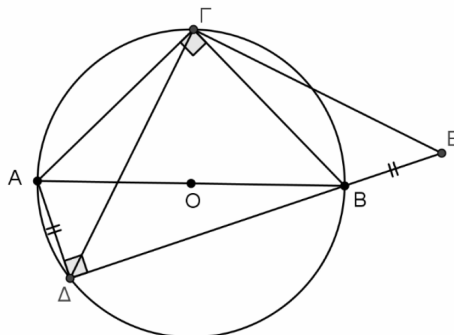
i. Γνωρίζουμε ότι η διακεντρική ευθεία ΡΟ διχοτομεί τη γωνία  $\widehat{APB}$  των εφαπτόμενων τμημάτων ΡΑ και ΡΒ, άρα  $\widehat{APO} = \frac{\widehat{APB}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$ .

ii. Από το α) ερώτημα έχουμε ότι  $\widehat{OAP} = 90^\circ$ , οπότε το τρίγωνο ΟΑΡ είναι ορθογώνιο. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΡ η γωνία  $\widehat{APO}$ , λόγω του βι) ερωτήματος, ισούται με  $30^\circ$ , οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά ΑΟ ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΡΟ, δηλαδή  $OA = \frac{OP}{2}$  ή

$$OP = 2 \cdot OA = 2 \cdot 4 = 8 \text{ cm.}$$

**471 Θέμα 4 – 34316**

α)



i) Για τις γωνίες του τετραπλεύρου ΓΑΔΒ ισχύει ότι:

$$\widehat{\Gamma\Delta\Lambda} + \widehat{A\Delta\Lambda} + \widehat{\Delta\Lambda\Gamma} + \widehat{A\Gamma\Lambda} = 360^\circ \text{ και αφού } \widehat{A\Gamma\Lambda} = \widehat{A\Delta\Lambda} = 90^\circ \text{ τότε } \widehat{\Gamma\Delta\Lambda} + \widehat{\Delta\Lambda\Gamma} = 180^\circ,$$

$$\text{οπότε } \widehat{\Gamma\Delta\Lambda} = 180^\circ - \widehat{\Delta\Lambda\Gamma} \quad (1).$$

Η  $\widehat{\Gamma\Lambda\epsilon}$  είναι παραπληρωματική γωνία της  $\widehat{\Delta\Lambda\Gamma}$ , οπότε  $\widehat{\Gamma\Lambda\epsilon} = 180^\circ - \widehat{\Delta\Lambda\Gamma}$  (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι  $\widehat{\Gamma\Delta\Lambda} = \widehat{\Gamma\Lambda\epsilon}$ .

i. Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ έχουν:

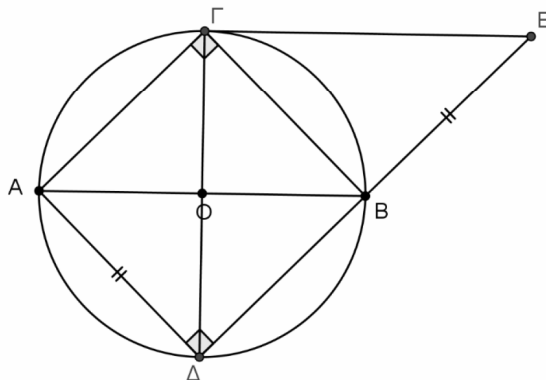
- $AD = BE$ , από υπόθεση
- $AG = GB$  ως ίσες χορδές των ίσων τόξων ΑΓ και ΓΒ αφού το Γ είναι μέσο του τόξου ΑΒ.
- $\widehat{\Gamma\Delta\Lambda} = \widehat{\Gamma\Lambda\epsilon}$  από α) ερώτημα

Άρα τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι ίσα γιατί έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (Π-Γ-Π).

ii) Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι ίσα, προκύπτει ότι  $\widehat{A\Gamma\Delta} = \widehat{B\Gamma\epsilon}$  γιατί είναι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΔ και ΒΕ αντίστοιχα.

Τότε:  $\widehat{\Delta\Gamma\epsilon} = \widehat{\Delta\Gamma\Lambda} + \widehat{B\Gamma\epsilon} = \widehat{\Delta\Gamma\Lambda} + \widehat{A\Gamma\Delta} = \widehat{A\Gamma\Lambda} = 90^\circ$ , άρα  $\Gamma\Delta \perp \Gamma\epsilon$ .

β)



Όταν το Δ είναι αντιδιαμετρικό του Γ, τότε από το α)iii. ερώτημα είδαμε ότι  $\Gamma\Delta \perp \Gamma\epsilon$  ή  $OG \perp \Gamma\epsilon$  αφού ΓΔ διάμετρος και ΟΓ ακτίνα του κύκλου. Δηλαδή για την ακτίνα ΟΓ ισχύει ότι είναι κάθετη στο τμήμα ΓΕ, οπότε η ΓΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου.

#### 472 Θέμα 4 – 36339

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΓΕ έχουν:

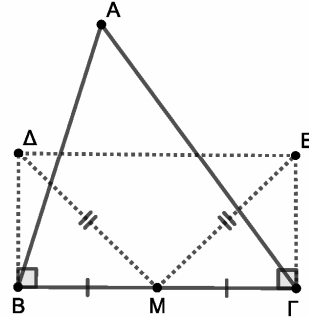
- $MB = MG$ , διότι το Μ είναι μέσο του ΒΓ
- $MD = ME$ , από υπόθεση.

Άρα τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΓΕ είναι ίσα γιατί ως ορθογώνια έχουν την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία. Επομένως θα έχουν ίσες και τις τρίτες τους πλευρές, δηλαδή θα είναι  $BD = GE$ .

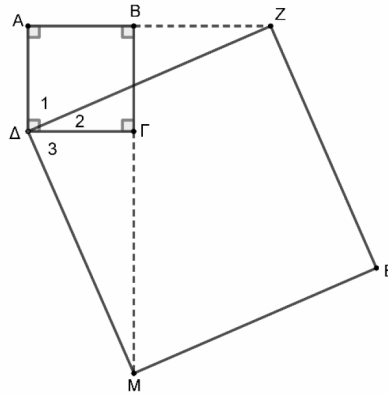
β) Τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ ανήκουν στις κάθετες στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα, οπότε θα είναι κάθετα στη ΒΓ, άρα θα είναι παράλληλα μεταξύ τους ( $BD \parallel GE$ ) ως κάθετα τμήματα στην ίδια ευθεία ΒΓ. Επίσης από το α) ερώτημα ισχύει ότι  $BD = GE$ .

Οπότε το τετράπλευρο ΒΔΕΓ έχει δύο απέναντι πλευρές του, τις ΒΔ και ΓΕ, παράλληλες και ίσες άρα είναι παραλληλόγραμμο.

Επειδή είναι  $\widehat{\Delta\hat{B}\Gamma} = 90^\circ$ , τότε το τετράπλευρο ΔΒΓΕ είναι ορθογώνιο γιατί είναι παραλληλόγραμμο με μια ορθή γωνία.



### 473 Θέμα 4 – 34336



**α)** Για τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΜ έχουμε:

- $AD = \Delta\Gamma$ , ως πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ
- $AZ = \Gamma M$ , από τα δεδομένα

Άρα έχουν μία προς μία ίσες τις κάθετες πλευρές τους, οπότε είναι ίσα.

