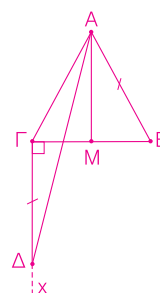


**ΝΕΑ ΘΕΜΑΤΑ (μέχρι τις 4/5/2023)**

**466 Θέμα 2 - 36099**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ) και στις ίσες πλευρές  $AB$ ,  $AG$  παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα  $AD = \frac{1}{3}AB$  και  $AE = \frac{1}{3}AG$ . Αν  $M$  είναι μέσο της  $B\Gamma$ , να αποδείξετε ότι:

- α.** τα τμήματα  $BD$  και  $GE$  είναι ίσα,
- β.** τα τρίγωνα  $BDM$  και  $ME\Gamma$  είναι ίσα,
- γ.** το τρίγωνο  $DEM$  είναι ισοσκελές.



**467 Θέμα 2 - 34777**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ) και το ύψος του  $AM$ . Φέρουμε ημιευθεία  $G\chi$  κάθετη στη  $B\Gamma$ , προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το  $A$ , και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα  $GD = AB$ . Να αποδείξετε ότι:

- α.** η γωνία  $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{\Gamma}$  είναι ίση με τη γωνία  $\hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{A}$ ,
- β.**  $G\Delta // AM$ ,
- γ.** η  $A\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{M}\hat{A}\hat{\Gamma}$ .

**468 Θέμα 4 - 34335**

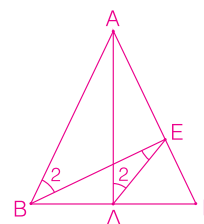
Δίνεται κύκλος  $(O, R)$  και μία ευθεία  $\chi\chi'$  η οποία έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο  $A$ . Θεωρούμε τυχαίο σημείο  $M$  της ημιευθείας  $A\chi$ . Αν για κάποιο σημείο  $B$  του κύκλου ισχύει η σχέση  $MA = MB$ , να αποδείξετε ότι:

- α.** το  $MB$  είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου  $(O, R)$ ,
- β.** η διχοτόμος της γωνίας  $B\hat{M}\chi$  είναι κάθετη στη  $MO$ ,
- γ.** το ευθύγραμμο τμήμα  $OB$  τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας  $B\hat{M}\chi$ .

**469 Θέμα 4 - 34321**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB=AG$  και  $AD$ ,  $BE$  τα ύψη του. Να αποδείξετε ότι:

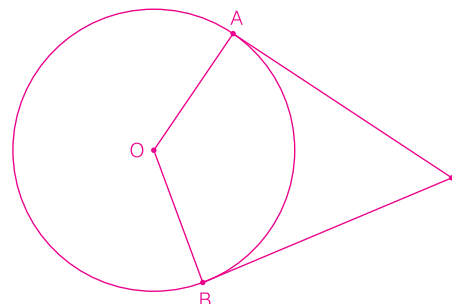
- α.**  $B\Gamma = 2E\Delta$ ,
- β.**  $\hat{E}_1 = \frac{\hat{A}}{2}$ ,
- γ.**  $\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2$ .



**470 Θέμα 2 - 34315**

Δίνεται κύκλος κέντρου  $O$  και ακτίνα  $4\text{ cm}$  και εξωτερικό του σημείο  $P$ . Έστω  $PA$ ,  $PB$  τα εφαπτόμενα τμήματα που φέρονται από το  $P$ , τα σημεία επαφής του  $A$ ,  $B$  με τον κύκλο αντίστοιχα και τέτοια ώστε η γωνία  $\hat{A}PB$  να ισούται με  $60^\circ$ .

- α.** Να αποδείξετε ότι το μέτρο της γωνίας  $\hat{A}OB$  είναι ίσο με  $120^\circ$ .

