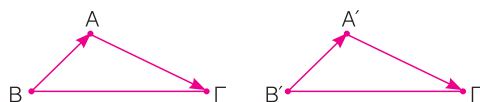


**ΝΕΑ ΘΕΜΑΤΑ (μέχρι τις 4/5/2023)**

**172 Θέμα 2 - 22055**

Δίνονται δύο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  για τα οποία

ισχύει  $\vec{BA} = \vec{B'A'}$  και  $\vec{A\Gamma} = \vec{A'\Gamma'}$ .



**α.** Να εξηγήσετε γιατί:

- i.** το μήκος της πλευράς  $BA$  είναι ίσο με το μήκος της πλευράς  $B'A'$  και
- ii.** το μήκος της πλευράς  $A\Gamma$  είναι ίσο με το μήκος της πλευράς  $A'\Gamma'$ .

**β. i.** Να αποδείξετε ότι:  $\vec{B\Gamma} = \vec{B'\Gamma'}$ .

**ii.** Να εξηγήσετε γιατί το μήκος της πλευράς  $B\Gamma$  είναι ίσο με το μήκος της πλευράς  $B'\Gamma'$ .

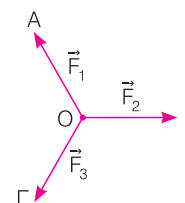
**γ.** Θα μπορούσε η ακόλουθη πρόταση να ήταν κριτήριο ισότητας τριγώνων;

«Αν για δύο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  ισχύει  $\vec{BA} = \vec{B'A'}$  και  $\vec{A\Gamma} = \vec{A'\Gamma'}$ , τότε τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  είναι ίσα».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**173 Θέμα 4 - 22068**

Σε ένα υλικό σημείο  $O$  εφαρμόζονται τρεις δυνάμεις  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  οι οποίες σχηματίζουν ανά δύο γωνία  $120^\circ$ , έτσι ώστε το υλικό σημείο  $O$  να ισορροπεί.



**α.** Ποια σχέση ανάμεσα στα διανύσματα  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  εκφράζει την συνθήκη ισορροπίας;

**β.** Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$  και  $\vec{F}_3$  είναι αντίθετα.

**γ.** Αν  $A, B, \Gamma, \Delta$  είναι τα πέρατα των διανυσμάτων  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  και  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ , αντίστοιχα (θεωρουμένων ως διανυσμάτων με αρχή το σημείο  $O$ ), τότε να αποδείξετε ότι:

- i.**  $\hat{A}\hat{O}\hat{\Delta} = \hat{B}\hat{O}\hat{\Delta} = 60^\circ$ .
- ii.**  $\hat{O}\hat{\Delta}\hat{B} = 60^\circ$ .

**δ.** Να αποδείξετε ότι:  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3|$ .

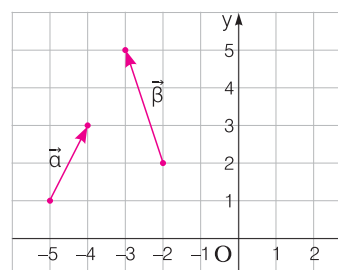
**174 Θέμα 2 - 20914**

Στο διπλανό σχήμα, δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ .

**α.** Να σημειώσετε πάνω στο σχήμα τα διανύσματα  $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ ,  $\vec{OB} = \vec{\beta}$  όπου  $O$  η αρχή των αξόνων.

**β.** Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ ,  $\vec{OB} = \vec{\beta}$  και  $\vec{AB}$ .

**γ.** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $OAB$  είναι ορθογώνιο.





**β.** Να βρείτε τις συντεταγμένες ενός τέταρτου σημείου  $\Delta$  έτσι ώστε το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  να είναι παραλληλόγραμμο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

### 180 Θέμα 2 - 22038

Δίνεται το διάνυσμα  $\vec{\alpha} = (5, -12)$ .

**α.** Να βρείτε ένα διάνυσμα  $\vec{\beta}$  που να είναι ομόρροπο στο  $\vec{\alpha}$  και να έχει μέτρο 1.

**β.** Να βρείτε ένα διάνυσμα  $\vec{\gamma}$  που να είναι αντίρροπο στο  $\vec{\alpha}$  και να έχει μέτρο 7.

### 181 Θέμα 2 - 21681

Θεωρούμε τα σημεία  $A(1, 2)$ ,  $B(-3, 4)$ ,  $\Gamma(2, 5)$ .

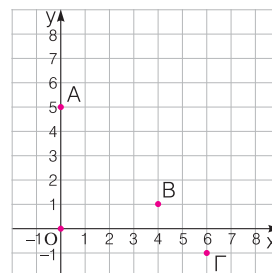
**α.** Να βρείτε σημείο  $\Delta$  ώστε  $\vec{\Delta\Gamma} = \vec{AB}$ .

**β.** Να αιτιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο.

**γ.** Να βρείτε το κέντρο  $O$  του παραλληλογράμμου.

### 182 Θέμα 2 - 15043

Ένα γραφείο μελετών έχει αναλάβει την αναμόρφωση μιας οικιστικής περιοχής, η οποία αποτυπώνεται σε τοπογραφικό σχέδιο με ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Τα σημεία  $A(0, 5)$ ,  $B(4, 1)$  και  $\Gamma(6, -1)$  παριστάνουν τη θέση τριών οικισμών στο χάρτη.



**α. i.** Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\vec{AB}$  και  $\vec{B\Gamma}$ .

**ii.** Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  είναι συνευθειακά και ως εκ τούτου υπάρχει η δυνατότητα να σχεδιασθεί ένας ευθύγραμμος δρόμος που να συνδέει τους τρεις οικισμούς.

**β.** Να αποδείξετε ότι η απόσταση του οικισμού  $B$  από τον οικισμό  $A$  είναι διπλάσια από την απόσταση του οικισμού  $B$  από τον οικισμό  $\Gamma$ .

### 183 Θέμα 2 - 15854

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (2, 1)$  και  $\vec{\beta} = (-8, -4)$ .

**α.** Να δείξετε ότι  $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$ .

**β.** Να δείξετε ότι για τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  ισχύει  $\vec{\beta} = -4\vec{\alpha}$ .

**γ.** Να αποδείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\beta}$  είναι τετραπλάσιο του μέτρου του διανύσματος  $\vec{\alpha}$ .

### 184 Θέμα 2 - 15002

Δίνονται τα σημεία  $A(0, 5)$  και  $\Delta(4, 5)$  και τα διανύσματα  $\vec{AB} = (3, -3)$  και  $\vec{A\Gamma} = (3, 1)$ .

**α.** Να αποδείξετε ότι το σημείο  $\Gamma$  έχει συντεταγμένες  $\Gamma(3, 6)$ .

**β. i.** Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{\Gamma\Delta}$ .

**ii.** Να αποδείξετε ότι  $\vec{AB} \parallel \vec{\Gamma\Delta}$ .

**185 Θέμα 4 - 20938**

Θεωρούμε τρίγωνο  $OAB$ , με  $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ ,  $\vec{OB} = (6, 8)$ . Για το διάνυσμα  $\vec{\alpha}$  γνωρίζουμε ότι  $\vec{\alpha} = (|\vec{\alpha}| - 4, |\vec{\alpha}| - 2)$ .

- Να δείξετε ότι  $|\vec{\alpha}| = 2$ .
- Να βρείτε σημείο  $\Gamma$  έτσι, ώστε το τετράπλευρο  $OAGB$  να αποτελεί παραλληλόγραμμο.
- Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η πλευρά  $OA$  με τη διαγώνιο  $AB$  του παραλληλογράμμου  $OAGB$ .

**186 Θέμα 2 - 20733**

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$ , με  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$  και  $\vec{AB} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$  και  $\vec{AG} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ .

- Να εκφράσετε το διάνυσμα  $\vec{BG}$  συναρτήσει του διανύσματος  $\vec{\beta}$ .
- Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$ .
- Να αιτιολογήσετε γιατί τα διανύσματα  $\vec{AB}$  και  $\vec{AG}$  είναι κάθετα.

**187 Θέμα 2 - 20732**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (2, 1)$  και  $\vec{\beta} = (-8, -4)$ .

- Να δείξετε ότι τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  είναι αντίρροπα και ότι  $|\vec{\beta}| = 4|\vec{\alpha}|$ .
- Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
- Να δείξετε ότι  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} < 0$ .

**188 Θέμα 2 - 20773**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (1, -2)$  και  $\vec{\beta} = (2, -3)$ .

- Να βρείτε το διάνυσμα  $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ .
- Αν  $\vec{u} = (4, 1)$  να βρείτε την τιμή του  $\kappa \in \mathbb{R}$  ώστε το διάνυσμα  $\vec{u}$  να είναι κάθετο στο διάνυσμα  $\vec{v} = (1, \kappa)$ .
- Για  $\kappa = 4$  να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{v}$  του προηγούμενου ερωτήματος.

**189 Θέμα 2 - 20040**

Δίνετε το διάνυσμα  $\vec{\alpha} = (-4, 3)$ .

- Να βρείτε ένα διάνυσμα  $\vec{\beta}$  που να είναι κάθετο στο  $\vec{\alpha}$ .
- Να βρείτε ένα διάνυσμα  $\vec{\gamma}$  που να είναι κάθετο στο  $\vec{\alpha}$  και να έχει μέτρο 1.

**190 Θέμα 2 - 21682**

Έστω  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  δύο διανύσματα για τα οποία ισχύει  $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (11, 2)$  και  $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = (-5, -10)$ .

**α.** Να αποδείξετε ότι  $\vec{\alpha} = (3, -4)$  και να βρείτε το διάνυσμα  $\vec{\beta}$ .

**β.** Να αποδείξετε ότι  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$  και  $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|$ .