Αν  $\widehat{AZ\Delta} = \widehat{\Delta_1}$  και  $\widehat{\Gamma\Delta M} = \widehat{\Delta_3}$ , τότε  $\widehat{\Delta_1} = \widehat{\Delta_3}$  διότι βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΖ και ΓΜ των ίσων τριγώνων ΑΔΖ και ΓΔΜ.

**β)** Από την υπόθεση έχουμε ότι το τετράπλευρο ΔΜΕΖ να είναι παραλληλόγραμμο.

Για να είναι το ΔΜΕΖ τετράγωνο, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

Είναι  $\widehat{M\Delta Z} = \widehat{\Delta_2} + \widehat{\Delta_3}$ , όμως  $\widehat{\Delta_1} = \widehat{\Delta_3}$  από α) ερώτημα, οπότε  $\widehat{M\Delta Z} = \widehat{\Delta_2} + \widehat{\Delta_1} = \widehat{A\Delta\Gamma} = 90^\circ$ . Συνεπώς το παραλληλόγραμμο ΔΜΕΖ είναι και ορθογώνιο διότι έχει μία ορθή γωνία.

Επειδή τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΜ είναι ίσα (ερώτημα α), θα έχουν και τις υποτείνουσες αντίστοιχα ίσες, δηλαδή  $\Delta Z = \Delta M$ . Άρα το ορθογώνιο ΔΜΕΖ είναι και ρόμβος, διότι έχει δύο διαδοχικές πλευρές είναι ίσες. Συνεπώς το ΔΜΕΖ είναι τετράγωνο.

**γ)** Από το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχουμε  $\widehat{A\hat{B}\Gamma} = 90^\circ$  άρα και  $\widehat{M\hat{B}Z} = 90^\circ$  ως παραπληρωματική της. Από το τετράγωνο ΔΜΕΖ έχουμε  $\widehat{Z\hat{E}M} = 90^\circ$ . Άρα  $\widehat{M\hat{B}Z} + \widehat{Z\hat{E}M} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ .

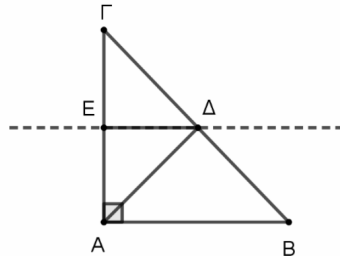
Για τις γωνίες του τετραπλεύρου ΒΖΕΜ ισχύει ότι:

$$\widehat{BZE} + \widehat{ZEM} + \widehat{EMB} + \widehat{MBZ} = 360^\circ \text{ ή } \widehat{BZE} + \widehat{EMB} + 180^\circ = 360^\circ \text{ ή } \widehat{BZE} + \widehat{EMB} = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$$

Άρα οι γωνίες  $\widehat{BZE}$  και  $\widehat{EMB}$  είναι παραπληρωματικές.

#### 474 Θέμα 4 – 34398

Έστω ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με  $\widehat{A}$  ορθή, ΑΔ η διχοτόμος της  $\widehat{A}$  και ΕΔ η παράλληλη ευθεία προς την πλευρά ΑΒ.



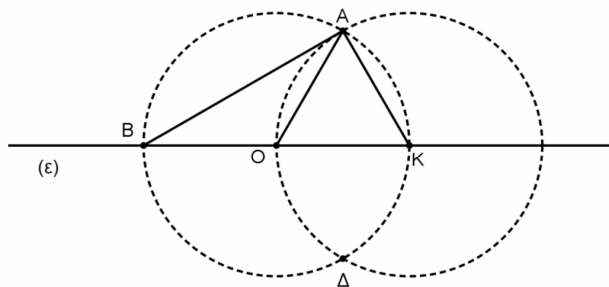
α) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η διχοτόμος του ΑΔ θα είναι ύψος και διάμεσος. Επειδή η ΑΔ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ισχύει ότι  $AD = \frac{BG}{2}$ .

β) Είναι  $AB \parallel DE$  και  $AG \perp AB$  επειδή  $\widehat{A}$  ορθή από τα δεδομένα.

Άρα η ΑΓ θα είναι κάθετη και στην παράλληλη της ΑΒ που είναι η ΔΕ, δηλαδή  $AG \perp DE$ . Οπότε το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο με  $\widehat{GED} = 90^\circ$ .

γ) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, το Δ είναι μέσο της ΒΓ και  $DE \parallel AB$ , άρα και το Ε είναι μέσο της ΑΓ. Επειδή το τμήμα ΔΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ του ΑΒΓ ισχύει ότι:  $DE = \frac{AB}{2}$  ή  $DE = \frac{AG}{2}$  αφού  $AB=AG$  στο ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ.

#### 475 Θέμα 4 – 34314



α)

i. Από τα δεδομένα έχουμε ότι οι κύκλοι με κέντρα τα σημεία Ο και Κ είναι ίσοι ακτίνας ρ. Οπότε θα είναι  $AO = OK = \rho$ , ως ακτίνες του κύκλου με κέντρο το Ο.

Ισχύει επίσης ότι  $KA = \rho$  ως ακτίνα του κύκλου κέντρου Κ. Άρα  $AO = OK = KA = \rho$  (1).

Επομένως το τρίγωνο ΟΑΚ είναι ισόπλευρο.

ii. Στο τρίγωνο ΑΒΚ, η πλευρά του ΒΚ είναι διάμετρος του κύκλου (Ο, ρ) και το Ο είναι το μέσο της ως κέντρο του κύκλου οπότε ισχύει ότι  $OB = OK = \rho$  (2) και άρα το τμήμα ΑΟ είναι

διάμεσος στην πλευρά ΒΓ. Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι  $AO = OB = OK$  ή  $AO = \frac{BK}{2}$ .



Επομένως η διάμεσος ΑΟ που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΚ του τριγώνου ΑΒΚ είναι ίση με το μισό της, άρα το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά ΒΓ.

**β)** Από το α) ερώτημα έχουμε ότι το τρίγωνο ΟΑΚ είναι ισόπλευρο, οπότε  $\widehat{ΒΚΑ} = 60^\circ$ . Από το α) ερώτημα έχουμε ότι το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΒΚ, οπότε  $\widehat{ΒΑΚ} = 90^\circ$ . Για τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΚ ισχύει ότι  $\widehat{ΒΑΚ} + \widehat{ΒΚΑ} + \widehat{ΑΒΚ} = 180^\circ$ , οπότε θα έχουμε  $90^\circ + 60^\circ + \widehat{ΑΒΚ} = 180^\circ$  ή  $\widehat{ΑΒΚ} = 30^\circ$ .

#### 476 Θέμα 4 – 36103

**α)** Στο τρίγωνο ΑΒΓ το ΕΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, άρα  $EZ = \frac{ΒΓ}{2}$  (1).

Επίσης, το Ε είναι μέσο του ΑΒ και το Ζ είναι μέσο του ΑΓ, άρα ισχύουν  $AE = \frac{ΑΒ}{2}$  (2) και

$$AZ = \frac{ΑΓ}{2} \text{ (3).}$$

Επειδή το ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, θα ισχύει ότι  $ΑΒ = ΑΓ = ΒΓ$ , οπότε σε συνδυασμό με τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι  $EZ = AE = AZ$ .

**β)** Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ για τις γωνίες του θα ισχύει ότι  $\widehat{Α} = \widehat{Β} = \widehat{Γ} = 60^\circ$ .

Επίσης ισχύει ότι:  $\psi\widehat{ΑΓ} = 180^\circ - \widehat{Α} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ .

Η Αχ είναι εξωτερική διχοτόμος της  $\widehat{Α}$ , άρα  $\Delta\widehat{ΑΓ} = \frac{\psi\widehat{ΑΓ}}{2} = 60^\circ$ .

Για τις οξείες γωνίες  $\widehat{ΑΓΔ}$  και  $\Delta\widehat{ΑΓ}$  του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ ισχύει ότι  $\widehat{ΑΓΔ} + \Delta\widehat{ΑΓ} = 90^\circ$ , οπότε  $\widehat{ΑΓΔ} = 90^\circ - \Delta\widehat{ΑΓ} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ .

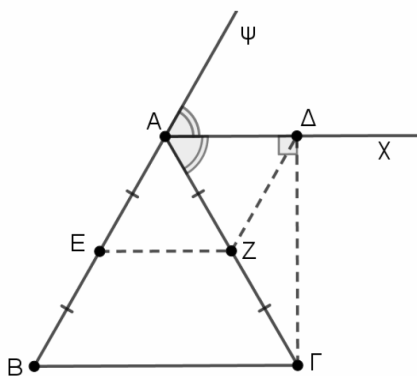
**γ)** Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ, η ΔΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΑΓ, άρα  $\Delta Z = \frac{ΑΓ}{2} = AZ$ . Από το α) ερώτημα έχουμε ότι  $AZ = AE$ , άρα  $\Delta Z = AE$  (4).

Επειδή είναι  $\widehat{ΑΓΔ} = 30^\circ$ , τότε η απέναντί της κάθετη πλευρά θα είναι το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή  $ΑΔ = \frac{ΑΓ}{2} = AZ$  (5).

Από τις σχέσεις (4) και (5) προκύπτει ότι  $\Delta Z = AZ = ΑΔ$ .

Όμως από το α) ερώτημα έχουμε ότι  $EZ = AE = AZ$ .

Οπότε θα έχουμε  $\Delta Z = ΑΔ = AE = EZ$ , άρα το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ρόμβος γιατί έχει όλες του τις πλευρές ίσες.



**477 Θέμα 4 – 34515**

**α)** Αφού η  $AB$  είναι κάθετη στην  $Ox$ , η γωνία  $\widehat{OBA}$  είναι ορθή, οπότε το τρίγωνο  $OBA$  είναι ορθογώνιο, στο οποίο η  $BM$  είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, οπότε ισχύει ότι  $BM = \frac{OA}{2} = MA$  (1). Άρα το τρίγωνο  $BMA$  είναι ισοσκελές.

**β)** Αφού η  $AG$  είναι κάθετη στην  $Oy$ , η γωνία  $\widehat{OGA}$  είναι ορθή, οπότε το τρίγωνο  $OGA$  είναι ορθογώνιο, στο οποίο η  $GM$  είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα  $GM = \frac{OA}{2}$  (2)

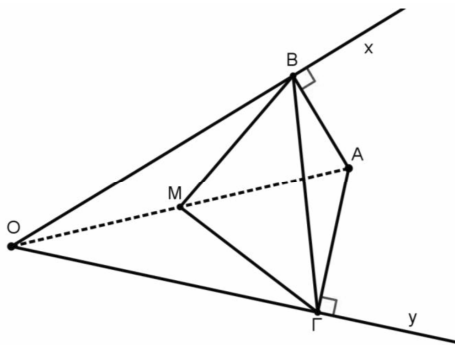
Από τις (1), (2) προκύπτει ότι  $BM = GM$ , άρα το τρίγωνο  $BGM$  είναι ισοσκελές.

**γ)** Από την (1) ισχύει ότι:  $BM = \frac{OA}{2} = OM$ , αφού  $M$  μέσο του  $OA$ .

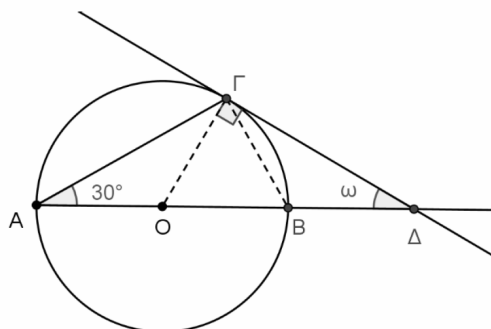
Άρα το τρίγωνο  $OBM$  είναι ισοσκελές με βάση  $OB$  και ισχύει ότι  $\widehat{M\hat{O}B} = \widehat{M\hat{B}O}$ , ως γωνίες προκειμένες στη βάση.

Η γωνία  $\widehat{B\hat{M}A}$  είναι εξωτερική στο τρίγωνο  $\widehat{B\hat{M}O}$ , οπότε θα είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου, δηλαδή:

$$\widehat{B\hat{M}A} = \widehat{M\hat{O}B} + \widehat{M\hat{B}O} = 2\widehat{M\hat{O}B}, \text{ δηλαδή } \widehat{B\hat{M}A} = 2 \cdot \widehat{x\hat{O}A}$$



**478 Θέμα 4 – 34313**



**α)** Η εφαπτομένη στο σημείο  $\Gamma$  του κύκλου, η  $G\Delta$ , είναι κάθετη στην ακτίνα  $O\Gamma$ , άρα  $\widehat{O\hat{\Gamma}\Delta} = 90^\circ$ . Οπότε το τρίγωνο  $GO\Delta$  είναι ορθογώνιο.

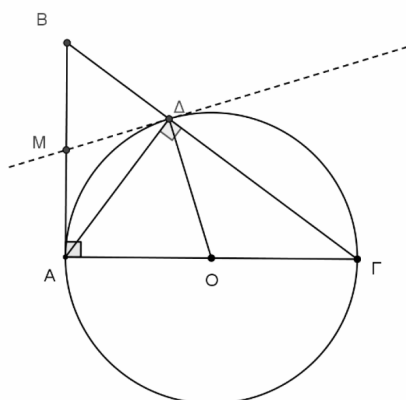
Είναι  $OA=O\Gamma$  ως ακτίνες του κύκλου, άρα το τρίγωνο  $AO\Gamma$  είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά  $AG$ , οπότε οι γωνίες οι προσκείμενες στη βάση του  $AG$  θα είναι ίσες, δηλαδή  $\widehat{O\hat{\Gamma}A} = \widehat{O\hat{A}\Gamma} = 30^\circ$ .

Στο τρίγωνο  $AO\Gamma$  η γωνία  $\widehat{G\hat{O}\Delta}$  είναι εξωτερική του, οπότε θα ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του, δηλαδή  $\widehat{G\hat{O}\Delta} = \widehat{O\hat{\Gamma}A} + \widehat{O\hat{A}\Gamma} = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$ .

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΟΔ με ορθή τη γωνιά του ΟΓΔ (από α) ερώτημα), οι οξείες γωνίες του ΓΟΔ και ΓΔΟ είναι συμπληρωματικές, δηλαδή ισχύει  $\widehat{ΓΟΔ} + \widehat{ΓΔΟ} = 90^\circ$ . Επειδή είναι  $\widehat{ΓΟΔ} = 60^\circ$ , άρα  $\widehat{ΓΔΟ} = 90^\circ - 60^\circ$  ή  $\widehat{ΓΔΟ} = 30^\circ$ .