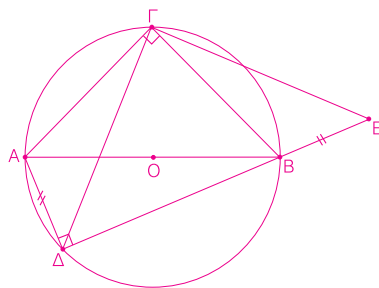


**β.** Αν  $PO$  η διακεντρική ευθεία του σημείου  $P$ , τότε να υπολογίσετε:

- i.** το μέτρο της γωνίας  $\hat{A}PO$ ,
- ii.** το μήκος του τμήματος  $OP$ .

#### 471 Θέμα 2 - 34316

Δίνεται κύκλος κέντρου  $O$  και διάμετρος του  $AB$ . Έστω  $\Gamma$  το μέσο του ενός ημικυκλίου του,  $\Delta$  τυχαίο σημείο του άλλου ημικυκλίου του και  $\hat{A}\Gamma B = \hat{A}\Delta B = 90^\circ$ . Στην προέκταση της  $\Delta B$  προς το μέρος του  $B$  θεωρούμε σημείο  $E$  ώστε  $BE = A\Delta$ .



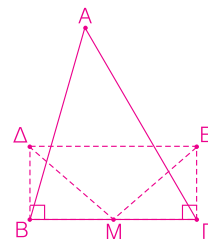
**α.** Να αποδείξετε ότι:

- i.** οι γωνίες  $\hat{\Gamma A \Delta}$  και  $\hat{\Gamma B E}$  είναι ίσες,
- ii.** τα τρίγωνα  $\Delta \Gamma$  και  $B E \Gamma$  είναι ίσα,
- iii.** η  $\Gamma \Delta$  είναι κάθετη στην  $\Gamma E$ .

**β.** Να αιτιολογήσετε γιατί, στην περίπτωση που το σημείο  $\Delta$  είναι το αντιδιαμετρικό του  $\Gamma$ , η  $\Gamma E$  είναι εφαπτομένη του κύκλου.

#### 472 Θέμα 2 - 36339

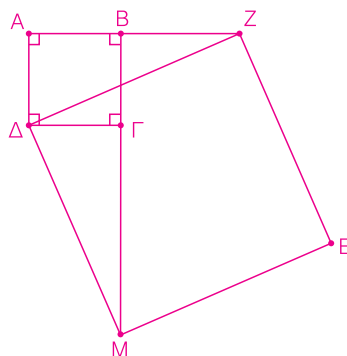
Στο διπλανό σχήμα το  $M$  είναι το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$  τριγώνου  $AB\Gamma$ , και τα τμήματα  $B\Delta$  και  $E\Gamma$  είναι κάθετα στη  $B\Gamma$  στα σημεία  $B, \Gamma$  αντίστοιχα, τέτοια ώστε  $M\Delta = M E$ . Να αποδείξετε ότι:



- α.** τα τμήματα  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  είναι ίσα,
- β.** το τετράπλευρο  $B\Delta E\Gamma$  είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

#### 473 Θέμα 4 - 34336

Δίνεται το τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$ . Προεκτείνουμε την πλευρά  $AB$  προς το  $B$  κατά τμήμα  $BZ$  και την πλευρά  $B\Gamma$  προς το  $\Gamma$  κατά τμήμα  $\Gamma M = AZ$ . Θεωρούμε σημείο  $E$  τέτοιο, ώστε το τετράπλευρο  $\Delta M E Z$  να είναι παραλληλόγραμμο. Να αποδείξετε ότι:



- α.** τα τρίγωνα  $\Delta Z$  και  $\Gamma \Delta M$  είναι ίσα και οι γωνίες  $\hat{A}\Delta Z$  και  $\hat{\Gamma \Delta M}$  είναι ίσες,
- β.** το τετράπλευρο  $\Delta M E Z$  είναι τετράγωνο,
- δ.** οι γωνίες  $\hat{B Z E}$  και  $\hat{E M B}$  είναι παραπληρωματικές.