**191 Θέμα 2 - 15252**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{AB} = (2, 1)$  και  $\vec{AG} = (3, -1)$ .

**α.** Να δείξετε ότι  $\vec{BG} = (1, -2)$ .

**β.** Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $ABG$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με υποτεινούσα την  $AG$ .

**γ.** Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $ABG$ .

**192 Θέμα 2 - 15852**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (3, 2)$ ,  $\vec{\beta} = (-2, 1)$ .

Να υπολογίσετε:

**α.** Το διάνυσμα  $\vec{\nu} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ .

**β.** Το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$  και το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\alpha}$ .

**γ.** Το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\nu}$ .

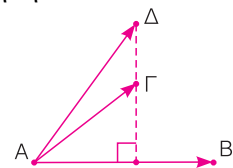
**193 Θέμα 4 - 22064**

**α.** Αν  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AG}$ ,  $\vec{AD}$  είναι τρία διανύσματα, τότε οι ποσότητες  $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$  και  $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ :

- i.** είναι αριθμοί ή διανύσματα;
- ii.** μπορούν να συγκριθούν;

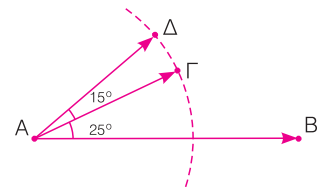
**β.** Για τα διανύσματα του παρακάτω σχήματος να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

- i.**  $\vec{AB} \cdot \vec{AG} > \vec{AB} \cdot \vec{AD}$
- ii.**  $\vec{AB} \cdot \vec{AG} < \vec{AB} \cdot \vec{AD}$
- iii.**  $\vec{AB} \cdot \vec{AG} = \vec{AB} \cdot \vec{AD}$ .



**γ.** Για τα διανύσματα του παρακάτω σχήματος (η διακεκομμένη γραμμή είναι τμήμα κύκλου με κέντρο  $A$ ) να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

- i.**  $\vec{AB} \cdot \vec{AG} > \vec{AB} \cdot \vec{AD}$
- ii.**  $\vec{AB} \cdot \vec{AG} < \vec{AB} \cdot \vec{AD}$
- iii.**  $\vec{AB} \cdot \vec{AG} = \vec{AB} \cdot \vec{AD}$ .



Σε όλα τα ερωτήματα, να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

## 194 Θέμα 4 - 22063

α. Έστω  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  δύο μη μηδενικά διανύσματα. Να αποδείξετε ότι:

i.  $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ .

ii.  $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = \left| |\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| \right| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$ .

β. Θεωρούμαι τρία διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$ ,  $\vec{\gamma}$  για τα οποία ισχύουν ότι:

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}, \quad |\vec{\alpha}| = 1, \quad |\vec{\beta}| = 2, \quad |\vec{\gamma}| = 1.$$

Να αποδείξετε ότι:

i.  $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\gamma}$ .

ii.  $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$ .

iii.  $\vec{\alpha} = \vec{\gamma}$  και  $\vec{\beta} = -2\vec{\alpha}$ .

## 195 Θέμα 4 - 18520

α. Να αποδειχθεί ότι για όλα τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  ισχύει:

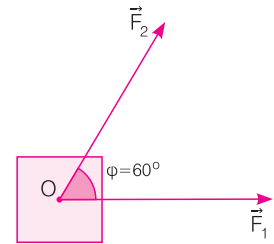
$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2 \quad (1).$$

β. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ με  $\vec{OA} = \vec{\alpha}$  και  $\vec{OB} = \vec{\beta}$ .

i. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα  $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  και  $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ .

ii. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας (1).

γ. Ένα σώμα σύρετε πάνω σε λείο επίπεδο από δύο ανθρώπους, οι οποίοι εξασκούν πάνω σε αυτό δυνάμεις  $\vec{F}_1$  και  $\vec{F}_2$  αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Οι δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα 10 N (Newton) και η γωνία που σχηματίζουν είναι  $60^\circ$ . Να σχεδιάσετε την συνισταμένη δύναμη  $\vec{F}$  και να βρείτε το μέτρο της.



## 196 Θέμα 4 - 15320

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ με  $\vec{OA} = \vec{\alpha}$  και  $\vec{OB} = \vec{\beta}$ , όπου  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  είναι μη μηδενικά διανύσματα.

α. Να δείξετε ότι:

i.  $|\vec{OG}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2$ .

ii.  $|\vec{AB}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2$ .

β. Αν  $|\vec{OG}| = |\vec{AB}|$ , να δείξετε ότι το ΟΑΓΒ είναι ορθογώνιο.

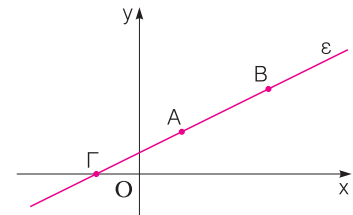
## 197 Θέμα 2 - 20868

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τα σημεία  $A(1, 1)$ ,  $B(3, 2)$  και  $\Gamma$  μιας ευθείας  $\varepsilon$ .

α. Να βρείτε την κλίση  $\lambda$  της ευθείας  $\varepsilon$ .

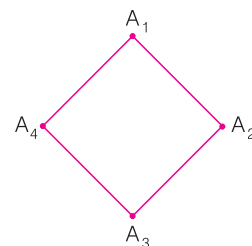
β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$  είναι η  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ .

γ. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $\Gamma$ , στο οποίο η ευθεία  $\varepsilon$  τέμνει τον άξονα  $x'x$ .



**198 Θέμα 2 - 22049**

Δίνεται το τετράγωνο του σχήματος με κορυφές  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . Έστω  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  οι κλίσεις των ευθειών  $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$  αντίστοιχα.

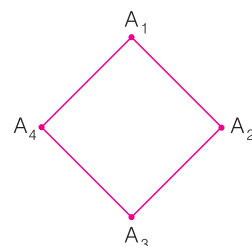


**α.** Να βρείτε όλα τα ζεύγη των πλευρών του τετραγώνου που είναι κάθετες μεταξύ τους. Ποια σχέση συνδέει τις κλίσεις κάθε δύο κάθετων πλευρών;

**β.** Να αποδείξετε ότι:  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_3 \cdot \lambda_4 + \lambda_4 \cdot \lambda_1 = -4$ .

**199 Θέμα 2 - 22047**

Δίνεται το τετράγωνο του σχήματος με κορυφές  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . Έστω  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  οι κλίσεις των ευθειών  $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$  αντίστοιχα.



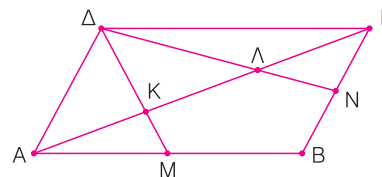
**α.** Να βρείτε όλα τα ζεύγη των παράλληλων πλευρών του τετραγώνου. Ποια σχέση συνδέει τις κλίσεις κάθε δύο παράλληλων πλευρών;

**β.** Να αποδείξετε ότι:  $\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_2}{\lambda_4} = 2$ .

**200 Θέμα 4 - 22065**

Δίνονται τα σημεία  $A(0, 0), B(8, 0), \Gamma(10, 4), \Delta(2, 4)$ .

Τα σημεία  $M$  και  $N$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα, ενώ  $K$  και  $\Lambda$  είναι τα σημεία που τέμνουν τα τμήματα  $\Delta M$  και  $\Delta N$  την διαγώνιο  $A\Gamma$  αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.



**α.** Να δείξετε ότι το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο.

**β.** Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων  $M$  και  $N$ .

**γ.** Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών  $A\Gamma, \Delta M, \Delta N$  και στη συνέχεια τις συντεταγμένες των σημείων  $K$  και  $\Lambda$ .

**δ.** Να δείξετε ότι τα σημεία  $K$  και  $\Lambda$  τριχοτομούν την διαγώνιο  $A\Gamma$ , δηλαδή την χωρίζουν σε τρία ίσα τμήματα.

**201 Θέμα 4 - 14970**

Δίνεται η ευθεία  $y = \lambda(x - 2) + \lambda - 2, \lambda \in \mathbb{R}$  (1).

**α.** Να βρείτε τις ευθείες που προκύπτουν όταν  $\lambda = 1$  και όταν  $\lambda = -2$ . Κατόπιν να βρείτε το κοινό σημείο  $M$  των δύο ευθειών.

Έστω  $M(1, -2)$ .

**β.** Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που προκύπτουν από την (1) για τις διάφορες τιμές του  $\lambda$ , διέρχονται από το σημείο  $M$ .

**γ.** Να βρείτε:

**i.** Τα σημεία τομής  $A, B$  της ευθείας (1) με τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ .

**ii.** Για ποιες τιμές του  $\lambda$  το εμβαδόν του τριγώνου  $OAB$  είναι ίσο με  $\frac{1}{2}$ .

**202 Θέμα 2 - 22059**

Δίνεται σημείο  $A(1, -3)$  και η ευθεία  $\varepsilon: 4x + 6y = 1$ .

- Να εξηγήσετε γιατί το  $A$  δεν είναι σημείο της ευθείας  $\varepsilon$ .
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο  $A$  και είναι παράλληλη στην ευθεία  $\varepsilon$ .

**203 Θέμα 4 - 21652**

Δίνονται οι εξισώσεις  $\lambda x + y = 2\lambda$  (1) και  $x + \lambda y = \lambda + 1$  (2), όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- Να δείξετε ότι για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν ευθείες  $\varepsilon_\lambda$  και  $\eta_\lambda$  αντίστοιχα.
- Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda$  οι ευθείες  $\varepsilon_\lambda$  και  $\eta_\lambda$  τέμνονται.
- Για  $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ .
  - Να βρείτε συναρτήσσει του  $\lambda$  τις συντεταγμένες του σημείου τομής  $M$  των  $\varepsilon_\lambda$  και  $\eta_\lambda$ .
  - Αν  $M\left(\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}, \frac{\lambda}{\lambda+1}\right)$  να αποδείξετε ότι το  $M$  κινείται στην ευθεία  $\zeta: x - y = 1$ .