γ) Το τρίγωνο ΓΟΔ είναι ορθογώνιο (από α) ερώτημα) και η γωνία του ΓΔΟ είναι ίση με  $30^\circ$  (από το β) ερώτημα), οπότε η απέναντι της πλευρά, δηλαδή η ΟΓ θα είναι ίση με το μισό της υποτεινούςας του ΟΔ, δηλαδή θα ισχύει  $ΟΓ = \frac{ΟΔ}{2}$  ή  $ΟΔ = 2ΟΓ = 2R$ , αφού η ΟΓ είναι ακτίνα του κύκλου.

**479 Θέμα 4 – 34329**



α) Φέρνουμε την ΟΔ. Είναι  $ΟΔ = ΟΑ = ΟΓ$  ως ακτίνες του κύκλου κέντρου Ο με διάμετρο την πλευρά ΑΓ του ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ. Οπότε στο τρίγωνο ΑΔΓ η ΟΔ είναι διάμεσος στην πλευρά του ΑΓ, αφού το Ο ως κέντρο είναι το μέσο, και ισχύει  $ΟΔ = \frac{ΑΓ}{2}$ . Επομένως το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο με υποτεινούσα την πλευρά ΑΓ ορθή τη γωνία ΑΔΓ, άρα οι οξείες γωνίες του είναι συμπληρωματικές, δηλαδή  $\widehat{ΓΑΔ} + \widehat{Γ} = 90^\circ$  ή  $\widehat{ΓΑΔ} = 90^\circ - \widehat{Γ}$  (1).

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, άρα οι οξείες γωνίες του είναι συμπληρωματικές, δηλαδή  $\widehat{Β} + \widehat{Γ} = 90^\circ$  ή  $\widehat{Β} = 90^\circ - \widehat{Γ}$  (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει:  $\widehat{ΓΑΔ} = \widehat{Β}$ .

β) Το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές διότι  $ΟΓ = ΟΔ$  ως ακτίνες του κύκλου, οπότε οι προσκείμενες γωνίες στη βάση του ΓΔ θα είναι ίσες, δηλαδή  $\widehat{Γ} = \widehat{ΟΔΓ}$  (3).

Επειδή η ΔΜ είναι εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο Δ, η ακτίνα στο σημείο επαφής θα είναι κάθετη στην εφαπτομένη ( $ΟΔ \perp ΔΜ$ ), οπότε  $\widehat{ΜΔΟ} = 90^\circ$  (4)

Τότε  $\widehat{ΜΔΒ} = 180^\circ - \widehat{ΜΔΟ} - \widehat{ΟΔΓ} = 180^\circ - 90^\circ - \widehat{Γ}$  λόγω των σχέσεων (3) και (4), δηλαδή τελικά  $\widehat{ΜΔΒ} = 90^\circ - \widehat{Γ}$  (5).

Από τις σχέσεις (2) και (5) προκύπτει ότι θα είναι  $\widehat{ΜΔΒ} = \widehat{Β}$ . Άρα το τρίγωνο ΔΜΒ είναι ισοσκελές με  $ΜΔ = ΜΒ$  (3).

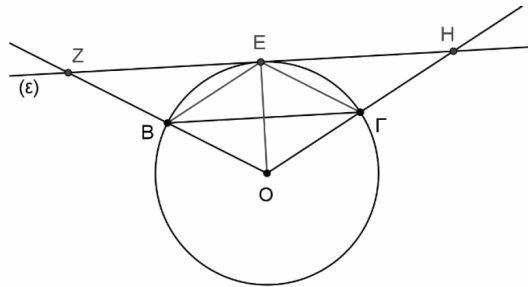
γ) Επειδή είναι  $\widehat{Α} = 90^\circ$ , θα είναι  $ΜΑ \perp ΟΑ$  και  $ΟΔ \perp ΔΜ$ , οπότε τα ΜΑ και ΜΔ είναι εφαπτόμενα τμήματα, άρα θα είναι ίσα, δηλαδή  $ΜΑ = ΜΔ$  (4).

Από τις (3), (4) βρίσκουμε ότι  $ΜΑ = ΜΒ$ , δηλαδή το Μ είναι μέσο του ΑΒ.

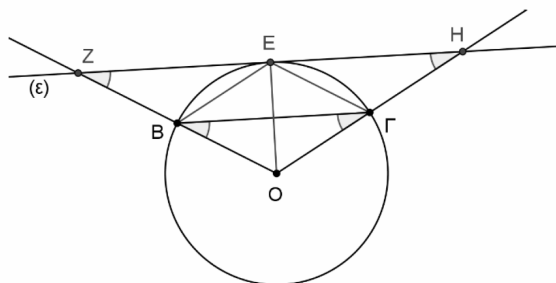
**480 Θέμα 4 – 34318**

**α)**

i. Η ακτίνα ΟΕ στο σημείο επαφής Ε είναι κάθετη στην εφαπτομένη (ε) του κύκλου. Το Ε είναι μέσο του τόξου ΒΓ, οπότε τα τόξα ΒΕ και ΕΓ είναι ίσα, άρα και οι αντίστοιχες χορδές τους ΕΒ και ΕΓ θα είναι ίσες. Επίσης είναι ΟΒ = ΟΓ ως ακτίνες του κύκλου. Επομένως η ευθεία που ορίζουν τα σημεία Ο και Ε θα είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ. Οπότε η ΟΕ θα είναι κάθετη στην ΒΓ και επίσης είναι κάθετη στην ευθεία (ε). Επομένως ΒΓ // (ε) ως κάθετες ευθείες στην ίδια ευθεία ΟΕ.



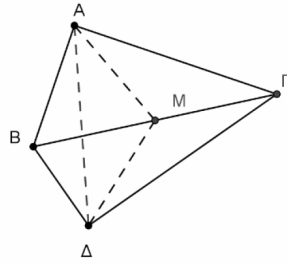
ii. Επειδή είναι ΟΒ = ΟΓ ως ακτίνες του κύκλου, το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΒΓ, οπότε οι προσκείμενες στη βάση του γωνίες θα είναι ίσες, δηλαδή  $\widehat{ΟΒΓ} = \widehat{ΟΓΒ}$  (1). Επίσης είναι  $\widehat{ΟΒΓ} = \widehat{ΟΖΗ}$  (2) και  $\widehat{ΟΓΒ} = \widehat{ΟΗΖ}$  (3) ως εντός εκτός και επι τα αυτά γωνίες των παραλλήλων ΒΓ και (ε) με τέμνουσες την ΟΖ και ΟΗ αντίστοιχα. Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι  $\widehat{ΟΖΗ} = \widehat{ΟΗΖ}$  (4), οπότε το τρίγωνο ΟΖΗ είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΖΗ.



**β)** Η ΟΕ είναι κάθετη στην (ε), οπότε το τρίγωνο ΟΕΖ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα ΟΖ και η ΒΕ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα, άρα  $BE = \frac{OZ}{2} = OB = r$ , όμως  $OE = OB = r$ . Οπότε  $OE = OB = \frac{OZ}{2}$ . Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΕΖ η κάθετη πλευρά του ΟΕ είναι το μισό της υποτείνουσάς του ΟΖ, άρα η απέναντι της κάθετης πλευράς γωνία θα είναι  $30^\circ$ , δηλαδή  $\widehat{ΟΖΗ} = 30^\circ$ . Όμως  $\widehat{ΟΖΗ} = \widehat{ΟΗΖ}$  ( από σχέση (4)), οπότε  $\widehat{ΟΗΖ} = 30^\circ$ .