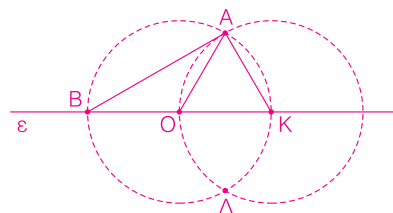
#### 474 Θέμα 2 - 34398

Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και η διχοτόμος  $\Delta \hat{A}$  της γωνίας του  $\hat{A}$ . Από το σημείο  $\Delta$  φέρουμε παράλληλη προς την  $AB$  που τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:

- α.**  $\Delta E = \frac{A\Gamma}{2}$
- β.** Το τρίγωνο  $\Delta E \Gamma$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
- γ.**  $\Delta E = \frac{A\Gamma}{2}$

**475 Θέμα 2 - 34314**

Θεωρούμε δύο ίσους κύκλους  $(O, \rho)$  και  $(K, \rho)$  τεμνόμενους στα σημεία  $A$  και  $\Delta$ , με τα κέντρα τους  $O$  και  $K$  να βρίσκονται σε ευθεία  $(\varepsilon)$  που τέμνει τον κύκλο  $(O, \rho)$  σε σημείο  $B$ , και τη διάκεντρό τους  $OK$  να είναι ίση με  $\rho$ .



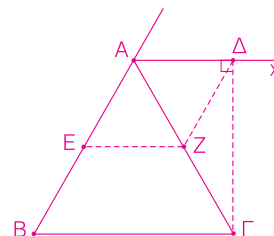
**α.** Να αποδείξετε ότι:

- i.** το τρίγωνο  $OAK$  είναι ισόπλευρο,
- ii.** το τρίγωνο  $ABK$  είναι ορθογώνιο.

**β.** Να υπολογίσετε τη γωνία  $ABK$ .

**476 Θέμα 2 - 36103**

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Φέρουμε την εξωτερική διχοτόμο  $Ax$  της γωνίας  $\hat{A}$  και από το σημείο  $\Gamma$  την κάθετο  $\Gamma\Delta$  στην  $Ax$ . Τα σημεία  $E$  και  $Z$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



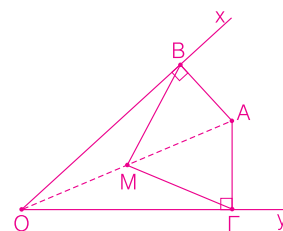
**α.**  $EZ = AE = AZ$ ,

**β.** η γωνία  $A\Gamma\Delta$  είναι ίση με  $60^\circ$

**γ.** το τετράπλευρο  $A\Delta Z E$  είναι ρόμβος.

**477 Θέμα 2 - 34515**

Δίνεται γωνία  $\hat{xOy}$  και σημείο  $A$  στο εσωτερικό της. Από το  $A$  φέρνουμε τις κάθετες  $AB$ ,  $A\Gamma$  προς τις πλευρές  $Ox$ ,  $Oy$  της γωνίας αντίστοιχα, και ονομάζουμε  $M$  το μέσο του  $OA$ . Να αποδείξετε ότι:



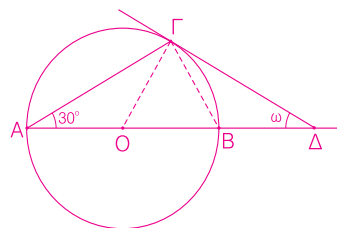
**α.** το τρίγωνο  $BMA$  είναι ισοσκελές,

**β.** το τρίγωνο  $BM\Gamma$  είναι ισοσκελές,

**β.**  $\hat{BMA} = 2 \cdot \hat{xOA}$

**478 Θέμα 2 - 34313**

Δίνεται κύκλος  $(O, R)$  διαμέτρου  $AB$ , και χορδή του  $A\Gamma$  τέτοια ώστε  $\hat{BAG} = 30^\circ$ . Στο σημείο  $\Gamma$  του κύκλου φέρουμε εφαπτομένη, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου  $AB$  (προς το  $B$ ) σε σημείο  $\Delta$ .