**204 Θέμα 4 - 15004**

- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon_1$  που διέρχεται από τα σημεία  $A(4, 2)$  και  $B(8, 5)$ .
- Αν  $\varepsilon_1: 3x - 4y - 4 = 0$ , να δείξετε ότι σχηματίζει με την ευθεία  $\varepsilon_2: 7x - y - 1 = 0$  γωνία  $\hat{\varphi} = 45^\circ$ .
- Να βρείτε το σημείο τομής των  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ .
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon_3$  τέτοιας ώστε η  $\varepsilon_2$  να διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_3$ .

**205 Θέμα 2 - 21260**

Δίνεται η ευθεία  $(\varepsilon): y - 2x = 0$  και τα σημεία  $B(1, 1)$  και  $\Gamma(-1, 3)$ .

- Να δείξετε ότι το σημείο  $A(5, 10)$  ανήκει στην ευθεία  $\varepsilon$ .
- Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\vec{AB}$  και  $\vec{AG}$ .
- Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $\triangle AB\Gamma$ .

**206 Θέμα 2 - 20926**

Δίνεται η ευθεία  $\varepsilon: x - 2y = 1$  και τα σημεία  $A(0, 2)$ ,  $B(1, 0)$ .

- Να αποδείξετε ότι το σημείο  $B$  ανήκει στην ευθεία  $\varepsilon$  ενώ το σημείο  $A$  δεν είναι σημείο της  $\varepsilon$ .
- Να βρείτε την απόσταση του σημείου  $A$  από την ευθεία  $\varepsilon$ .
- Να υπολογίσετε την απόσταση του  $A$  από το  $B$  και να αποδείξετε ότι η προβολή του  $A$  στην ευθεία  $\varepsilon$  είναι το  $B$ .

**207 Θέμα 2 - 20864**

Δίνονται οι ευθείες:  $\varepsilon_1: 2x + y - 6 = 0$  και  $\varepsilon_2: 2x + y + 2 = 0$ .

- Να δείξετε ότι οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  είναι παράλληλες.



- β. i.** Να δείξετε ότι το σημείο  $A(0, 6)$  ανήκει στην ευθεία  $\varepsilon_1$  .  
**ii.** Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  .

### 208 Θέμα 2 - 18733

Δίνονται τα σημεία  $A(4, 3)$  ,  $B(1, 1)$  και  $\Gamma(6, 0)$  .

- α.** Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\vec{AB}$  και  $\vec{AG}$  .  
**β.** Να δείξετε ότι τα διανύσματα  $\vec{AB}$  και  $\vec{AG}$  είναι κάθετα.  
**γ.** Δίνεται το σημείο  $M\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$  . Να δείξετε ότι  $(MA) = (MB)$  .

### 209 Θέμα 4 - 20939

Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$  είναι τοποθετημένα 7 χωριά ως σημεία του επιπέδου και μία πηγή νερού σε ένα σημείο  $\Pi$  . Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν 6 αγωγοί νερού που συνδέουν την πηγή με έξι από τα παραπάνω χωριά. Οι αγωγοί αυτοί ανήκουν στις γραμμές με εξισώσεις της μορφής:

$$(\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y + 2 = 0, \text{ με } \lambda \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} .$$

- α.** Να αποδείξετε ότι και οι 6 γραμμές είναι ευθείες.  
**β.** Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $\Pi$  .  
**γ.** Το έβδομο χωριό βρίσκεται στο σημείο  $O(0, 0)$  . Να αποδείξετε ότι κανένας από τους παραπάνω αγωγούς νερού δεν διέρχεται από το χωριό αυτό.  
**δ.** Προκειμένου να έχει πρόσβαση στο νερό το χωριό  $O$  , υπάρχουν δύο επιλογές:  
 1<sup>η</sup> επιλογή: Να συνδέσουμε απευθείας το χωριό  $O$  με την πηγή.  
 2<sup>η</sup> επιλογή: Να συνδέσουμε το χωριό  $O$  με έναν από τους παραπάνω αγωγούς μέσω της συντομότερης διαδρομής.  
 Με δεδομένο ότι το κόστος κατασκευής ανά μονάδα μήκους για κάθε μία από τις παραπάνω επιλογές είναι το ίδιο.  
**i.** Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  για την οποία οι δύο επιλογές οδηγούν στο ίδιο κόστος κατασκευής.  
**ii.** Πως εξηγείται γεωμετρικά το συμπέρασμα;

### 210 Θέμα 4 - 20861

Δίνεται το σημείο  $M(-2, 2)$  .

- α.** Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών  $\varepsilon$  που διέρχονται από το σημείο  $M$  .  
**β. i.** Να βρείτε ποιες από τις παραπάνω εξισώσεις ευθειών σχηματίζουν τρίγωνο με τον αρνητικό ημιάξονα  $Ox'$  και τον θετικό ημιάξονα  $Oy$  .  
**ii.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon_1$  , η οποία διέρχεται από το σημείο  $M$  και σχηματίζει με τον αρνητικό ημιάξονα  $Ox'$  και τον θετικό ημιάξονα  $Oy$  τρίγωνο, με εμβαδόν  $E = 8$  .  
**γ.** Αν  $\varepsilon_1 : y = x + 4$  , να βρείτε το μήκος του ύψους του ορθογωνίου τριγώνου, που σχηματίζει η  $\varepsilon_1$  με τους άξονες, το οποίο φέρεται από την κορυφή  $O$  .

**211 Θέμα 4 – 20728**

Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1 : y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$  και  $\varepsilon_2 : y = x$ .

- Να σχεδιάσετε τις  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.
- Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει κάθε μία με τον άξονα  $x'x$ .
- Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $OAB$ , όπου  $O(0, 0)$ ,  $A(3, \sqrt{3})$ ,  $B(3, 3)$ .
- Να αποδείξετε ότι  $\eta\mu 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ .

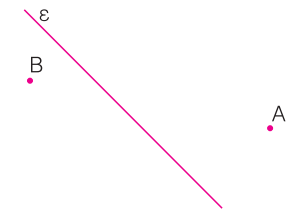
(Θυμίζουμε ότι το εμβαδόν ενός τριγώνου δίνεται από το ημιγινόμενο δύο πλευρών του επί το ημίτονο της περιεχόμενης γωνίας τους).

**212 Θέμα 4 – 20724**

Η ευθεία  $\varepsilon$  με εξίσωση  $x + y - 1 = 0$  του διπλανού σχήματος, αναπαριστά τη γραμμή ενός σιδηροδρομικού δικτύου που εξυπηρετεί τους κατοίκους δύο πόλεων  $A(8, 1)$ ,  $B(-7, 4)$  (για την ακρίβεια  $A$ ,  $B$  είναι τα κεντρικά σημεία των πόλεων από τα οποία μετράμε αποστάσεις). Για το λόγο αυτό θα κατασκευαστεί κατά μήκος της γραμμής  $\varepsilon$ , ένας σταθμός σε ένα σημείο  $\Sigma$  και μία πεζογέφυρα σε ένα σημείο  $\Pi$ .

Να βρείτε:

- Ποια πόλη από τις  $A$ ,  $B$  είναι πλησιέστερα στη γραμμή του τραίνου.
- Τις συντεταγμένες του  $\Pi$ , αν είναι γνωστό ότι θα κατασκευαστεί στο πλησιέστερο σημείο της γραμμής στην πόλη  $B$ .
- Τις συντεταγμένες του  $\Sigma$  στις παρακάτω περιπτώσεις:
  - Ο σταθμός  $\Sigma$  να ισαπέχει από τις πόλεις  $A$ ,  $B$ .
  - Το οδικό δίκτυο που θα συνδέει το σταθμό  $\Sigma$  με τις πόλεις  $A$ ,  $B$  να έχει το μικρότερο δυνατό μήκος.

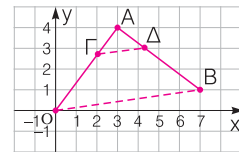
**213 Θέμα 4 – 20655**

Δίνονται τα σημεία  $A(2, 1)$ ,  $B(3, -1)$  και  $\Gamma(-2, 0)$ .

- Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  δεν είναι συνευθειακά.
  - Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  ισούται με  $\frac{9}{2}$  τετραγωνικές μονάδες.
- Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $\Delta(x, y)$  για τα οποία ισχύει  $(\Delta A\Gamma) = (AB\Gamma)$ .
- Αν ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $\Delta$  του ερωτήματος **β.** αποτελείται από τις ευθείες  $\varepsilon_1 : x - 4y - 7 = 0$  και  $\varepsilon_2 : x - 4y + 11 = 0$ , τότε:
  - Να αποδείξετε ότι οι ευθείες  $A\Gamma$ ,  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  είναι παράλληλες.
  - Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός «οι ευθείες  $x - 4y - 7 = 0$  και  $x - 4y + 11 = 0$  έχουν ως μεσοπαράλληλο την ευθεία  $A\Gamma$ ».

**214 Θέμα 4 – 18732**

Σε σύστημα αξόνων δίνονται τα σημεία  $A(3, 4)$  και  $B(7, 1)$ .



**α.** Αν  $\Gamma\left(2, \frac{8}{3}\right)$  και  $\Delta\left(\frac{13}{3}, 3\right)$  να δείξετε ότι:

**i.**  $\vec{A\Gamma} = \frac{1}{3}\vec{AO}$  και  $\vec{A\Delta} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ .      **ii.**  $\Gamma\Delta \parallel OB$ .

**iii.** Να δείξετε ότι  $(A\Gamma\Delta) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 (AOB)$ .

**β.** Γενικεύοντας το παράδειγμα του **α.** ερωτήματος, αν για τα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$  ισχύουν

$\vec{A\Gamma} = \frac{1}{v}\vec{AO}$  και  $\vec{A\Delta} = \frac{1}{v}\vec{AB}$ , να δείξετε ότι  $(A\Gamma\Delta) = \left(\frac{1}{v}\right)^2 (ABO)$ .