Για τις γωνίες του τριγώνου ΟΖΗ ισχύει ότι  $\widehat{ΟΖΗ} + \widehat{ΟΗΖ} + \widehat{ΖΟΗ} = 180^\circ$  ή  $30^\circ + 30^\circ + \widehat{ΖΟΗ} = 180^\circ$  ή  $\widehat{ΖΟΗ} = 120^\circ$ .

## 481 Θέμα 4 – 34330



**α)** Το τμήμα AM είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ABΓ που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας οπότε είναι ίση με το μισό της υποτεινούσας, δηλαδή  $AM = \frac{B\Gamma}{2}$ .

Όμοια, το τμήμα ΔM είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου BΔΓ, που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας οπότε είναι ίση με το μισό της υποτεινούσας, δηλαδή  $\Delta M = \frac{B\Gamma}{2}$ .

Άρα  $AM = \Delta M$ , οπότε το τρίγωνο AMΔ είναι ισοσκελές.

**β)** Επειδή  $AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$  (1) το τρίγωνο AMΓ είναι ισοσκελές οπότε ισχύει ότι  $\widehat{M\hat{A}\Gamma} = \widehat{M\hat{\Gamma}A}$  (2)

Επειδή  $\Delta M = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$  (3) το τρίγωνο ΔMΓ είναι ισοσκελές οπότε ισχύει ότι  $\widehat{M\hat{\Delta}\Gamma} = \widehat{M\hat{\Gamma}\Delta}$  (4)

Η γωνία  $\widehat{A\hat{M}B}$  είναι εξωτερική στο τρίγωνο AMΓ, άρα ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών, οπότε σε συνδυασμό με τη σχέση (2) έχουμε:

$$\widehat{A\hat{M}B} = \widehat{M\hat{A}\Gamma} + \widehat{M\hat{\Gamma}A} \text{ ή } \widehat{A\hat{M}B} = 2\widehat{M\hat{\Gamma}A} \text{ (4)}$$

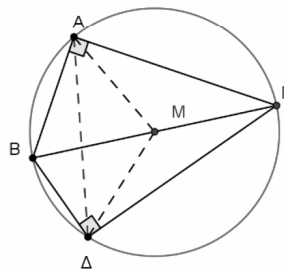
Η γωνία  $\widehat{B\hat{M}\Delta}$  είναι εξωτερική στο τρίγωνο MΔΓ, άρα ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών, οπότε σε συνδυασμό με τη σχέση (4) έχουμε

$$\widehat{B\hat{M}\Delta} = \widehat{M\hat{\Delta}\Gamma} + \widehat{M\hat{\Gamma}\Delta} \text{ ή } \widehat{B\hat{M}\Delta} = 2\widehat{M\hat{\Gamma}\Delta} \text{ (5)}$$

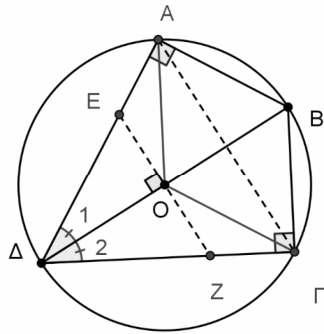
Προσθέτουμε κατά μέλη τις (4), (5) και βρίσκουμε

$$\widehat{A\hat{M}B} + \widehat{B\hat{M}\Delta} = 2\widehat{M\hat{\Gamma}A} + 2\widehat{M\hat{\Gamma}\Delta} \text{ ή } \widehat{A\hat{M}\Delta} = 2\widehat{A\hat{\Gamma}\Delta}$$

**γ)** Το M είναι μέσο της BΓ, άρα  $MB = M\Gamma$ . Όμως  $AM = M\Gamma$  από (1) και  $\Delta M = M\Gamma$  από (3), άρα  $MB = M\Gamma = MA = AM = \Delta M$ . Οπότε τα σημεία A, B, Γ και Δ ισαπέχουν από το σημείο M, άρα θα βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο το μέσο M της BΓ.



482 Θέμα 4 – 34328



α) Από τα δεδομένα έχουμε ότι οι γωνίες  $\widehat{A}$  και  $\widehat{\Gamma}$  του ΑΒΓΔ είναι ορθές και η γωνία του  $\widehat{B}$  είναι διπλάσια της γωνίας του  $\widehat{\Delta}$ , δηλαδή  $\widehat{A} = \widehat{\Gamma} = 90^\circ$  και  $\widehat{B} = 2 \widehat{\Delta}$ .

Για τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ισχύει ότι:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta} = 360^\circ \text{ ή } 90^\circ + 90^\circ + 2 \widehat{\Delta} + \widehat{\Delta} = 360^\circ \text{ ή } 3 \widehat{\Delta} = 180^\circ \text{ ή } \widehat{\Delta} = 60^\circ, \text{ οπότε } \widehat{B} = 120^\circ.$$

β)

i. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΒΔ έχουν  $\widehat{A} = \widehat{\Gamma} = 90^\circ$ , την πλευρά ΒΔ κοινή και τις πλευρές ΑΒ και ΒΓ ίσες. Συνεπώς είναι ίσα, ως ορθογώνια που έχουν δυο ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία, συνεπώς  $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2$  (1) ως απέναντι γωνίες των ίσων πλευρών ΑΒ και ΒΓ. Άρα η διαγώνιος ΒΔ διχοτομεί τη γωνία  $\widehat{\Delta}$  του ΑΒΓΔ.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ είναι  $\widehat{\Delta}_1 = \frac{\widehat{\Delta}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$ , οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά

ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή  $AB = \frac{\Delta B}{2} = \frac{2\rho}{2} = \rho$  (2), αφού η ΔΒ είναι διάμετρος του κύκλου (Ο,ρ), γιατί από τα δεδομένα έχουμε ότι διέρχεται από το κέντρο Ο του κύκλου.

Όμοια, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΒΔ είναι  $\widehat{\Delta}_2 = 30^\circ$ , αφού  $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2$  (σχέση (1)),

οπότε  $B\Gamma = \frac{\Delta B}{2} = \frac{2\rho}{2} = \rho$  (3). Επίσης  $OA = OG = \rho$  (4).

Από τις σχέσεις (2), (3) και (4) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΟ έχει όλες τις πλευρές του ίσες, άρα είναι ρόμβος.

iii. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΟ οι διαγώνιοί του ΑΓ και ΒΟ τέμνονται κάθετα, δηλαδή  $AG \perp BO$  (5).

Επίσης είναι  $EZ \perp BO$  (6) από τα δεδομένα. Οπότε είναι  $AG \parallel EZ$  ως κάθετες στην ίδια ευθεία

και επειδή οι φορείς των τμημάτων ΑΕ, ΓΖ τέμνονται στο σημείο Δ, το τετράπλευρο ΑΓΖΕ είναι τραπέζιο.

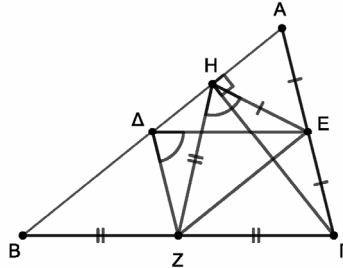
Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΖ είναι ισοσκελή, γιατί η ΔΒ είναι διχοτόμος της γωνίας τους  $\widehat{\Delta}$  (ερώτημα βι) αλλά και ύψος στις πλευρές ΑΓ και ΕΖ αντίστοιχα (σχέσεις (5), (6))

οπότε  $AD = GD$  και  $ED = ZD$ .