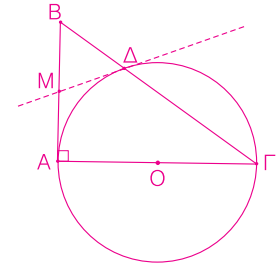
**α.** Να υπολογίσετε ότι το τρίγωνο  $\Gamma O\Delta$  είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας του  $\hat{\Gamma O\Delta}$ .

**β.** Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας  $\hat{\omega}$ .

**γ.** Να αποδείξετε ότι  $O\Delta = 2R$ .

**479 Θέμα 4 - 34329**

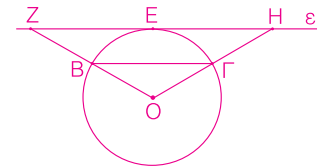
Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο  $\Gamma AB$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ). Με διάμετρο την κάθετη πλευρά του  $AG$  φέρουμε κύκλο κέντρου  $O$ , ο οποίος τέμνει την πλευρά  $B\Gamma$  του τριγώνου σε σημείο  $\Delta$ . Έστω ότι η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο  $\Delta$  τέμνει την πλευρά  $AB$  σε σημείο  $M$ . Να αποδείξετε ότι:



- α.**  $\hat{\Gamma A \Delta} = \hat{B}$ ,
- β.**  $\hat{M \Delta B} = 90^\circ - \hat{\Gamma}$  και το τρίγωνο  $\Delta MB$  είναι ισοσκελές,
- γ.** το  $M$  είναι το μέσο του  $AB$ .

**480 Θέμα 4 - 34318**

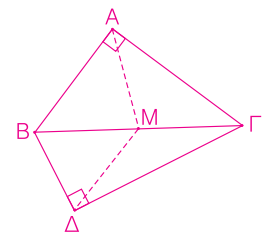
Θεωρούμε κύκλο  $(O, \rho)$  και  $E$  το μέσο του τόξου του  $B\Gamma$ . Μια ευθεία  $(\epsilon)$  εφάπτεται στον κύκλο στο  $E$ . Οι προεκτάσεις των  $OB$ ,  $OG$  (προς το  $B$  και το  $\Gamma$  αντίστοιχα) τέμνουν την ευθεία  $(\epsilon)$  στα σημεία  $Z$  και  $H$  αντίστοιχα.



- α.** Να αποδείξετε ότι:
  - i.**  $B\Gamma \parallel (\epsilon)$
  - ii.**  $OZ = OH$
- β.** Αν το σημείο  $B$  είναι το μέσο του  $OZ$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $ZOH$ .

**481 Θέμα 4 - 34330**

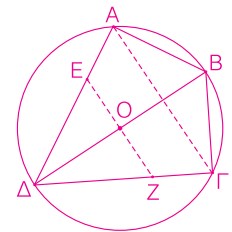
Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και  $\Delta B\Gamma$  ( $\hat{\Delta} = 90^\circ$ ) με τις κορυφές του  $A$  και  $\Delta$  εκατέρωθεν της  $B\Gamma$  και το μέσο  $M$  της  $B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:



- α.** το τρίγωνο  $AM\Delta$  είναι ισοσκελές,
- β.**  $\hat{AM\Delta} = 2 \cdot \hat{A\Gamma\Delta}$ ,
- γ.** τα  $A$ ,  $B$ ,  $\Delta$  και  $\Gamma$  είναι σημεία ενός κύκλου, τον οποίο και να κατασκευάσετε.

**482 Θέμα 4 - 34328**

Δίνεται τετράπλευρο με κορυφές σημεία  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  και  $\Delta$  κύκλου  $(O, \rho)$ , διαγώνιες  $AG$  και  $BD$ , με τη  $BD$  να διέρχεται από το κέντρο  $O$  του κύκλου, και με ίσες πλευρές τις  $AB$  και  $B\Gamma$ . Έστω ότι η κάθετη στη  $BD$  στο σημείο  $O$  τέμνει τις πλευρές  $AD$  και  $\Gamma\Delta$  του τετράπλευρου  $AB\Gamma\Delta$  στα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα, οι γωνίες του  $\hat{A}$  και  $\hat{\Gamma}$  είναι ορθές και η γωνία του  $\hat{B}$  είναι διπλάσια της γωνίας του  $\hat{\Delta}$ .



- α.** Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών  $\hat{B}$  και  $\hat{\Delta}$  του  $AB\Gamma\Delta$ .
- β.** Να αποδείξετε ότι:
  - i.** η διαγώνιος  $BD$  διχοτομεί τη γωνία  $\hat{\Delta}$  του  $AB\Gamma\Delta$ ,

- ii. το τετράπλευρο ΑΒΓΟ είναι ρόμβος,
- δ. το τετράπλευρο ΑΓΖΕ είναι τραπέζιο.

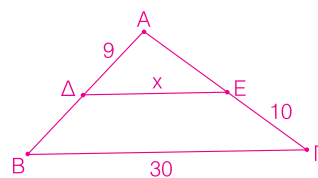
**483 Θέμα 4 - 34334**

Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $\hat{B} < \hat{\Gamma}$ ) θεωρούμε τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα. Έστω Η η προβολή της κορυφής Γ πάνω στην πλευρά ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

- α.  $HE = EG$  και  $HZ = ZG$ ,
- β. το τετράπλευρο ΔΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο,
- γ.  $\hat{Z\Delta E} = \hat{Z\eta E}$ .

**484 Θέμα 2 - 36092**

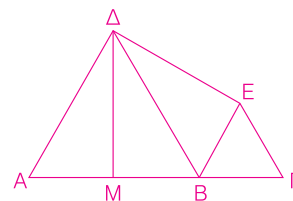
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με Δ και Ε τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα,  $AD = 9$ ,  $EG = 10$  και  $BG = 30$ .



- α. Να υπολογίσετε:
  - i. το μήκος x του τμήματος ΔΕ,
  - ii. την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.
- β. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο.

**485 Θέμα 4 - 34320**

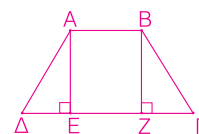
Έστω Α, Β και Γ συνευθειακά σημεία με  $AB = 2BG$ . Θεωρούμε το μέσο Μ της ΑΒ. Προς το ίδιο ημιεπίπεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΕΓ. Να αποδείξετε ότι:



- α. το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι τραπέζιο με βάσεις τα τμήματα ΑΔ και ΒΕ,
- β. τα τρίγωνα ΔΜΒ και ΔΕΒ είναι ίσα,
- γ.  $\hat{\Delta MB} + \hat{\Delta EB} = 180^\circ$ .

**486 Θέμα 2 - 34491**

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ). Φέρουμε τα σημεία Α και Β φέρνουμε τα κάθετα τμήματα ΑΕ και ΒΖ αντίστοιχα στη ΔΓ. Να αποδείξετε ότι:



- α.  $DE = \Gamma Z$ ,
- β.  $AZ = BE$ .

**487 Θέμα 4 - 34331**

Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $AB < A\Gamma$ ) φέρουμε το ύψος ΑΔ. Έστω Κ, Λ, Μ τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α.  $ΚΛ \parallel Β\Gamma$ .
- β. i.  $ΜΛ = ΚΔ$ .
- ii. Το τετράπλευρο ΚΛΜΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- γ. Οι γωνίες  $\hat{Κ\Delta\Lambda}$  και  $\hat{ΚΜ\Lambda}$  είναι ίσες.

**488 Θέμα 4 - 34333**

Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $B\Gamma = 2AB$ . Έστω  $\Delta$  το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$  και  $E$  το μέσο του τμήματος  $B\Delta$ . Από το σημείο  $\Delta$  φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την  $A\Gamma$ , η οποία τέμνει την πλευρά  $AB$  στο σημείο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι:

- α.** τα τρίγωνα  $ABE$  και  $BZ\Delta$  είναι ίσα,
- β.** η  $A\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{E\Delta\Gamma}$ ,
- γ.** το τετράπλευρο  $A\Delta E Z$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.