**215 Θέμα 4 – 15692**

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 + y = x + 2xy + 6$ .

**α.** Να αποδείξετε ότι:

**i.**  $(x - y)^2 - (x - y) - 6 = 0$ .

**ii.** Η εξίσωση παριστάνει ένα ζεύγος παράλληλων ευθειών, τις οποίες να βρείτε.

Έστω  $\epsilon_1: x - y - 3 = 0$  και  $\epsilon_2: x - y + 2 = 0$  οι δύο παράλληλες ευθείες.

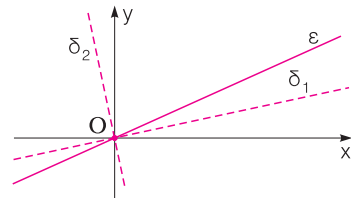
**β.** Να αποδείξετε ότι όλα τα σημεία  $M\left(\alpha, \alpha - \frac{1}{2}\right)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  ισαπέχουν από τις δύο ευθείες.

**γ.** Να βρείτε τη μεσοπαράλληλη των δύο ευθειών.

**216 Θέμα 4 – 22067**

Θεωρούμε μία ευθεία  $\epsilon: y = \lambda x$  με θετική κλίση  $\lambda$ .

**α.** Αν  $\delta_1$  είναι η διχοτόμος της οξείας γωνίας που σχηματίζει η ευθεία  $\epsilon$  με τον  $x'x$  άξονα, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση της διχοτόμου  $\delta_1$  είναι  $y = \lambda_1 x$  με  $\lambda_1 = \frac{\lambda}{1 + \sqrt{1 + \lambda^2}}$ .



**β.** Αν  $\delta_2$  είναι η διχοτόμος της αμβλείας γωνίας που σχηματίζει η ευθεία  $\epsilon$  με τον  $x'x$  άξονα, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση της διχοτόμου  $\delta_2$  είναι  $y = \lambda_2 x$  με  $\lambda_2 = \frac{\lambda}{1 - \sqrt{1 + \lambda^2}}$ .

**γ.** Αν  $\lambda = 1$ , να εφαρμόσετε τους τύπους του **α.** ερωτήματος για να αποδείξετε ότι:

$\epsilon\phi 22,5^\circ = \sqrt{2} - 1$ .

**217 Θέμα 4 – 21696**

Θεωρούμε την εξίσωση  $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ , (1) και η ευθεία  $\epsilon: x - 2y + 3 = 0$ .

**α.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο  $C$  του οποίου να βρείτε το κέντρο  $K$  και την ακτίνα  $\rho$ .

**β.** Να εξετάσετε αν η ευθεία  $\epsilon$  έχει κοινά σημεία με τον κύκλο  $C$ .

**γ.** Να βρείτε τις εφαπτόμενες  $\epsilon_1, \epsilon_2$  του κύκλου  $C$  που είναι κάθετες στην ευθεία  $\epsilon$ .

**δ.** Να αποδείξετε ότι  $d(\epsilon_1, \epsilon_2) = 2\rho$ . Πως αιτιολογείται γεωμετρικά το συμπέρασμα αυτό;

**218 Θέμα 4 – 21690**

Δίνεται η παραβολή  $C: y^2 = 3x$  και η ευθεία  $\varepsilon: 3x + 4y + 10 = 0$ .

- α.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία και να τις σχεδιάσετε.  
**β.** Έστω  $M(x_0, y_0)$  ένα σημείο της παραβολής. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του  $d(M, \varepsilon)$

$$\text{από την ευθεία είναι } d(M, \varepsilon) = \frac{(y_0 + 2)^2 + 6}{5}.$$

- γ.** Να βρείτε το σημείο της παραβολής που είναι πιο κοντινό στην ευθεία.  
**δ.** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο που βρήκατε στο ερώτημα **γ.** είναι παράλληλη στην ευθεία  $\varepsilon$ .

**219 Θέμα 2 – 18968**

Δίνεται ο κύκλος  $C$  με εξίσωση  $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$  (1).

- α.** Να δείξετε ότι ο κύκλος  $C$  έχει κέντρο  $K(3, 4)$  και ακτίνα  $\rho = 5$ .  
**β.** Να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου  $K$  του κύκλου από την ευθεία  $\varepsilon: 3x + 4y = 0$  ισούται με 5 μονάδες μήκους.  
**γ.** Να δικαιολογήσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός: «Ο κύκλος  $C$  και η ευθεία  $\varepsilon$  εφάπτονται».

**220 Θέμα 2 – 22056**

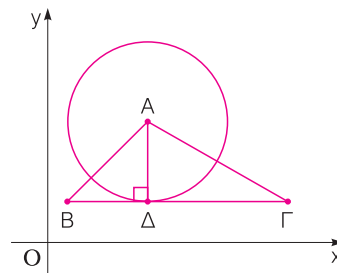
Έστω  $\Omega$  το σύνολο όλων των σημείων  $(x, y)$  του επιπέδου για τα οποία ισχύει:  $x^2 + y^2 \leq 9$ .

- α.** Να σχεδιάσετε το σύνολο  $\Omega$  σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων  $Oxy$ .  
**β.** Υπάρχει σημείο  $A$  στο σύνολο  $\Omega$  τέτοιο ώστε  $|\vec{OA}| = 4$ , όπου  $O$  η αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**221 Θέμα 2 – 18749**

Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ώστε  $A(5, 6)$ ,  $B(1, 2)$ ,  $\Gamma(12, 2)$  και το ύψος  $A\Delta$ , όπου  $\Delta$  σημείο της  $B\Gamma$ , όπως στο διπλανό σχήμα.

- α.** Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών  $B\Gamma$  και  $A\Delta$ .  
**β.** Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $\Delta$ .  
**γ.** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο  $A$ , ο οποίος εφάπτεται της ευθείας  $B\Gamma$  στο σημείο  $\Delta$ .

**222 Θέμα 4 – 18781**

Δίνονται δύο κύκλοι με εξισώσεις  $C_1: x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$  και  $C_2: x^2 + y^2 = 1$ .

- α.** Να δείξετε ότι:  
**i.** Η εξίσωση του κύκλου  $C_1$  γράφεται στη μορφή  $(x - 3)^2 + y^2 = 4$ .  
**ii.** Οι κύκλοι  $C_1, C_2$  εφάπτονται εξωτερικά.  
**β.** Να βρείτε:  
**i.** Το σημείο επαφής των δύο κύκλων  $C_1$  και  $C_2$ .  
**ii.** Την εξίσωση της εσωτερικής κοινής εφαπτομένης των δύο κύκλων  $C_1$  και  $C_2$ .  
**γ.** Αν τα σημεία  $M_1, M_2$  διατρέχουν τους κύκλους  $C_1, C_2$  αντίστοιχα, να βρείτε τη μέγιστη απόσταση ανάμεσα στα σημεία αυτά.

**223 Θέμα 4 – 20651**

Θεωρούμε τα σημεία  $A(1, 1)$  και  $B(2, 4)$ .

- α.** Να βρείτε όλα τα σημεία  $M$  στον άξονα  $y'y$  ώστε το τρίγωνο  $MAB$  να είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα  $AB$ .
- β.** Να βρείτε την εξίσωση κύκλου  $C$  με διάμετρο  $AB$ .
- γ.** Να αποδείξετε ότι ο κύκλος  $C$  διέρχεται από τα σημεία  $M$  που προσδιορίσατε στο **α.** ερώτημα. Κατόπιν, να το επιβεβαιώσετε γεωμετρικά.

**224 Θέμα 4 – 18467**

Δίνεται η εξίσωση  $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2(x+3)$  : (1).

- α.** Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο  $K(2, -2)$  και ακτίνα  $\rho=3$ .
- β.** Να δείξετε ότι η αρχή  $O$  των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου.
- γ.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$  η οποία τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία  $A$  και  $B$  ώστε η αρχή των αξόνων να είναι το μέσο της χορδής  $AB$ .
- δ.** Αν η ευθεία  $\varepsilon$  του προηγούμενου ερωτήματος έχει εξίσωση  $y=x$  τότε να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $KAB$ .

**225 Θέμα 4 – 33696**

Το κέντρο του κύκλου  $c$  βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και είναι σημείο της ευθείας  $\varepsilon: y=2x-1$ . Ο κύκλος  $c$  έχει ακτίνα  $\rho=3\sqrt{2}$  και η ευθεία  $\zeta: x+y-2=0$  εφάπτεται στον κύκλο στο σημείο  $A$ .

- α.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου  $c$  είναι  $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 18$ .
- β.** Να αποδείξετε ότι:
  - i.** Η εξίσωση της ευθείας  $KA$  είναι η  $x-y+2=0$ .
  - ii.** Είναι  $A(0, 2)$ .
- γ.** Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τριγώνου  $A\Lambda M$ , όπου  $M$  και  $\Lambda$  είναι τα σημεία τομής της ευθείας  $\varepsilon$  με τον κύκλο  $c$ .

**226 Θέμα 4 – 20650**

**α.** Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1: y=x+2$ ,  $\varepsilon_2: y=x-2$  και τα σημεία  $A(-2, 0)$ ,  $B(2, 0)$  των ευθειών  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  αντίστοιχα.