Είναι  $AE = AD - ED = GD - ZD = ZG$ , άρα το τραπέζιο ΑΓΖΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

## 483 Θέμα 4 – 34334

Σχεδιάζουμε οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{B} < \hat{\Gamma}$  και σημειώνουμε τα μέσα  $\Delta$ ,  $E$ ,  $Z$  των πλευρών  $AB$ ,  $A\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα. Φέρουμε την προβολή  $H$  της κορυφής  $\Gamma$  πάνω στην πλευρά  $AB$ , οπότε  $\Gamma H \perp AB$ .



α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $HA\Gamma$  με  $\hat{\Gamma}HA = 90^\circ$ , η  $HE$  είναι διάμεσος στην υποτείνουσα  $A\Gamma$ , οπότε  $HE = EG = EA = \frac{A\Gamma}{2}$ , άρα  $HE = EG$ .

Ομοίως, στο ορθογώνιο τρίγωνο  $HB\Gamma$  με  $\hat{\Gamma}HB = 90^\circ$ , η  $HZ$  είναι διάμεσος στην υποτείνουσα  $B\Gamma$ , οπότε  $HZ = Z\Gamma = ZB = \frac{B\Gamma}{2}$ , άρα  $HZ = Z\Gamma$ .

β) Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$ , τα σημεία  $\Delta$  και  $Z$  είναι μέσα των πλευρών  $AB$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα.

Επομένως,  $DZ \parallel A\Gamma$  και  $DZ = \frac{A\Gamma}{2} = EG$ . Άρα το τετράπλευρο  $DE\Gamma Z$  είναι παραλληλόγραμμο, αφού έχει τις δύο απέναντι πλευρές του  $DZ$  και  $EG$  ίσες και παράλληλες,

γ) Αφού το  $DE\Gamma Z$  είναι παραλληλόγραμμο, οι απέναντι γωνίες του θα είναι ίσες, οπότε και  $\hat{Z}\hat{D}E = \hat{E}\hat{\Gamma}Z$  (1).

Αφού είναι  $HE = EG$  (από α) ερώτημα), τότε το τρίγωνο  $HE\Gamma$  είναι ισοσκελές, οπότε  $\hat{\Gamma}\hat{H}E = \hat{H}\hat{\Gamma}E$  (2), αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές  $EG$  και  $HE$  αντίστοιχα.

Επίσης, είναι  $HZ = Z\Gamma$  (από α) ερώτημα), άρα το τρίγωνο  $HZ\Gamma$  είναι ισοσκελές, οπότε  $\hat{Z}\hat{H}\Gamma = \hat{H}\hat{\Gamma}Z$  (3), αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές  $Z\Gamma$  και  $ZH$  αντίστοιχα.

Προσθέτοντας τις ισότητες (2) και (3) κατά μέλη, έχουμε:  $\hat{Z}\hat{H}\Gamma + \hat{\Gamma}\hat{H}E = \hat{H}\hat{\Gamma}Z + \hat{H}\hat{\Gamma}E$  και άρα  $\hat{Z}\hat{H}E = \hat{E}\hat{\Gamma}Z$  και επειδή από σχέση (1) είναι  $\hat{Z}\hat{D}E = \hat{E}\hat{\Gamma}Z$ , προκύπτει ότι  $\hat{Z}\hat{D}E = \hat{Z}\hat{H}E$ .

## 484 Θέμα 4 – 36092

α)

i. Επειδή το  $\Delta E$  ενώνει τα μέσα των πλευρών  $AB$ ,  $A\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  θα είναι ίσο με το μισό της πλευράς  $B\Gamma$ , δηλαδή θα ισχύει ότι:  $DE = \frac{B\Gamma}{2}$  ή  $x = \frac{30}{2}$  ή  $x = 15$ .

ii. Το  $\Delta$  είναι μέσο του  $AB$ , άρα  $AB = 2A\Delta$ .

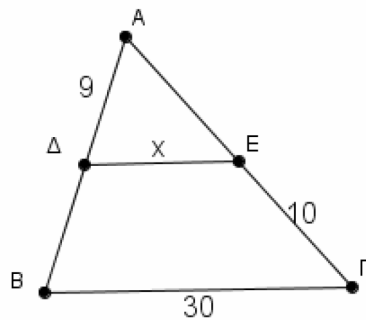
Αφού  $E$  μέσο της  $A\Gamma$ , τότε  $A\Gamma = 2AE$ .

Η περίμετρος του τριγώνου είναι:

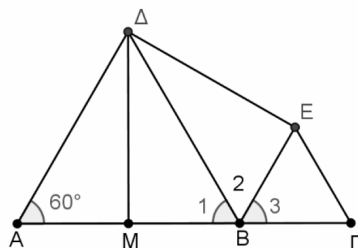
$$\Pi = AB + BG + AG = 2AD + 30 + 2EG = 18 + 30 + 20 = 68$$

**β)** Το ΔΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε θα είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά ΒΓ, δηλαδή ΔΕ // ΒΓ.

Επίσης οι ΒΔ και ΓΕ δεν είναι παράλληλες, καθώς είναι μέρη πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ που τέμνονται στο Α. Άρα το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο.



**485 Θέμα 4 – 34320**



**α)** Είναι  $\hat{A} = \hat{B}_3 = 60^\circ$  ως γωνίες ισοπλεύρων τριγώνων. Οι ίσες γωνίες  $\hat{A}$  και  $\hat{B}_3$  είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΑΔ και ΕΒ που τέμνονται από την ΑΓ, οπότε  $AD \parallel BE$ .

Έστω ότι  $DE \parallel AB$ . Τότε το τετράπλευρο ΑΔΕΒ θα έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και θα είναι παραλληλόγραμμο, οπότε  $AD = BE$ . Όμως  $AB = AD$  και  $BE = BG$  άρα  $AB = BG$  που είναι άτοπο αφού  $AB = 2BG$ . Άρα οι ΔΕ, ΑΒ τέμνονται και συνεπώς το ΑΔΕΒ είναι τραπέζιο.

**β)** Είναι  $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{B}_3 = 180^\circ$  ή  $60^\circ + \hat{B}_2 + 60^\circ = 180^\circ$  ή  $\hat{B}_2 = 60^\circ$  και  $\hat{B}_1 = 60^\circ$  ως γωνία του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΔ. Τα τρίγωνα ΔΜΒ και ΔΕΒ έχουν:

- ΔΒ κοινή πλευρά
- $BM = EB$ , αφού Μ είναι μέσο του ΑΒ και  $BM = \frac{AB}{2} = \frac{2BG}{2} = BG = EB$ .
- $\hat{B}_2 = 60^\circ = \hat{B}_1$

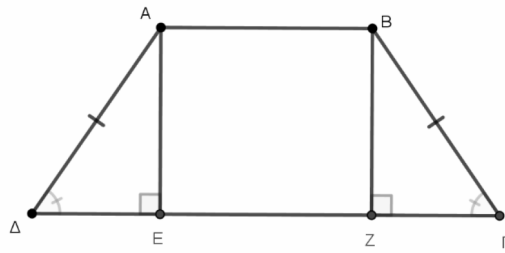
Άρα το τρίγωνα ΔΜΒ και ΔΕΒ είναι ίσα γιατί έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.

**γ)** Το τμήμα ΔΜ είναι διάμεσος στην πλευρά ΑΒ του τριγώνου ΑΒΔ, αφού Μ μέσο από τα δεδομένα, άρα θα είναι και ύψος του τριγώνου, οπότε  $\hat{M}_1 = 90^\circ$ . Επειδή τα τρίγωνα ΔΜΒ και ΔΕΒ θα είναι και  $\hat{E}_1 = \hat{M}_1 = 90^\circ$  ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από την κοινή τους πλευρά ΔΒ. Οπότε  $\hat{E}_1 + \hat{M}_1 = 180^\circ$ .



**486 Θέμα 4 – 34491**

α)

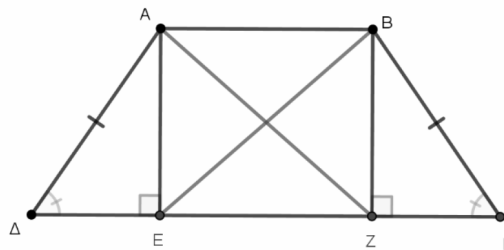


Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ έχουν:

- $\widehat{A\hat{E}D} = \widehat{B\hat{Z}G} = 90^\circ$ , αφού τα ΑΕ και ΒΖ είναι κάθετα τμήματα στη ΔΓ.
- $AD = BG$ , ως οι ίσες μη παράλληλες πλευρές του ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ.
- $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta}$ , ως γωνίες στη βάση ΔΓ του ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ.

Άρα, τα τρίγωνα είναι ίσα ως ορθογώνια που έχουν τις υποτείνουσές τους και μια οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία. Επομένως, θα έχουν και τις τρίτες γωνίες τους  $\widehat{\Delta\hat{A}E}$  και  $\widehat{Z\hat{B}G}$  ίσες, οπότε και οι απέναντί τους κάθετες πλευρές θα είναι ίσες, δηλαδή  $DE = GZ$ .

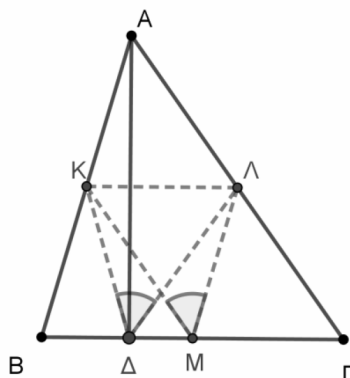
β) Φέρνουμε τα τμήματα ΑΖ και ΒΕ.



Αφού το ΑΕ είναι κάθετο τμήμα στη ΔΓ, τότε θα είναι κάθετο και στην παράλληλη της ΔΓ, την ΑΒ, οπότε θα είναι  $\widehat{E\hat{A}B} = 90^\circ$ . Άρα, το τετράπλευρο ΑΕΖΒ είναι ορθογώνιο γιατί έχει τρεις γωνίες ορθές ( $\widehat{E\hat{A}B} = \widehat{A\hat{E}Z} = \widehat{E\hat{Z}B} = 90^\circ$ ). Επειδή τα ΑΖ και ΒΕ είναι διαγώνιοι του ορθογωνίου ΑΕΖΒ θα ισχύει ότι  $AZ = BE$ .

**487 Θέμα 4 – 34331**

Σχεδιάζουμε το τρίγωνο ΑΒΓ με  $AB < AG$ . Θεωρούμε τα μέσα Κ,Λ,Μ των ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα και φέρουμε το ύψος ΑΔ.



**α)** Στο τρίγωνο ABΓ, το Κ είναι μέσο του AB και το Λ είναι μέσο του ΑΓ. Άρα, ΚΛ//ΒΓ (1), επειδή το ΚΛ ενώνει τα μέσα των πλευρών AB και ΑΓ του τριγώνου ABΓ.

**β)**

i. Στο τρίγωνο ABΓ το Λ είναι μέσο του ΑΓ και το Μ είναι μέσο του ΒΓ. Άρα,  $ΛΜ = \frac{AB}{2}$  (2),

επειδή το ΛΜ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΒΓ του τριγώνου ABΓ. Στο ορθογώνιο

τρίγωνο ΑΔΒ, είναι  $ΔΚ = \frac{AB}{2}$  (3), επειδή η ΚΔ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην

υποτεινυσά του AB. Από (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι  $ΛΜ = ΚΔ$ . (4)

ii. Τα σημεία Δ και Μ δεν ταυτίζονται γιατί αν το μέσο Μ της ΒΓ ταυτιζόταν με το ίχνος Δ του ύψους ΑΔ, τότε το ύψος ΑΔ θα ήταν και διάμεσος, δηλαδή το τρίγωνο ABΓ θα ήταν ισοσκελές με  $AB = ΑΓ$ , πράγμα άτοπο γιατί από την υπόθεση είναι  $AB < ΑΓ$ . Επομένως το ΚΛΜΔ είναι τετράπλευρο.

Επειδή τα Λ, Μ ενώνουν μέσα των πλευρών ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα, θα είναι  $ΛΜ // AB$  και η ΔΚ δεν είναι παράλληλη στην AB (αφού την τέμνει στο Κ). Συνεπώς οι απέναντι πλευρές ΛΜ και ΚΔ του ΚΛΜΔ δεν είναι παράλληλες.

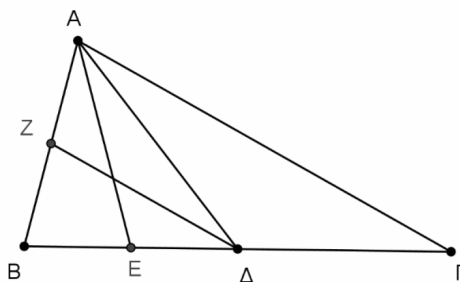
Από το α) ερώτημα έχουμε ότι  $ΚΛ // ΒΓ$ , οπότε  $ΚΛ // ΔΜ$ .

Επομένως το ΚΛΜΔ είναι τραπέζιο, γιατί έχει μόνο δυο απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες. Και επειδή από τη σχέση (4) είναι  $ΛΜ = ΚΔ$ , άρα το ΚΛΜΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**γ)** Τα τρίγωνα ΚΔΛ και ΛΜΔ έχουν, τις πλευρές ΚΔ και ΛΜ ίσες (από 4), τις πλευρές ΚΜ και ΔΛ ίσες ως διαγώνιοι του ισοσκελούς τραπέζιου ΚΛΜΔ και την πλευρά ΚΛ κοινή. Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν τις τρεις πλευρές τους ίσες. Άρα και  $\widehat{ΚΔΛ} = \widehat{ΚΜΔ}$  ως οι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από την κοινή τους πλευρά ΚΛ.

#### 488 Θέμα 4 – 34333

Θεωρούμε τρίγωνο ABΓ με  $ΒΓ = 2AB$ . Έστω Δ το μέσο της πλευράς ΒΓ και Ε το μέσο του τμήματος ΒΔ. Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ΑΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Ζ.



**α)** Στο τρίγωνο ABΓ, το τμήμα ΔΖ είναι παράλληλο προς την πλευρά ΑΓ και το Δ είναι μέσο της πλευράς ΒΓ. Επομένως, το Ζ θα είναι μέσο της πλευράς ΑΒ.

Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΒΖ έχουν:

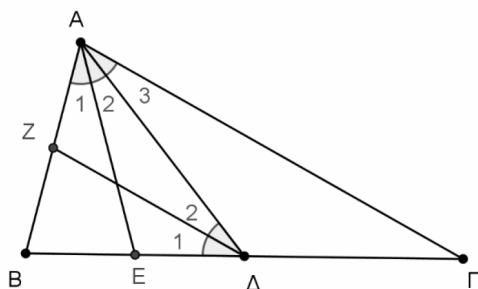
$AB = BD$ , ως μισά του  $B\Gamma$ , αφού  $B\Gamma = 2AB$  (υπόθεση) και  $B\Gamma = 2BD$  (το  $\Delta$  είναι μέσο του  $B\Gamma$ ).