- i.** Να αποδειχθεί ότι  $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ .
  - ii.** Να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου  $M$ , του  $AB$ .
  - iii.** Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλου των ευθειών  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ .
- β.** Ο κύκλος  $(K, \rho)$  έχει την ιδιότητα να εφάπτεται των ευθειών  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ . Αν το κέντρο  $K$  του κύκλου  $(K, \rho)$  ανήκει στην ευθεία  $\eta: x=\lambda$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ , τότε:
- i.** Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου  $K$ , συναρτήσει του  $\lambda$ .
  - ii.** Να αποδείξετε ότι η ακτίνα  $\rho$  είναι ανεξάρτητη του  $\lambda$  και να γράψετε την εξίσωση που παριστάνει όλους τους κύκλους  $(K, \rho)$ , για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**227 Θέμα 4 – 18871**

Δίνεται ο κύκλος  $c$  με κέντρο  $O(0, 0)$  και ακτίνα  $\rho=\sqrt{5}$  και το σημείο  $A(3, 1)$ .

- α.** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου και να αποδείξετε ότι το σημείο  $A$  είναι εξωτερικό του κύκλου.

- β. i.** Να αποδείξετε ότι οι ευθείες που εφάπτονται στον κύκλο  $c$  και διέρχονται από το σημείο  $A$  έχουν εξισώσεις  $\varepsilon_1 : 2x - y = 5$  και  $\varepsilon_2 : x + 2y = 5$ .
- ii.** Να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας  $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ , όπου  $B$  και  $\Gamma$  είναι αντίστοιχα τα σημεία επαφής των ευθειών  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$  με τον κύκλο.

### 228 Θέμα 4 – 15177

Δίνονται τα σημεία  $A(1, 0)$  και  $B(0, -1)$  και ο κύκλος  $c_1$  με εξίσωση

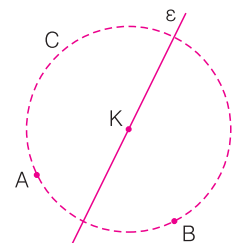
$$c_1 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.$$

- α.** Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων  $N(x, y)$  του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν τη σχέση  $\vec{NA}^2 - \vec{NB}^2 = 4$ , ανήκουν στην ευθεία  $\varepsilon$  με εξίσωση  $y = -x - 2$ .
- β.** Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων  $P$  του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση  $2x^2 + 2y^2 + 10x + 14y + 21 = 0$ , ανήκουν σε κύκλο  $c_2$  κέντρου  $A\left(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right)$  και ακτίνας  $R = 2\sqrt{2}$ .
- γ. i.** Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι  $c_1$  και  $c_2$  εφάπτονται εξωτερικά και στη συνέχεια να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση των σημείων τους.
- ii.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $\varepsilon$  είναι κοινή εφαπτομένη των κύκλων  $c_1$  και  $c_2$ .

### 229 Θέμα 4 – 22069

Τα σημεία  $A(3, 2)$  και  $B(6, 1)$  βρίσκονται πάνω σε έναν κύκλο  $C$  από το κέντρο  $K$  του οποίου διέρχεται η ευθεία  $\varepsilon : y = 2x - 7$ . Να βρείτε:

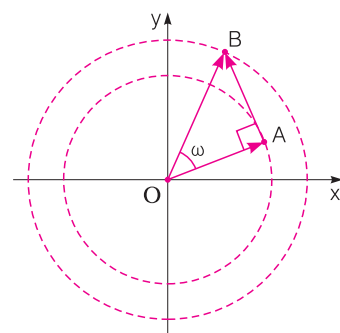
- α.** Τις συντεταγμένες του κέντρου  $K$  του κύκλου  $C$ .
- β.** Την ακτίνα  $R$  του κύκλου  $C$ .
- γ.** Την εξίσωση του κύκλου  $C$ .



### 230 Θέμα 4 – 22066

Θεωρούμε το σημείο  $A = (\cos\theta, \sin\theta)$  και το σημείο  $B = (\cos\theta - \sin\theta, \sin\theta + \cos\theta)$ , όπου  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

- α.** Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A$  και  $B$  ανήκουν σε δύο κύκλους με κέντρο την αρχή των αξόνων  $O(0, 0)$ . Να βρείτε τις ακτίνες των δύο κύκλων.
- β.** Να αποδείξετε ότι:  $\vec{OA} \perp \vec{AB}$ .
- γ.** Να βρείτε το μέτρο της γωνίας  $\omega$  μεταξύ των διανυσμάτων  $\vec{OA}$  και  $\vec{OB}$ .



**231 Θέμα 4 – 22062**

Δίνεται η οικογένεια κύκλων

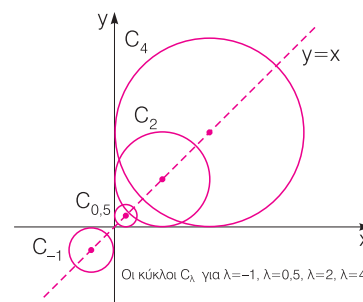
$$C_\lambda : (x - \lambda)^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2, \text{ με } \lambda \neq 0.$$

**α.** Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα κάθε κύκλου  $C_\lambda$ ,  $\lambda \neq 0$ .

**β.** Να αποδείξετε ότι το κέντρο κάθε κύκλου  $C_\lambda$  βρίσκεται στην ευθεία  $y = x$ .

**γ.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $x = 0$  εφάπτεται σε όλους τους κύκλους  $C_\lambda$ ,  $\lambda \neq 0$ . Να εξηγήσετε με συντομία ότι το ίδιο συμβαίνει και για την ευθεία  $y = 0$ .

**δ.** Έστω  $a \neq 0$ . Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $x = a$  εφάπτεται σε έναν, και μόνο έναν, από τους κύκλους  $C_\lambda$ . Να εξηγήσετε με συντομία ότι το ίδιο συμβαίνει και για την ευθεία  $y = a$ .



**232 Θέμα 4 – 22061**

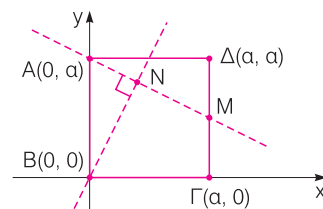
Δίνεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  με μήκος πλευράς  $a(a > 0)$  και κορυφές  $A(0, a)$ ,  $B(0, 0)$ ,  $\Gamma(a, 0)$  και  $\Delta(a, a)$ .  $M$  είναι το μέσον της πλευράς  $\Gamma\Delta$  και το τμήμα  $BN$  είναι κάθετο στο τμήμα  $AM$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

**α.** Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών:

- i.**  $AM$
- ii.**  $BN$

**β.** Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $N$ .

**γ.** Να αποδείξετε ότι το σημείο  $N$  ανήκει σε κύκλο με κέντρο  $\Gamma$  και ακτίνα ίση με  $a$ . Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου αυτού.



**233 Θέμα 4 – 21683**

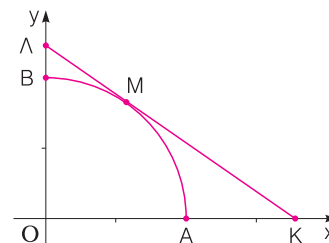
Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το πρώτο τεταρτημόριο του κύκλου  $x^2 + y^2 = 4$  και το τυχαίο σημείο  $M(x_1, y_1)$ ,  $0 < x_1 < 2$  ανάμεσα στα  $A, B$ .

**α.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του στο  $M$  και τις συντεταγμένες των σημείων τομής της  $K, \Lambda$  με τους άξονες.

**β.** Να αποδείξετε ότι το μήκος  $d$  του τμήματος  $K\Lambda$  είναι  $d = \frac{8}{x_1 y_1}$ .

**γ.** Να βρείτε το μήκος  $d_0$  του τμήματος  $K\Lambda$  όταν  $x_1 = \sqrt{2}$ .

**δ.** Να αποδείξετε ότι, όταν το  $M$  κινείται στο τεταρτοκύκλιο, τότε:  $d \geq d_0$ .



**234 Θέμα 4 – 20863**

Δίνονται τα σημεία  $A(1, 0)$  και  $B(3, 0)$ .

**α.** Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας  $\zeta$  του ευθύγραμμου τμήματος  $AB$ .

**β.** Αν  $K$  είναι ένα τυχαίο σημείο της ευθείας  $\zeta$ , να βρείτε την εξίσωση (c) όλων των κύκλων, οι οποίοι έχουν κέντρο  $K$  και διέρχονται από τα σημεία  $A$  και  $B$ , συναρτήσει μιας παραμέτρου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- γ. Αν η εξίσωση  $(x-2)^2 + (y-\lambda)^2 = \lambda^2 + 1$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , παριστάνει όλους τους κύκλους (c) του ερωτήματος β., τότε:
- Να σχεδιάσετε τον κύκλο, ο οποίος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB.
  - Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $(\varepsilon): x + \lambda y - 1 = 0$  εφάπτεται σε όλους τους κύκλους (c) στο σημείο  $A(1, 0)$ .

### 235 Θέμα 4 – 20700

Δίνονται το τετράγωνο  $MM_1OM_2$  με  $M(4, 4)$ ,  $M_1(4, 0)$ ,  $M_2(0, 4)$ . Αν O η αρχή των αξόνων του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, τότε:

- Να δείξετε ότι ο κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές του τετραγώνου  $MM_1OM_2$  έχει εξίσωση  $C: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$ .
- Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $\varepsilon: x + y = 8$  είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου C.
- Να βρείτε το σημείο επαφής της ευθείας  $\varepsilon$  με τον κύκλο C.

### 236 Θέμα 4 – 18521

Δίνονται τα σημεία  $A(1, 2)$ ,  $B(2, 4)$  και  $\Gamma(3, 1)$ .

- Να αποδείξετε ότι  $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 90^\circ$ .
- Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου c, ο οποίος διέρχεται από τα σημεία A, B και Γ.
- Αν ο κύκλος c έχει εξίσωση  $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$ , τότε να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του, οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

### 237 Θέμα 2 – 18701

Δίνεται η παραβολή με εξίσωση  $y = \frac{1}{2}x^2$  (1).

- Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο  $A(2, 2)$ .
- Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή (1), την εστία, τη διευθετούσα και την εφαπτομένη της παραβολής.

### 238 Θέμα 2 – 21248

Δίνεται το σημείο  $E(2, 0)$ , η ευθεία  $\delta_1: x = -2$  και τυχαίο σημείο  $M(x, y)$  του επιπέδου.

- Να βρείτε την απόσταση (ME) του σημείου  $M(x, y)$  από το  $E(2, 0)$  ως συνάρτηση των  $x, y$ .
  - Να βρείτε την απόσταση  $d(M, \delta)$  του σημείου M από την ευθεία  $\delta$  ως συνάρτηση των  $x, y$ .
- Αν ισχύει  $(ME) = d(M, \delta)$  να δείξετε ότι το σημείο M ανήκει στην παραβολή  $y^2 = 8x$ .

### 239 Θέμα 4 – 20090

Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 4x$  και  $M(x_0, y_0)$ ,  $y_0 > 0$ , ένα σημείο της.

- Αν A είναι η προβολή του M στη διευθετούσα της παραβολής.
  - Να εκφράσετε τις συντεταγμένες των σημείων M και A συναρτήσει της τεταγμένης  $y_0$  του σημείου M.



- ii. Αν  $E$  είναι η εστία της παραβολής, να βρείτε το σημείο  $M$  για το οποίο  $(MAE) = \frac{5}{8}$  τ.μ. .
- β. Αν  $M\left(\frac{1}{4}, 1\right)$  και  $\varepsilon$  η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο  $M$ , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AMEM'$  είναι ρόμβος, όπου  $E$  είναι η εστία της παραβολής και  $M'$  το σημείο που η ευθεία  $\varepsilon$  τέμνει τον άξονα  $x'x$ .

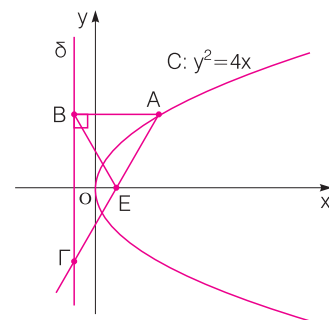
**240 Θέμα 4 – 20862**

Δίνονται τα σημεία  $M(-2, 2)$ ,  $E\left(0, -\frac{1}{2}\right)$  και η ευθεία  $\zeta$  με εξίσωση  $y = \frac{1}{2}$ .

- α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $(\varepsilon_1)$  που διέρχεται από το σημείο  $M$  και σχηματίζει γωνία  $45^\circ$  με τον άξονα  $x'x$ .
- β. Να βρείτε την εξίσωση, που εκφράζει το σύνολο των σημείων του επιπέδου, που απέχουν ίση απόσταση από το σημείο  $E$  και την ευθεία  $\zeta$ .
- γ. i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης  $(\eta)$  της καμπύλης  $C: x^2 + 2y = 0$ , που είναι παράλληλη στην ευθεία  $(\varepsilon_1)$ , με εξίσωση  $y = x + 4$ .
- ii. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της καμπύλης  $C$  και των ευθειών  $(\varepsilon_1)$  και  $(\eta)$ . Με τη βοήθεια του σχήματος (ή με οποιονδήποτε άλλον τρόπο) να αποδείξετε ότι η ελάχιστη απόσταση των σημείων της  $C$  από την ευθεία  $(\varepsilon_1)$  είναι  $\frac{7\sqrt{2}}{4}$ .

**241 Θέμα 4 – 20684**

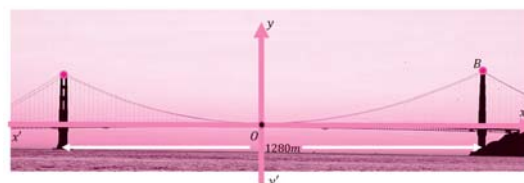
Ένα σημείο  $A(x_A, y_A)$  της παραβολής  $C: y^2 = 4x$  με  $x_A > 0$ ,  $y_A > 0$ , έχει την εξής ιδιότητα: η ημιευθεία  $AE$  τέμνει την διευθετούσα  $(\delta)$  στο σημείο  $\Gamma$ , έτσι όμως ώστε η εστία  $E$  της παραβολής  $C$ , να είναι το μέσο του τμήματος  $A\Gamma$ . Επίσης, από το σημείο  $A$  φέρνουμε κάθετη στην διευθετούσα  $(\delta)$  και έστω  $B$  το σημείο τομής, όπως δείχνει το διπλανό σχήμα.



- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $ABE$  είναι ισόπλευρο.
- β. Να αποδείξετε ότι  $x_A = 3$  και  $y_A = 2\sqrt{3}$ .
- γ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

**242 Θέμα 4 – 19047**

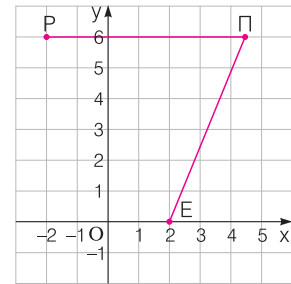
Στην Golden Gate γέφυρα του San Francisco, το κεντρικό καλώδιο θεωρούμε προσεγγιστικά ότι αποτελεί τμήμα παραβολής. Οι δύο βασικοί πυλώνες απέχουν μεταξύ τους  $1280\text{ m}$ , ενώ το ύψος κάθε πυλώνα σε σχέση με το οδόστρωμα της γέφυρας  $160\text{ m}$ . Γνωρίζουμε ότι το κατώτερο σημείο του παραβολικού καλωδίου αγγίζει τη γέφυρα στο μέσο της απόστασης των δύο πυλώνων. Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων, όπως στο σχήμα.



- α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής του κεντρικού καλωδίου σ' αυτό το σύστημα των αξόνων είναι  $x^2 = 2560y$  .
- β. Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας  $E$  και την εξίσωση της διευθετούσας  $(\delta)$  της παραβολής.
- γ. Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο  $B(640, 160)$  τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο  $\Delta$ . Να αποδείξετε ότι  $E\Delta = EB$  .

### 243 Θέμα 4 – 21653

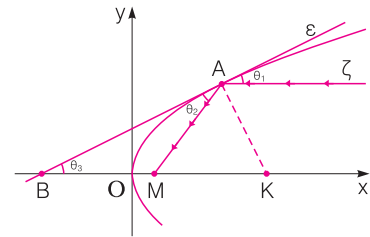
Στο διπλανό ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, το  $1^{\circ}$  τεταρτημόριο αντιστοιχεί σε μία θαλάσσια περιοχή και τα υπόλοιπα τεταρτημόρια σε στεριά. Οι ημιάξονες  $Ox$  ,  $Oy$  οριοθετούν ένα λιμάνι. Ένα πλοίο ρυμουλκείται στο λιμάνι, δεμένο με δύο συρματόσχοινα στο ίδιο σημείο  $\Pi(\kappa, \lambda)$  του πλοίου. Το ένα από τα δύο ρυμουλκικά είναι σταθερό στο σημείο  $E(2, 0)$  και το άλλο κινείται ώστε η θέση να περιγράφεται από το σημείο  $P(-2, \lambda)$  . Η ρυμούλκηση γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε χρονική στιγμή της ρυμούλκησης να ισχύει  $(\Pi E) = (\Pi P)$  .



- α. Να αποδείξετε ότι το σημείο  $P(-2, \lambda)$  κινείται σε σταθερή ευθεία  $(\delta)$  της οποίας να βρείτε την εξίσωση.
- β. Να αιτιολογήσετε γιατί κάθε χρονική στιγμή της ρυμούλκησης είναι  $\Pi P \perp (\delta)$  .
- γ. Να αποδείξετε ότι η πορεία του  $\Pi(\kappa, \lambda)$  είναι παραβολή  $C$  της οποίας να βρείτε την εξίσωση.
- δ. Αν  $y^2 = 8x$  η εξίσωση της παραβολής  $C$  να αποδείξετε ότι κάθε χρονική στιγμή η μεσοκάθετος του  $EP$  εφάπτεται της παραβολής  $C$  στο σημείο  $\Pi$  .

### 244 Θέμα 4 – 18870

Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με εξίσωση  $y^2 = 4x$  , η εφαπτομένη της  $\varepsilon$  στο σημείο  $A(4, 4)$  και η  $AK$  κάθετη στην  $\varepsilon$  . Μία φωτεινή ακτίνα  $\zeta$  , ακολουθώντας πορεία παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής, προσπίπτουσα στο σημείο  $A$  και ανακλώμενη πάνω στην καμπύλη (που αντιστοιχεί σε παραβολικό κάτοπτρο) διέρχεται από το σημείο  $M$  . Αν γνωρίζεται ότι η γωνία  $\theta_1$  που σχηματίζει



η προσπίπτουσα φωτεινή ακτίνα  $\zeta$  με την  $\varepsilon$  και η γωνία  $\theta_2$  που σχηματίζει η ανακλώμενη φωτεινή ακτίνα  $AM$  με την  $\varepsilon$  είναι ίσες, τότε:

- α. Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.
- β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$  και το σημείο  $B$  στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα  $x'x$ .
- γ. Να αποδείξετε ότι το  $MAB$  είναι ισοσκελές.
- δ. Να αποδείξετε ότι το σημείο  $M$  ταυτίζεται με την εστία της παραβολής.

**245 Θέμα 4 – 18245**

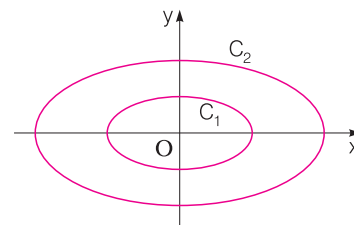
Δίνεται η παραβολή  $C: y^2 = 4x$  και η εξίσωση  $(\lambda^2 - 1)x + 2\lambda y + \lambda^2 + 1 = 0$  (1),  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- α.** Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας  $E$  και την εξίσωση της διευθετούσας  $\delta$  της παραβολής  $C$ .
- β.** Να αποδείξετε ότι η (1) για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  παριστάνει ευθεία  $\varepsilon_\lambda$  που δεν διέρχεται από το  $O(0, 0)$ .
- γ.** Να αποδείξετε ότι η διευθετούσα της παραβολής δεν ανήκει στην οικογένεια ευθειών  $\varepsilon_\lambda$ .
- δ.** Έστω  $M(\alpha, \beta)$  σημείο του επιπέδου το οποίο δεν ανήκει στην παραπάνω διευθετούσα  $\delta$ . Αν από το  $M$  διέρχεται μόνο μία ευθεία από την οικογένεια ευθειών  $\varepsilon_\lambda$ , να δείξετε ότι το  $M$  ανήκει στον κύκλο που έχει κέντρο την κορυφή της παραβολής  $C$  και διέρχεται από την εστία της  $E$ .

**246 Θέμα 2 – 20865**

Δίνονται οι ελλείψεις  $C_1: x^2 + 4y^2 = 4$ ,  $C_2: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$  και οι

γραφικές τους παραστάσεις στο διπλανό σχήμα.



- α.** Να βρείτε τα μήκη των αξόνων και τις εστίες των δύο ελλείψεων.
- β.** Από το σχήμα φαίνεται ότι οι δύο ελλείψεις έχουν την ίδια εκκεντρότητα. Να αποδείξετε ότι αυτό είναι αληθές.

**247 Θέμα 2 – 20658**

Δίνονται η έλλειψη  $c$  με εξίσωση  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ .

- α.** Να δικαιολογήσετε ότι  $a = 4$ ,  $b = 2$  και  $\gamma = 2\sqrt{3}$ .
- β.** Να βρείτε τα μήκη των αξόνων και τις εστίες της έλλειψης  $c$ .
- γ.** Να σχεδιάσετε την έλλειψη  $c$  και τον κύκλο  $x^2 + y^2 = 16$  στο ίδιο σύστημα αξόνων.

**248 Θέμα 2 – 21648**

Η έλλειψη  $C$  έχει εστίες τα σημεία  $E(3, 0)$ ,  $E'(-3, 0)$  και διέρχεται από το σημείο  $M\left(4, \frac{12}{5}\right)$ .

- α.** Να αποδείξετε ότι το μήκος του μεγάλου άξονα είναι 10.
- β.** Να βρείτε την εξίσωση  $C$ .
- γ.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης  $C$  στο σημείο της  $M\left(4, \frac{12}{5}\right)$ .

Δίνεται ότι  $\sqrt{1369} = 37$ .

**249 Θέμα 2 – 21647**

Η έλλειψη  $C$  έχει εστίες τα σημεία  $E(4, 0)$ ,  $E'(-4, 0)$  και μεγάλο άξονα 10. Να βρείτε:

- α.** Την εξίσωση  $C$ .
- β.** Την εκκεντρότητά της  $C$ .
- γ.** Την εξίσωση της εφαπτομένης  $C$  στο σημείο της  $M\left(4, \frac{9}{5}\right)$ .

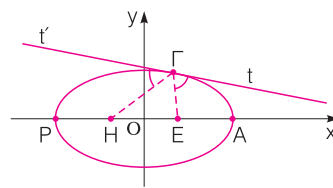
**250 Θέμα 2 – 20718**

Δίνεται η έλλειψη  $C$  με εξίσωση  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ .

- Να βρείτε τις εστίες της.
- Να σχεδιάσετε την έλλειψη  $C$  σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.
- Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα τις εφαπτόμενες στις κορυφές της  $C$  και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

**251 Θέμα 4 – 20666**

Η τροχιά της Γης γύρω από τον Ήλιο είναι μία έλλειψη με μία εστία τον Ήλιο. Η ελάχιστη απόσταση του κέντρου της Γης από το κέντρο του Ήλιου είναι  $PH = 147,5$  εκατομμύρια Km και η μέγιστη  $AH = 152,5$  εκατομμύρια Km. Στο σχήμα θεωρούμε ότι τα σημεία  $H$  και  $\Gamma$  είναι τα κέντρα του Ήλιου και της Γης αντίστοιχα.



Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων με αρχή το μέσο του  $HE$  και  $x'x$  τον μεγάλο άξονα της έλλειψης, ενώ ο άξονας  $y'y$  είναι η μεσοκάθετος του  $HE$ .

- Να αποδείξετε  $(PA) = 300$  εκατομμύρια Km,  $(HE) = 5$  εκατομμύρια Km και ότι η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι  $\epsilon = \frac{1}{60}$ .
- Για μία τυχαία θέση της Γης πάνω στην ελλειπτική τροχιά, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου  $H\Gamma E$ .
- Αν ονομάσουμε  $t't$  την εφαπτομένη ευθεία της έλλειψης στο  $\Gamma$ , να αποδείξετε ότι οι γωνίες  $t'\hat{\Gamma}H$  και  $t\hat{\Gamma}H$  είναι ίσες.

**252 Θέμα 4 – 20722**

Έστω  $K(x, y)$  μεταβλητό σημείο του επιπέδου για το οποίο ισχύει  $(KE) + (KE') = 10$ , όπου  $E(3, 0)$  και  $E'(-3, 0)$ .

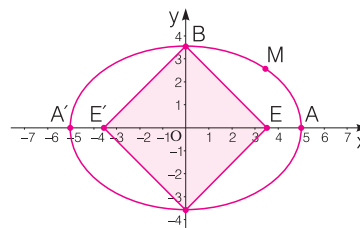
- Να βρείτε το είδος της καμπύλης  $C$  πάνω στην οποία κινείται το σημείο  $K$  και να γράψετε την εξίσωσή της, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Έστω  $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  και  $(\epsilon): 3x + 5y = 25$ .

- Να αποδείξετε ότι  $C$  και  $\epsilon$  έχουν ένα κοινό σημείο  $M$  και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $M$ .
- Να ερμηνεύσετε γραφικά το συμπέρασμα του ερωτήματος **β.** και να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα την έλλειψη  $C$  και την ευθεία  $\epsilon$ .
- Να σχεδιάσετε τη διχοτόμο της γωνίας  $\widehat{EM'E'}$  και να βρείτε την εξίσωσή της.

**253 Θέμα 4 – 21655**

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η έλλειψη  $C$  με κέντρο το  $O(0, 0)$ , εστίες τα σημεία  $E, E'$  και κορυφές τα σημεία  $A(5, 0)$ ,  $A'(-5, 0)$ ,  $B, B'$ . Αν είναι γνωστό ότι το τετράπλευρο  $BEB'E'$  είναι τετράγωνο, να βρείτε:

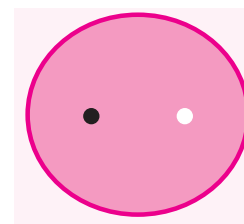


- Τις συντεταγμένες των σημείων  $B, B', E, E'$ .

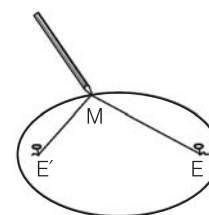
- β.** Την εξίσωση της έλλειψης  $C$ .
- γ.** Έστω  $M$  τυχαίο σημείο της  $C$ , που δεν ταυτίζεται με κάποιο από τα  $A, A'$ .
- Να αποδείξετε ότι όλα τα τρίγωνα  $EME'$  έχουν την ίδια περίμετρο την οποία να προσδιορίσετε.
  - Να βρείτε τις συντεταγμένες του  $M$  για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου  $EME'$  παίρνει τη μέγιστη τιμή του, την οποία να προσδιορίσετε.

**254 Θέμα 4 – 20726**

Ένας κατασκευαστής μπιλιάρδων θέλει να κατασκευάσει ένα ελλειπτικό μπιλιάρδο όπως αυτό του διπλανού σχήματος (σχήμα 1). Το περίγραμμα του μπιλιάρδου είναι έλλειψη με εστίες τα σημεία  $E(3, 0)$  και  $E'(-3, 0)$ . Η μοναδική τρύπα του μπιλιάρδου έχει σχήμα κύκλου (ο μαύρος κύκλος στο σχήμα 1) με κέντρο το σημείο  $E'$ . Για να σχεδιάσει ο κατασκευαστής το περίγραμμα του μπιλιάρδου πάνω σε μία ξύλινη επίπεδη επιφάνεια, τοποθέτησε στα σημεία  $E$  και  $E'$  δύο καρφιά στα οποία έδεσε τις άκρες ενός σχοινιού μήκους 10 μονάδων μήκους. Στη συνέχεια με ένα μολύβι διατηρούσε το σχοινί τεντωμένο, ώστε αυτό, κατά την κίνησή του, να διαγράφει έλλειψη  $C$  όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα (σχήμα 2).



Σχήμα 1



Σχήμα 2

- Να βρείτε τα μήκη του μεγάλου και του μικρού άξονα της έλλειψης  $C$ .
  - Να γράψετε την εξίσωση της έλλειψης  $C$  και να βρείτε την εκκεντρότητά της.
  - Ένας παίκτης τοποθετεί μία άσπρη μπάλα (ο άσπρος κύκλος στο σχήμα 1) ακριβώς στο σημείο  $E$ . Σκοπεύει να χτυπήσει την άσπρη μπάλα ώστε αφού αυτή προσκρούσει πρώτα στο ελλειπτικό περίγραμμα του μπιλιάρδου, στη συνέχεια να πέσει στην τρύπα. Αν θεωρήσουμε ότι ο παίκτης θα χτυπήσει με όση δύναμη απαιτείται για να φτάσει η μπάλα στην τρύπα και το χτύπημα θα είναι στο κέντρο της μπάλας ώστε αυτή να κυλά χωρίς να περιστρέφεται, να βρείτε σε ποιο σημείο της έλλειψης  $C$  πρέπει να σημαδέψει, ώστε με ένα μόνο χτύπημα η μπάλα να μπει στην τρύπα:
    - μόνο στα άκρα του μεγάλου άξονα
    - μόνο στα άκρα του μικρού άξονα
    - μόνο στα άκρα του μικρού άξονα και στο ένα άκρο του μεγάλου άξονα
    - σε οποιοδήποτε σημείο της  $C$  εκτός από το ένα άκρο του μεγάλου άξονα
- Επιλέξτε τη μοναδική σωστή απάντηση αιτιολογώντας την απάντησή σας.

**255 Θέμα 2 – 21218**

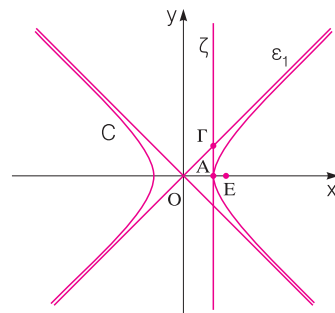
Δίνονται οι υπερβολές  $(C_1): x^2 - y^2 = 1$ ,  $(C_2): y^2 - x^2 = 1$ .

- Να αποδείξετε ότι οι εστίες της  $C_1$  είναι οι  $E_1(\sqrt{2}, 0)$ ,  $E'_1(-\sqrt{2}, 0)$ .
- Αν  $E_2, E'_2$  οι εστίες της  $C_2$  τότε να αποδείξετε ότι το  $E_1E_2E'_1E'_2$  είναι τετράγωνο.

**256 Θέμα 2 – 20869**

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται η υπερβολή  $C: x^2 - y^2 = 1$ , η εστία της  $E$ , η εφαπτομένη της  $\zeta$  στο σημείο  $A(1, 0)$  και το σημείο  $\Gamma$  στο οποίο αυτή τέμνει την ασύμπτωτη ευθεία  $\varepsilon_1$  της υπερβολής.

- α.** Να βρείτε τις εστίες  $E'$ ,  $E$  και τις ασύμπτωτες  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  της υπερβολής.  
**β. i.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης  $\zeta$ .  
**ii.** Να αποδείξετε ότι το σημείο  $\Gamma$  έχει συντεταγμένες  $(1, 1)$ .

**257 Θέμα 2 – 20721**

Δίνεται η υπερβολή  $C$  με εξίσωση  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ .

- α.** Να βρείτε τις εστίες της  $C$ .  
**β.** Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της  $C$ .  
**γ.** Να σχεδιάσετε την υπερβολή  $C$  και τις ασύμπτωτές της στο ίδιο σύστημα αξόνων.

**258 Θέμα 2 – 21651**

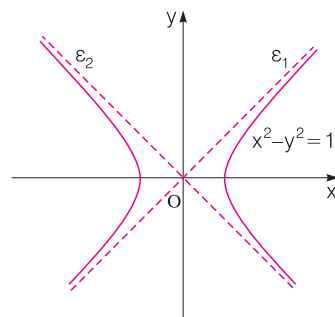
Η υπερβολή  $C$  έχει εστίες τα σημεία  $E(5, 0)$ ,  $E'(-5, 0)$  και διέρχεται από το σημείο  $A(4, 0)$ .

- α.** Να αποδείξετε ότι έχει εκκεντρότητα  $\frac{5}{4}$ .  
**β.** Να βρείτε την εξίσωση της  $C$ .  
**γ.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C$  στο σημείο της  $M\left(5, \frac{9}{4}\right)$ .

**259 Θέμα 2 – 22051**

Δίνεται η υπερβολή  $x^2 - y^2 = 1$ . Να αποδείξετε για τις ασύμπτωτες ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  της υπερβολής ότι:

- α.** Συμπίπτουν με την διχοτόμο του  $1^{\text{ου}}$  και  $3^{\text{ου}}$  τεταρτημορίου και την διχοτόμο του  $2^{\text{ου}}$  και  $4^{\text{ου}}$  τεταρτημορίου, αντίστοιχα.  
**β.** Είναι ευθείες κάθετες μεταξύ τους.

**260 Θέμα 2 – 21649**

Η υπερβολή  $C$  έχει εστίες τα σημεία  $E(5, 0)$ ,  $E'(-5, 0)$  και εκκεντρότητα  $\frac{5}{4}$ . Να βρείτε:

- α.** Την εξίσωση της  $C$ .  
**β.** Τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της  $C$ .  
**γ.** Την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C$  στο σημείο της  $M\left(5, \frac{9}{4}\right)$ .

**261 Θέμα 2 – 22566**

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση  $4x^2 - y^2 = 4$ .

- α.** Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής της υπερβολής είναι  $A(1, 0)$  και  $A'(-1, 0)$ .
- β.** Να αποδείξετε ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι  $y = 2x$  και  $y = -2x$ .
- γ.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από την κορυφή  $A$  και είναι παράλληλη προς την ασύμπτωτη  $y = -2x$  έχει εξίσωση  $y = -2x + 2$ .

**262 Θέμα 2 – 17942**

Δίνεται η κωνική τομή με εξίσωση (C)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ .

- α.** Να προσδιορίσετε το είδος της κωνικής τομής και να βρείτε μία εστία της.
- β.** Να εξετάσετε αν το σημείο  $M(1, 2022)$  μπορεί να ανήκει στην (C).

**263 Θέμα 4 – 32206**

Η υπερβολή  $C$  έχει εστίες τα σημεία  $E(5, 0)$ ,  $E'(-5, 0)$  και διέρχεται από το σημείο  $M\left(5, \frac{9}{4}\right)$ .

- α.** Να αποδείξετε ότι έχει εκκεντρότητα  $\frac{5}{4}$ .
- β.** Να βρείτε την εξίσωση της  $C$ .
- γ.** Να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας  $\widehat{EME'}$ .
- δ.** Να βρείτε το συνημίτονο της εξείας γωνίας που σχηματίζουν οι ασύμπτωτές της.  
Δίνεται ότι  $\sqrt{1681} = 41$ .

**264 Θέμα 4 – 21656**

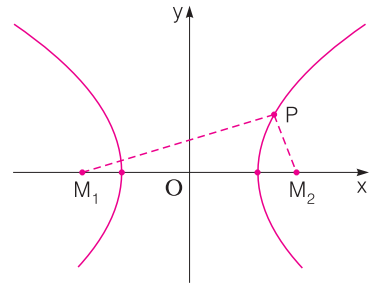
Η υπερβολή  $C$  με κέντρο το  $(0, 0)$ , εστίες τα σημεία  $E(5, 0)$ ,  $E'(-5, 0)$  και κορυφές τα σημεία  $A(4, 0)$ ,  $A'(-4, 0)$ .

- α.** Να βρείτε:
- Τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της υπερβολής  $C$ .
  - Την εξίσωση της υπερβολής  $C$ .
- β.** Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα, την υπερβολή  $C$ , τις ασύμπτωτες της  $C$  και το ορθογώνιο βάσης της  $C$ .
- γ.** Αν  $M$  τυχαίο σημείο της  $C$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης  $(ME) - (ME')$ .
- δ.** Αν  $M(\sqrt{80}, 6)$  σημείο της  $C$ , να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας  $\widehat{EME'}$ .

**265 Θέμα 4 – 20653**

Κατά τη διάρκεια μιας επιχείρησης εντοπισμού ενός αγνοούμενου σε μία αχανή δασώδη επίπεδη περιοχή, δύο παρατηρητές  $M_1$  και  $M_2$  βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία. Ο αγνοούμενος εκτοξεύει φωτοβολίδες που διαθέτει και οι δύο παρατηρητές σημειώνουν τις χρονικές στιγμές που ακούν τον ήχο της εκπυροσκόρησης του όπλου. Είναι γνωστό ότι ο παρατηρητής  $M_1$  ακούει σε όλες τις εκρήξεις τον ήχο με διαφορά 4 sec αργότερα από τον παρατηρητή  $M_2$ .

- α.** Αν ονομάσουμε  $P$  την θέση του αγνοούμενου, να αποδείξετε ότι  $(PM_1) - (PM_2) = 1360 \text{ m}$ . Θεωρούμαι ότι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου είναι  $340 \text{ m/sec}$ .
- β.** Να αποδείξετε ότι η θέση  $P$  του αγνοούμενου ανήκει σε έναν κλάδο υπερβολής με εστίες τα σημεία  $M_1$  και  $M_2$ .
- γ.** Αν γνωρίζουμε ότι η απόσταση  $(M_1M_2)$  είναι  $1378 \text{ m}$ , να αποδείξετε ότι αυτή η υπερβολή έχει εξίσωση  $\frac{x^2}{680^2} - \frac{y^2}{111^2} = 1$ ,



θεωρώντας ως άξονα  $x'x$  την ευθεία  $M_1M_2$  και κέντρο της υπερβολής την αρχή των αξόνων. Δίνεται ότι  $37^2 = 1369$ .

### 266 Θέμα 4 – 21657

Έστω η υπερβολή  $C$  με κέντρο το  $(0, 0)$ , εστίες πάνω στον άξονα  $xx'$  της οποίας το ορθογώνιο βάσης είναι τετράγωνο.

- α.** Να βρείτε:
- Τις εξισώσεις των ασυμπτωτών της  $C$ .
  - Την εκκεντρότητα της  $C$ .
- β.** Αν η υπερβολή διέρχεται από το σημείο  $(2, 0)$  και  $\zeta$  τυχαία ευθεία παράλληλη σε κάποια εκ των ασυμπτωτών της  $C$  (που δεν ταυτίζεται με κάποια από αυτές).
- Να δείξετε ότι η  $\zeta$  έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την  $C$ .
  - Είναι η ευθεία  $\zeta$  εφαπτόμενη της  $C$ ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.