$BE = BZ$ , ως μισά των ίσων τμημάτων  $BD$  και  $AB$  αντίστοιχα.

$\hat{B}$  κοινή γωνία.

Επομένως, τα τρίγωνα  $ABE$  και  $\Delta BZ$  είναι ίσα αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μια και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες ( $\Pi-\Gamma-\Pi$ ).

**β)**



Από την ισότητα των τριγώνων  $ABE$  και  $BZD$  προκύπτει ότι  $\hat{A}_1 = \hat{D}_1$  (1), ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές  $BE$  και  $BZ$  αντίστοιχα.

Το τρίγωνο  $BA\Delta$  είναι ισοσκελές με  $AB = BD$ , οπότε  $\hat{B\Delta A} = \hat{A\Delta B}$  (2), ως προσκείμενες στη βάση  $A\Delta$ .

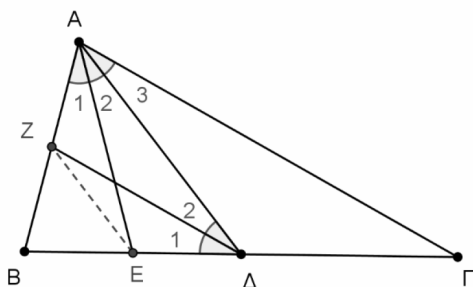
Αφαιρώντας τις ισότητες (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$\hat{B\Delta A} - \hat{A}_1 = \hat{A\Delta B} - \hat{D}_1 \text{ ή } \hat{A}_2 = \hat{D}_2 \text{ (3).}$$

Επίσης,  $\hat{D}_2 = \hat{A}_3$  (4), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων  $DZ$  και  $AG$  τεμνόμενων από την  $A\Delta$ .

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε  $\hat{A}_2 = \hat{A}_3$ , άρα η  $A\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $E\hat{A}G$ .

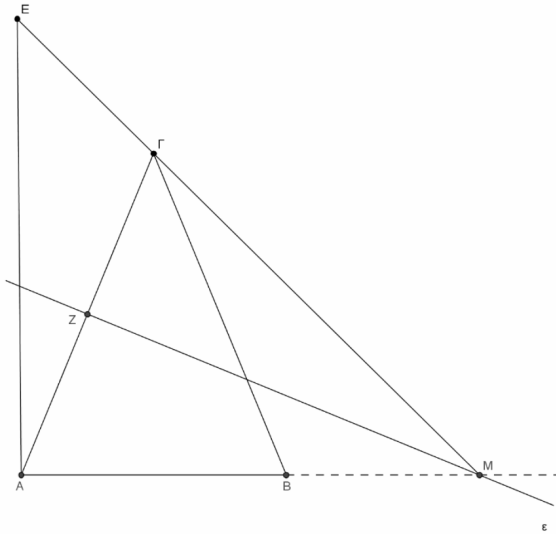
**γ)**



Φέρνουμε το τμήμα  $ZE$ , το οποίο ενώνει τα μέσα  $E$  και  $Z$  των πλευρών  $BD$  και  $BA$  αντίστοιχα του τριγώνου  $BAE$ , οπότε θα είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά του  $A\Delta$ . Στο τετράπλευρο  $A\Delta EZ$  οι πλευρές του  $AZ, \Delta E$  δεν είναι παράλληλες καθώς οι προεκτάσεις τους προς τα σημεία  $Z, E$  αντίστοιχα τέμνονται στο σημείο  $B$ . Άρα το τετράπλευρο  $A\Delta EZ$  είναι τραπέζιο με βάσεις τις πλευρές  $A\Delta, ZE$ .

Είναι  $\hat{B\Delta A} = \hat{A\Delta B}$  από σχέση (2), άρα το τραπέζιο  $A\Delta EZ$  είναι ισοσκελές γιατί έχει τις γωνίες τις προσκείμενες στη βάση του  $A\Delta$  ίσες.

**489 Θέμα 4 – 37823**



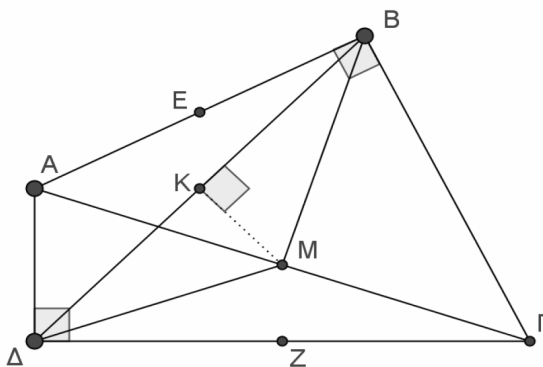
α) Από την εκφώνηση της άσκησης έχουμε ότι ZM είναι η μεσοκάθετη της AG και κατά συνέπεια  $MΓ = MA$ , οπότε το τρίγωνο AMΓ θα είναι ισοσκελές.

β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα AGE και BMΓ για τα οποία έχουμε:

- 1)  $AG = BG$  (επειδή το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με  $\hat{\Gamma}AB = \hat{\Gamma}BA$ )
- 2)  $GE = BM$  (από κατασκευή)
- 3)  $\hat{E}GA = 180^\circ - \hat{A}GM = 180^\circ - \hat{\Gamma}AB = 180^\circ - \hat{\Gamma}BA = \hat{\Gamma}BM$  (αφού τα τρίγωνα MAΓ και ΓAB είναι ισοσκελή οπότε  $\hat{A}GM = \hat{\Gamma}AM$  ή διαφορετικά  $\hat{A}GM = \hat{\Gamma}AB$ )

γ) Επειδή τα τρίγωνα AGE και BMΓ είναι ίσα ισχύει ότι  $\hat{A}EΓ = \hat{B}MΓ$ , άρα το τρίγωνο AME θα είναι ισοσκελές.

**490 Θέμα 4 – 14566**



α) Το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο στο B και BM διάμεσος, άρα  $BM = \frac{AG}{2}$

Το τρίγωνο AΔΓ είναι ορθογώνιο στο Δ και ΔM διάμεσος, άρα  $DM = \frac{AG}{2}$

Άρα το τρίγωνο MBΔ είναι ισοσκελές με  $MB = MD$  και επειδή MK ύψος, το MK θα είναι και διάμεσος, δηλαδή K μέσο του BD.

β)

i) Στο τρίγωνο  $AB\Delta$  τα  $E$  και  $K$  είναι τα μέσα των  $BA$  και  $B\Delta$  αντιστοίχως,

$$\text{άρα } EK // = \frac{A\Delta}{2}$$

ii) Στο τρίγωνο  $A\Gamma\Delta$  τα  $M$  και  $Z$  είναι τα μέσα των  $A\Gamma$  και  $\Gamma\Delta$  αντιστοίχως,

$$\text{άρα } MZ // = \frac{A\Delta}{2} = EK \text{ από το } \Delta 2.$$

γ) Από το ερώτημα β) είναι  $EK = MZ$  και  $EK // MZ$ , γιατί είναι παράλληλες προς την  $A\Delta$ . Άρα το τετράπλευρο  $KEMZ$  είναι παραλληλόγραμμο, γιατί έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες.