Αναστάσιος Χ. Μπάρλας

Γεωμετρία

Β΄ ΕΠΑ.Λ.

Τράπεζα Θεμάτων 2023

ΕΚΔΟΣΗ Μπάρλας

5.2 Παραλληλόγραμμα

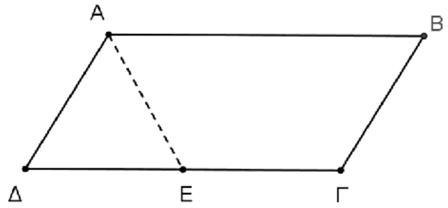
1 – 14580

ΘΕΜΑ 2

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο με ΑΔ < ΑΒ. Η διχοτόμος της γωνίας του $\widehat{\mathrm{A}}$ τέμνει την πλευρά ΔΓ σε σημείο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$ και $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{E}}\Delta$ είναι ίσες και στη συνέχεια να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 15)

β) Αν είναι ΑΒ = 2ΑΔ, να αποδείξετε ότι ΓΔ = 2ΔΕ. (Μονάδες 10)



2 – 14516

ΘΕΜΑ 2

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο και Βx η προέκταση της πλευράς του ΑΒ προς το Β.

α) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας συμπληρωμένη την ακόλουθη πρόταση: «Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του σχήματος παράλληλες μεταξύ τους είναι οι πλευρές ……….. όπως και οι πλευρές ………, απέναντι δε γωνίες είναι οι ……… και οι ………. ».

(Μονάδες 4)

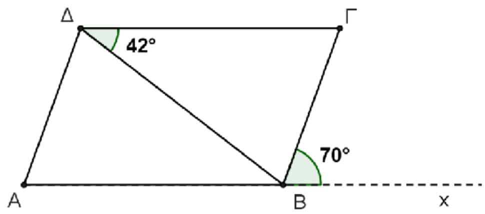
β) Λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου και τις γωνίες που σημειώνονται πάνω στο σχήμα, να υπολογίσετε με τη σειρά που ζητούνται:

i. Το μέτρο της γωνίας $\widehat{\mathrm{A}}$. (Μονάδες 8)

ii. Το μέτρο της γωνίας $\widehat{\Gamma}$. (Μονάδες 5)

iii. Το μέτρο της γωνίας $\Delta\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{A}$. (Μονάδες 8)

Σε κάθε περίπτωση να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



3 – 14515

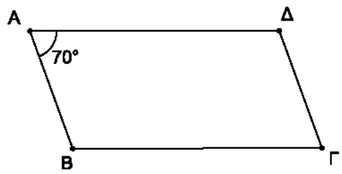
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\widehat{\mathrm{A}} = 70^{\mathrm{o}}$, $\mathrm{AB} = 5$ και $\mathrm{B\Gamma} = 2\mathrm{AB}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{\mathrm{B}} = 110^{\mathrm{o}}$. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{\Gamma}, \widehat{\Delta}$ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 8)

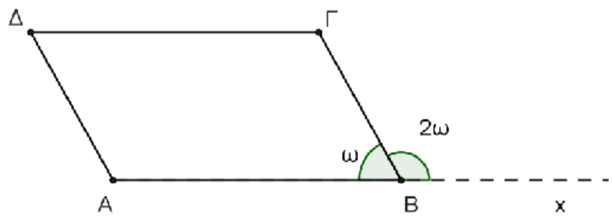
γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 8)



4 – 14504

ΘΕΜΑ 2

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο και Βx προέκταση της πλευράς του ΑΒ προς το Β .



α) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας συμπληρωμένη την ακόλουθη πρόταση: Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του σχήματος παράλληλες είναι οι πλευρές …….. και απέναντι γωνίες είναι οι ……….

(Μονάδες 8)

β) Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος να δείξετε ότι $\widehat{\omega} = 60^0$.

(Μονάδες 5)

γ) Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών $\widehat{\mathrm{A}}$, $\widehat{\Delta}$ και $\widehat{\Gamma}$ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Να τεκμηριώσετε με επιχειρήματα την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

5 – 14503

ΘΕΜΑ 2

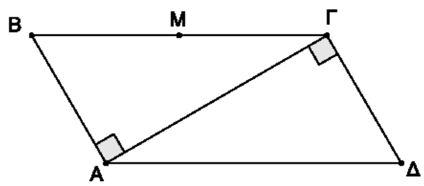
Τα δύο ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ του παρακάτω σχήματος έχουν κοινή πλευρά την ΑΓ και ΑΒ $=$ ΓΔ.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί οι ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

γ) Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ και $A\Delta = 8$, να βρείτε το μήκος του ΒΜ.

(Μονάδες 9)



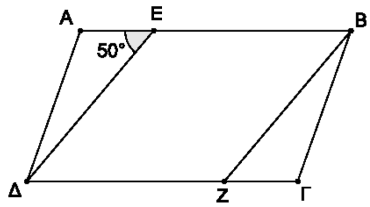
6 – 14501

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα, ώστε $ΒΕ = ΔΖ$ και $Α\hat{Ε}Δ = 50^o$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΖΔΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $Β\hat{Ε}Δ$ και $Β\hat{Ζ}Δ$. (Μονάδες 12)



7 – 20946

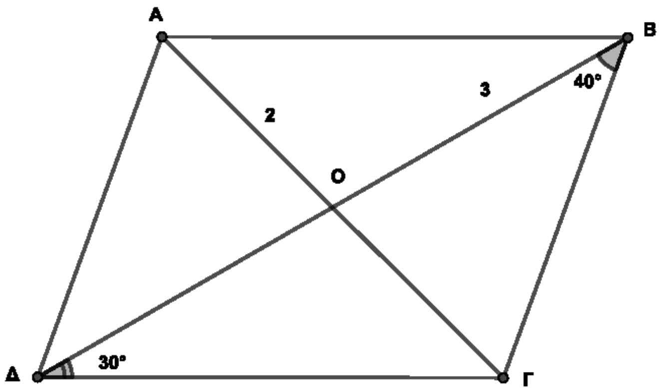
ΘΕΜΑ 2

Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος ισχύουν ΑΒ = ΓΔ και ΑΒ // ΓΔ. Παίρνοντας υπόψιν και τα υπόλοιπα δεδομένα όπως αυτά φαίνονται στο σχήμα, να υπολογίσετε:

α) Τα μήκη των τμημάτων ΟΓ, ΟΔ, όπου Ο είναι το σημείο τομής των ΑΓ, ΒΔ.

(Μονάδες 13)

β) Τα μέτρα των γωνιών Α, Β, Γ, Δ του τετραπλεύρου. (Μονάδες 12)



8 – 19833

ΘΕΜΑ 2

Το τετράπλευρο του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο με παράλληλες πλευρές τις ΑΒ, ΔΓ και ΑΔ, ΒΓ, το σημείο Ο είναι το κέντρο του, και ΑΔ = ΔΓ= 5. Να απαντήσετε στα ερωτήματα που ακολουθούν, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α) Να βρείτε το είδος του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και να υπολογίσετε την περίμετρό του.

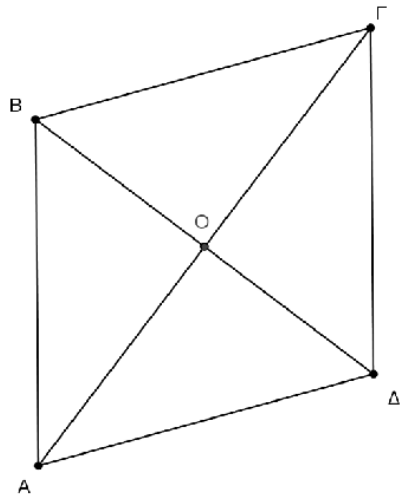
(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $Α\hat{Ο}Δ$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν είναι ΟΔ = 3 και ΑΓ = 8, να βρείτε τα μήκη των τμημάτων ΔΒ και ΟΓ.

(Μονάδες 10)



9 – 19832

ΘΕΜΑ 2

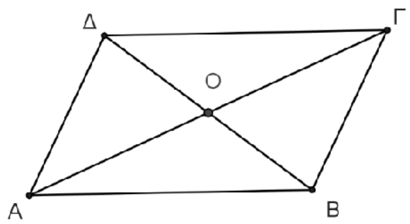
Το τετράπλευρο του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο με παράλληλες πλευρές τις ΑΒ, ΔΓ και ΑΔ, ΒΓ και διαγωνίους ΑΓ και ΔΒ, οι οποίες τέμνονται σε σημείο Ο. Αν επιπλέον είναι ΑΓ = 5, ΟΔ = 2,1 και ΑΒ = 4,2, να απαντήσετε στις ερωτήσεις που ακολουθούν, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΔΓ. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε

i. το μήκος της διαγωνίου ΔΒ,
ii. το μήκος του τμήματος ΟΓ.

(Μονάδες 20)



10 – 19824

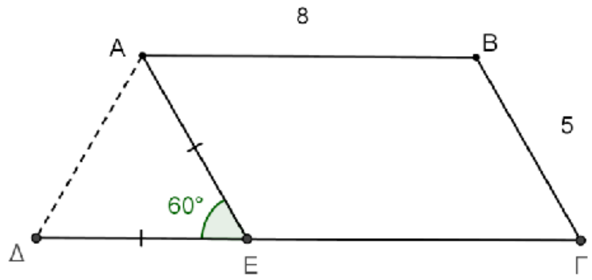
ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα που ακολουθεί, το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο με ΒΓ = 5 και ΑΒ = 8. Στην προέκταση της ΓΕ προς το Ε θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε ΑΕ = ΕΔ και $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Delta$ = 60^0.

α) Να δείξετε ότι:

i. ΑΕ = 5 και ΕΓ = 8. (Μονάδες 8)
ii. ΔΕ = ΑΔ =5. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο Π του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 8)



11 – 19819

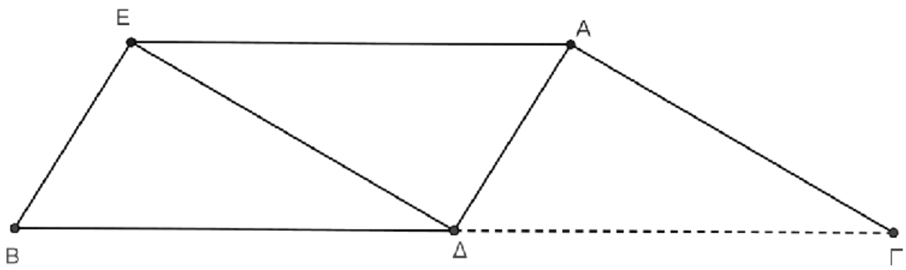
ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα που ακολουθεί, το τετράπλευρο ΒΕΑΔ είναι παραλληλόγραμμο. Η παράλληλη από το Α προς την ΕΔ (δηλαδή η ΑΓ), τέμνει την προέκταση της ΒΔ προς το Δ σε σημείο Γ.

α) Να εξηγήσετε γιατί το τμήμα ΕΑ είναι παράλληλο στο τμήμα ΔΓ. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΑΓ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

γ) Αν $Α\hat{Γ}Δ = 30^0$, να υπολογίσετε τη γωνία $Α\hat{Ε}Δ$. (Μονάδες 5)



12 – 18199

ΘΕΜΑ 2

Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\widehat{Α} = 25^o$ και $ΑΔ = 8$. Να υπολογίσετε:
α) Το μέτρο της γωνίας $\hat{Γ}$ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

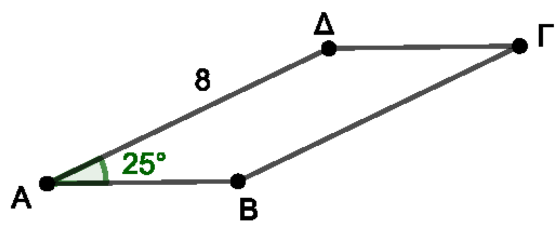
(Μονάδες 10)

β) Το μήκος της πλευράς ΒΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

(Μονάδες 07)

γ) Τα μέτρα των υπόλοιπων γωνιών του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

(Μονάδες 08)



13 – 14554

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΔ< ΑΒ, τη διχοτόμο της γωνίας του $\widehat{A}$ η οποία τέμνει την πλευρά του ΔΓ σε σημείο Ε και τους ισχυρισμούς:

Ισχυρισμός 1: «Το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία Α, Δ και Ε είναι ισοσκελές».

Ισχυρισμός 2: « Το τμήμα ΔΕ είναι ίσο με την πλευρά ΒΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ».

α) Να χαρακτηρίσετε κάθε έναν από τους παραπάνω ισχυρισμούς ως αληθή ή ψευδή, αιτιολογώντας την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

(Μονάδες 16)

β) Ποιο θα είναι το μέτρο των γωνιών του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ώστε το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία Α, Δ και Ε να είναι ισόπλευρο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

5.3 Ορθογώνιο

14 – 21394

ΘΕΜΑ 4

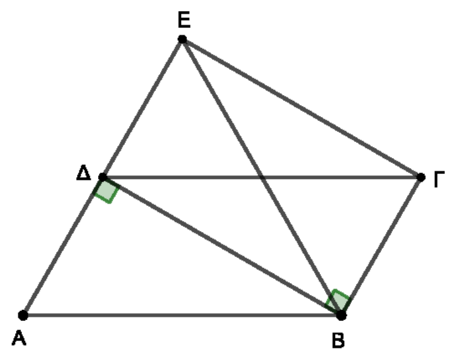
Στο τετράπλευρο $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ του παρακάτω σχήματος οι $\Delta\mathrm{A}$ και $\mathrm{B\Gamma}$ είναι κάθετες στην $\Delta\mathrm{B}$ και επίσης είναι $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{B\Gamma} = 3$.

α) Να αποδείξετε ότι το $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

β) Προεκτείνουμε την $\mathrm{A\Delta}$ κατά τμήμα $\Delta\mathrm{E} = 3$. Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο $\Delta\mathrm{B\Gamma E}$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

ii. Το τρίγωνο BAE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)



5.4 Ρόμβος

15 – 14505

ΘΕΜΑ 2

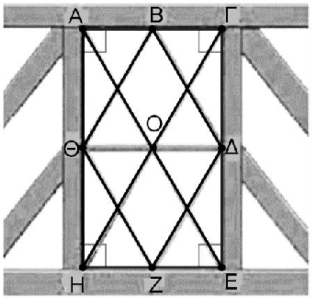
Στην εικόνα που ακολουθεί, υπάρχει το σχέδιο ενός παραθύρου με ΒΔ = ΔΖ = ΖΘ = ΘΒ και τις γωνίες $\mathrm{A\hat{\Gamma}E}$, $\mathrm{\Gamma\hat{E}H}$, $\mathrm{E\hat{H}A}$, $\mathrm{H\hat{A}\Gamma}$ ορθές.

α) Τι είδους τετράπλευρα είναι τα ΒΔΖΘ και ΑΓΕΗ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Ένας μαθητής λέει «τα τμήματα ΑΕ και ΓΗ είναι ίσα μεταξύ τους» και μια μαθήτρια, όταν το άκουσε, συμπλήρωσε «και τα ΑΟ, ΟΕ, ΓΟ και ΟΗ είναι ίσα μεταξύ τους». Συμφωνείτε με τους ισχυρισμούς που διατύπωσαν ο μαθητής και η μαθήτρια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)



16 – 20087

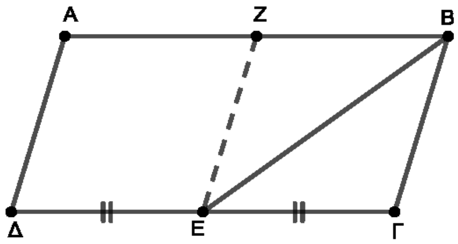
ΘΕΜΑ 2

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ=2ΒΓ και Ε είναι το μέσο της πλευράς ΓΔ.

α) Να αποδείξετε ότι το τμήμα ΒΕ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{B}$ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

(Μονάδες 12)

β) Αν το σημείο Ζ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ, τι είδους τετράπλευρο είναι το ΖΒΓΕ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)



17 – 20082

ΘΕΜΑ 2

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ η πλευρά ΑΒ είναι διπλάσια της πλευράς του ΒΓ. Αν Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα,

α) Να αποδείξετε ότι τα τετράπλευρα ΑΕΖΔ και ΒΕΖΓ είναι ρόμβοι. (Μονάδες 16)

β) Τι είδους τετράπλευρο είναι το ΑΕΓΖ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

18 – 18202

ΘΕΜΑ 2

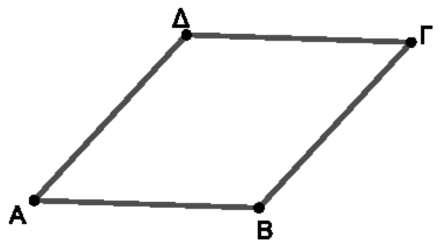
Ο ρόμβος ΑΒΓΔ έχει περίμετρο 48.

α) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του ρόμβου. (Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε τις διαγωνίους του ρόμβου. (Μονάδες 06)

γ) Αν Κ είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του ρόμβου και το ευθύγραμμο τμήμα ΒΚ έχει μήκος 5, να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου ΒΔ του ρόμβου.

(Μονάδες 09)



19 – 18201

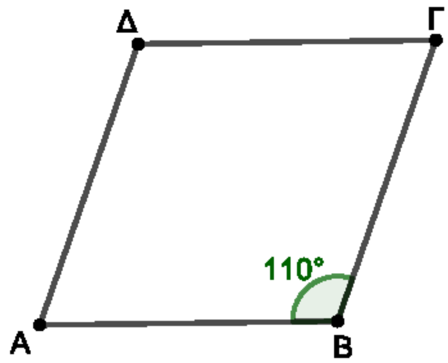
ΘΕΜΑ 2

Στον ρόμβο ΑΒΓΔ είναι $\widehat{\mathrm{B}} = 110^{o}$

α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\widehat{\Delta}$ του ρόμβου. (Μονάδες 09)

β) Να σχεδιάσετε τη διαγώνιο του ρόμβου από την κορυφή Δ. (Μονάδες 06)

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Delta$. (Μονάδες 10)



20 – 18200

ΘΕΜΑ 2

Στον ρόμβο ΑΒΓΔ είναι $\widehat{\mathrm{A}} = 45^{o}$ και $\mathrm{B}\Gamma = 6$.

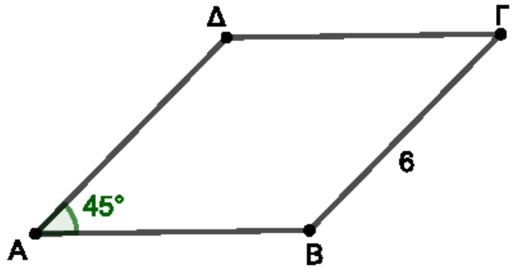
α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\widehat{\Gamma}$ του ρόμβου. (Μονάδες 09)

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των υπόλοιπων πλευρών του ρόμβου.

(Μονάδες 09)

γ) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών $\widehat{\mathrm{B}}$ και $\widehat{\Delta}$ είναι ίσο με τρεις ορθές.

(Μονάδες 07)



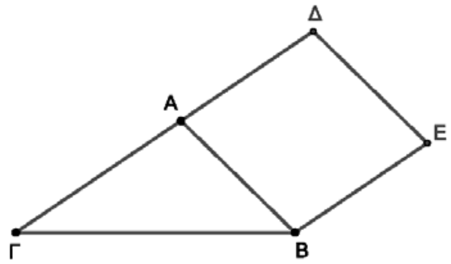
21 – 21404

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB}\Gamma$. Προεκτείνουμε την πλευρά $\Gamma\mathrm{A}$ κατά τμήμα $\mathrm{A}\Delta = \mathrm{AB}$. Από τα B και Δ φέρνουμε παράλληλες, αντίστοιχα προς τις $\mathrm{A}\Delta$ και AB, οι οποίες τέμνονται στο E.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\mathrm{ABE}\Delta$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 10) β) Έστω ότι $AB = 4$, $A\Gamma = 5$ και $B\Gamma = 7$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ και ο ρόμβος $ABE\Delta$ έχουν ίσες περιμέτρους. (Μονάδες 10)

γ) Έστω ότι $AB = \gamma$, $A\Gamma = \beta$, $B\Gamma = \alpha$ και ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ και ο ρόμβος $ABE\Delta$ έχουν ίσες περιμέτρους. Να αποδείξετε ότι $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{3}$. (Μονάδες 5)



22 – 20088

ΘΕΜΑ 4

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ η πλευρά ΑΒ είναι διπλάσια της πλευράς του ΒΓ. Αν Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα,

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τετράπλευρα ΑΕΖΔ και ΒΕΖΓ είναι ρόμβοι. (Μονάδες 12)

ii. Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 07)

β) Πόσων μοιρών πρέπει να είναι η γωνία $\widehat{B}$ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, ώστε το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι ρόμβος; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 06)

23 – 19839

ΘΕΜΑ 4

Τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ του σχήματος είναι ίσα και ισοσκελή με ΑΒ = ΑΚ και ΓΛ = ΓΔ αντίστοιχα. Τα σημεία Λ και Κ είναι τα μέσα των ΒΚ και ΔΛ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

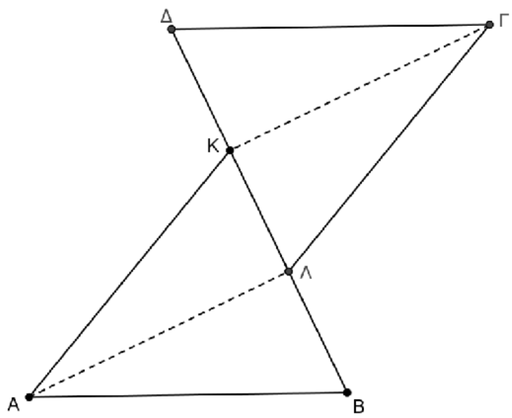
i. ΑΚ = ΓΛ. (Μονάδες 8)

ii. ΑΚ = ΓΚ. (Μονάδες 4)

iii. Το τετράπλευρο ΑΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Θα μπορούσε το παραλληλόγραμμο ΑΚΓΛ να είναι ρόμβος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)



5.5 Τετράγωνο

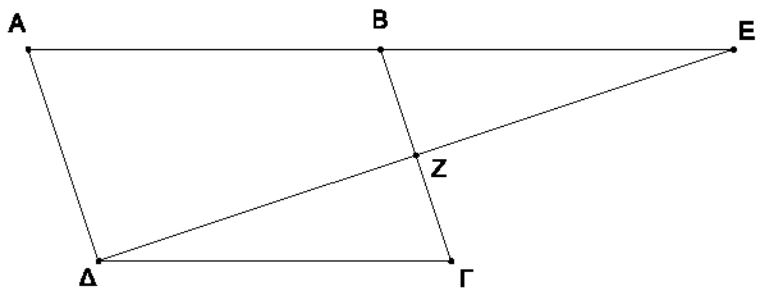
24 – 14560

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Ε στην προέκταση της πλευράς ΑΒ προς το Β, ώστε ΑΒ = ΒΕ. Έστω Ζ το σημείο τομής των ΒΓ, ΔΕ.

α) Να αποδείξετε ότι το Ζ είναι το μέσο του ΔΕ. (Μονάδες 13)

β) Αν ΒΓ = 10, να βρείτε το μήκος του ΒΖ. (Μονάδες 12)



25 – 14502

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 2ΑΔ και τα μέσα Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο, (Μονάδες 12)

β) το τετράπλευρο ΑΕΖΔ είναι τετράγωνο. (Μονάδες 13)

26 – 19831

ΘΕΜΑ 4

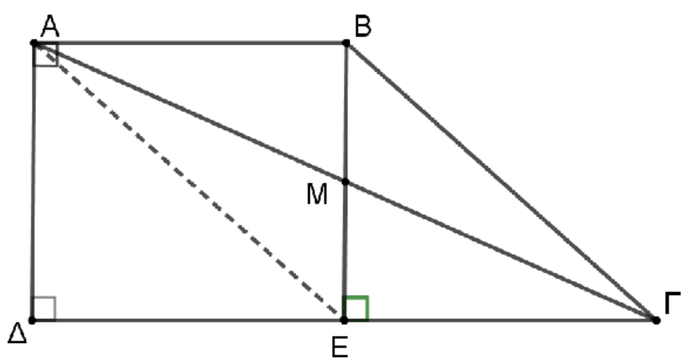
Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΔΓ , $\hat{A}=\hat{\Delta}=90^o$, ΓΔ=2ΑΒ και $B\hat{\Gamma}\Delta=45^o$. Έστω ΒΕ κάθετη στη ΓΔ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι :

α) Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

β)

i. Το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

ii. Το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι τετράγωνο. (Μονάδες 8)



27 – 22563

ΘΕΜΑ 4

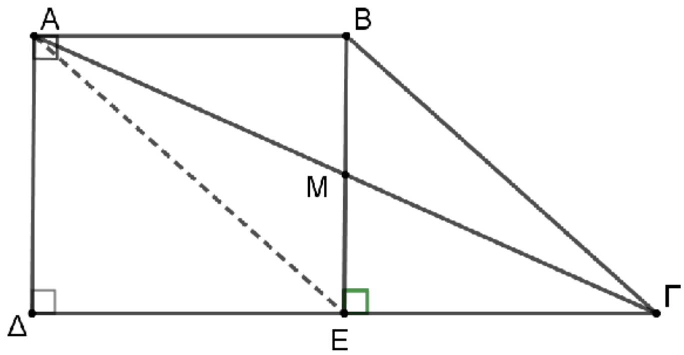
Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΔΓ , $\hat{A}=\hat{\Delta}=90^o$, ΓΔ=2ΑΒ και $B\hat{\Gamma}\Delta=45^o$. Έστω ΒΕ κάθετη στη ΓΔ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι :

α) Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

β)

i. Το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

ii. Το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι τετράγωνο. (Μονάδες 8)



28 – 21843

ΘΕΜΑ 4

Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα.

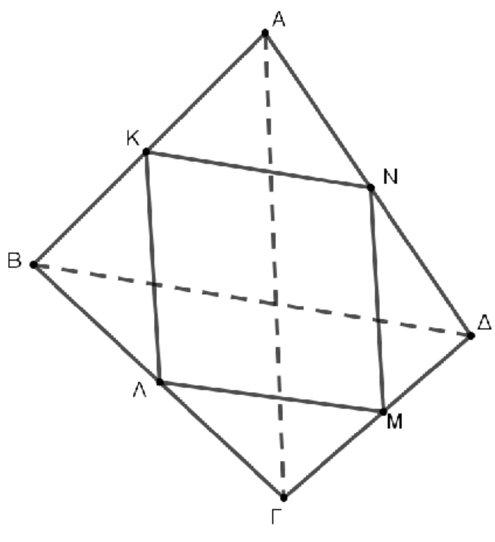
α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος Π του τετραπλεύρου ΚΛΜΝ είναι Π=ΑΓ+ΒΔ

(Μονάδες 8)

β)

i. Αν το ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι του ΑΒΓΔ είναι κάθετες μεταξύ τους. (Μονάδες 8)

ii. Ποια επιπλέον ιδιότητα πρέπει να έχουν οι διαγώνιοι του ΑΒΓΔ ώστε το ΚΛΜΝ να είναι τετράγωνο; (Μονάδες 9)



5.6 Εφαρμογές στα τρίγωνα

29 – 20843

ΘΕΜΑ 2

Τρίγωνο ΑΒΓ έχει περίμετρο 28. Τα σημεία Κ,Λ και Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΚΛΓΜ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΚΛΜ. (Μονάδες 12)

30 – 20840

ΘΕΜΑ 2

Οι πλευρές ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ έχουν μήκη 6, 8 και 12 αντίστοιχα. Τα σημεία Κ, Λ και Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ με τη σειρά που δίνονται.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΚΛΓΜ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του παραλληλογράμμου ΚΛΓΜ. (Μονάδες 12)

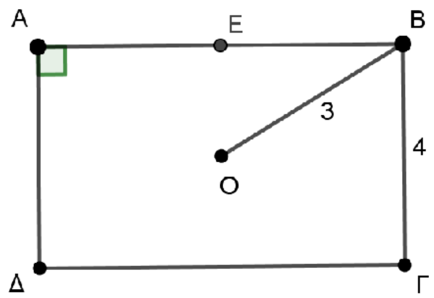
31 – 20951

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το ορθογώνιο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος, στο οποίο το Ο είναι το Κέντρο του και το τμήμα ΟΒ = 3. Αν Ε είναι το μέσο της ΑΒ και η ΒΓ = 4 τότε:

α) να χαράξετε τις διαγώνιες ΑΓ, ΒΔ του ορθογωνίου και να υπολογίσετε τα μήκη τους. (Μονάδες 13)

β) να υπολογίσετε το μήκος του ΟΕ. (Μονάδες 12)



32 – 20948

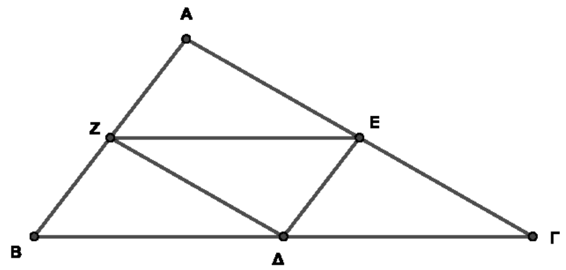
ΘΕΜΑ 2

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος τα Δ, Ε, Ζ είναι μέσα των πλευρών του. Αν ΒΓ = 10, ΔΖ = 4 και ΔΕ = 2,5:

α) να αποδείξετε ότι ΖΕ // ΒΓ. (Μονάδες 8)

β) να υπολογίσετε το μήκος της ΖΕ. (Μονάδες 7)

γ) να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών ΑΒ, ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 10)



33 – 21402

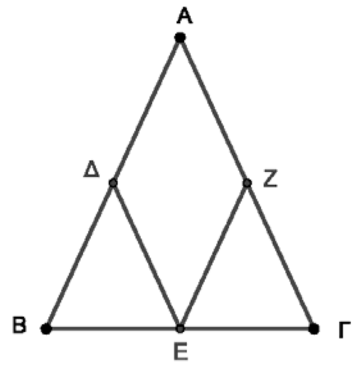
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ$ και έστω $Δ, Ε$ και $Ζ$ τα μέσα των πλευρών $ΑΒ, ΒΓ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΑΔΕΖ$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

β) Αν $\widehat{Β} = 75°$, να υπολογίσετε τις γωνίες του ρόμβου $ΑΔΕΖ$. (Μονάδες 10)

γ) Ποιο θα πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας $\widehat{Β}$ ώστε το τετράπλευρο $ΑΔΕΖ$ να είναι τετράγωνο; Τι τρίγωνο είναι τότε το $ΑΒΓ$; (Μονάδες 5)



34 – 20848

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Κ,Λ και Μ των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΑΚΜΛ είναι παραλληλόγραμμο.

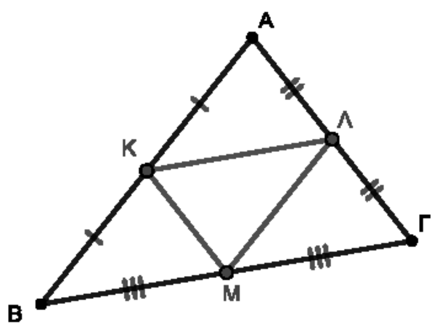
(Μονάδες 9)

β) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ:

i. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΚΜΛ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

ii. Ποιό πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας $\widehat{Α}$ του τριγώνου ΑΒΓ ώστε το τετράπλευρο ΑΚΜΛ να είναι τετράγωνο; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)



35 – 20846

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Κ,Λ και Μ των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

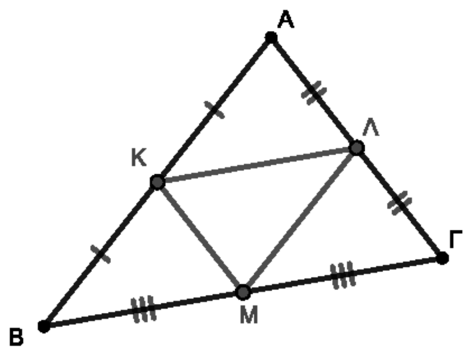
α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΚΛΜΒ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 9)

β) Να γράψετε όλα τα παραλληλόγραμμα που σχηματίζονται με κορυφές τέσσερα από τα σημεία Α, Β, Γ, Κ, Λ και Μ. (Μονάδες 9)

γ) Αν επιπλέον δίνεται ότι το τετράπλευρο ΑΚΜΛ είναι ορθογώνιο να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις γωνίες του. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)



36 – 20844

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Κ,Λ και Μ των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

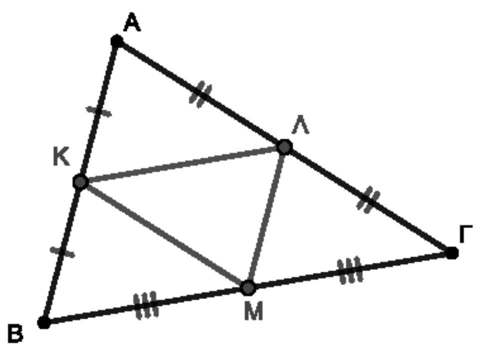
α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΚΛΓΜ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 9)

β) Να γράψετε όλα τα παραλληλόγραμμα που σχηματίζονται με κορυφές 4 από τα σημεία Α, Β, Γ, Κ, Λ και Μ. (Μονάδες 9)

γ) Αν επιπλέον δίνεται ότι το τετράπλευρο ΑΚΜΛ είναι ρόμβος να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις πλευρές του. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)



37 – 19840

ΘΕΜΑ 4

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος που ακολουθεί τα Κ, Λ και Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση, αιτιολογώντας την επιλογή σας:

i. Αν είναι ΚΛ = 6, τότε το ΒΓ είναι ίσο με:

Α: 6 Β: 12 Γ: 3 Δ: 16 (Μονάδες 8)

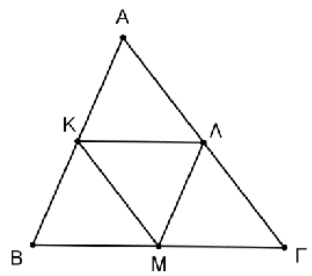
ii. Αν είναι ΚΛ + ΛΜ + ΚΜ= 12, τότε το άθροισμα ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ είναι ίσο με:

Α: 12 Β: 6 Γ: 24 Δ: 16 (Μονάδες 9)

β) Να χαρακτηρίσετε την παρακάτω πρόταση ως αληθή ή ψευδή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Πρόταση : «Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, τότε το τετράπλευρο ΚΛΜΒ είναι ρόμβος».

(Μονάδες 8)



38 – 19275

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Τα σημεία Ε, Ζ και Η είναι τα μέσα των ΒΔ, ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να δικαιολογήστε γιατί:

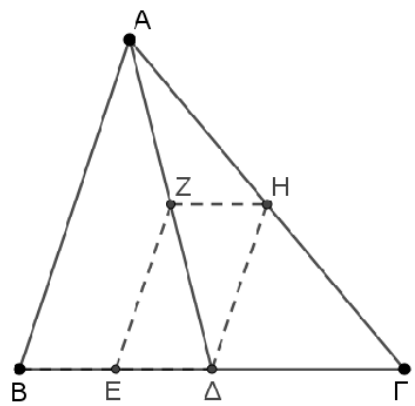
i. $ΔΗ = // \frac{AB}{2}$. (Μονάδες 07)

ii. $ΖΕ = // \frac{AB}{2}$. (Μονάδες 07)

β) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΗΔΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 04)

γ) Ποια πρέπει να είναι η σχέση των ΑΒ και ΒΓ, ώστε το ΖΗΔΕ να είναι ρόμβος;

(Μονάδες 07)



5.7 Βαρύκεντρο τριγώνου

39 – 19514

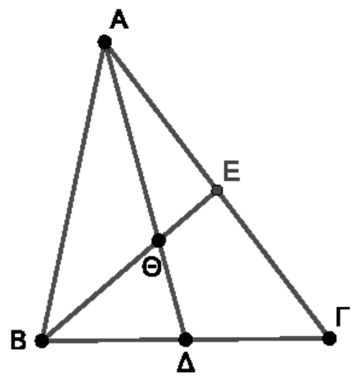
ΘΕΜΑ 2

Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ και το Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΓ. Δίνονται τα μήκη $ΑΔ = 12$ και $ΘΕ = 3$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΘΔ = 4$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΒΕ και ΒΘ. (Μονάδες 08)

γ) Να σχεδιάσετε τη διάμεσο ΓΖ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 07)



40 – 21844

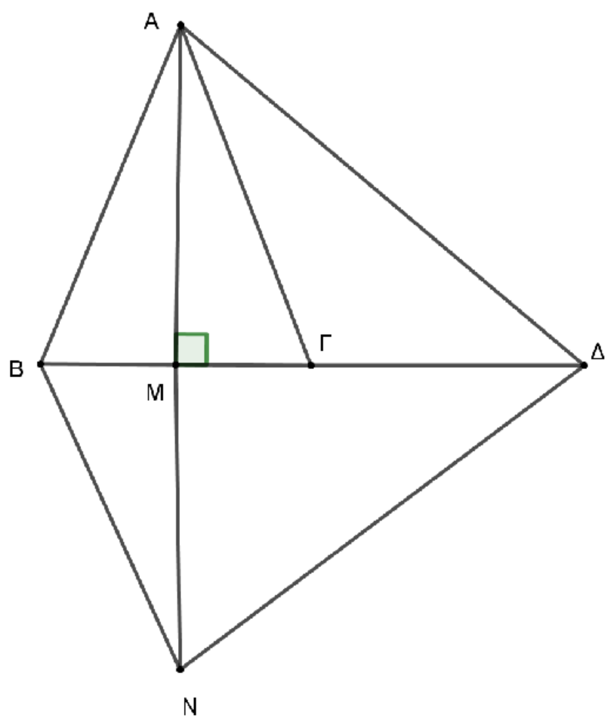
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται οξυγώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και το ύψος του ΑΜ. Προεκτείνουμε το ΑΜ κατά τμήμα ΜΝ=ΑΜ και τη ΒΓ κατά τμήμα ΓΔ=ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΝΓ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)

β) Το τρίγωνο ΑΔΝ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

γ) Η προέκταση της ΑΓ τέμνει τη ΔΝ στο μέσον της. (Μονάδες 7)



5.9 Μια ιδιότητα του ορθογωνίου τριγώνου

41 – 14552

ΘΕΜΑ 2

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο με ΑΔ < ΑΒ και $\widehat{A} = 60^0$. Η ΑΕ είναι η διχοτόμος της γωνίας του $\widehat{A}$ η οποία τέμνει την πλευρά ΔΓ σε σημείο Ε και η ΕΖ είναι η κάθετη από το Ε στην πλευρά ΑΒ.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε κάθε καθένα από τα ακόλουθα δύο ερωτήματα, αιτιολογώντας την επιλογή σας.

α) Αν είναι ΑΔ = 6, τότε το ΔΕ είναι ίσο με:

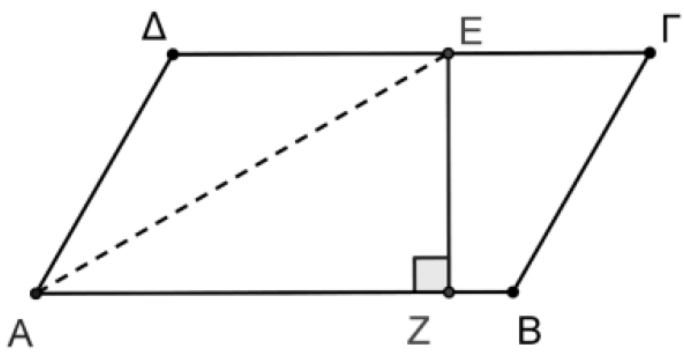
Α: 6 Β: 12 Γ: 3 Δ: 16

(Μονάδες 15)

β) Αν η κάθετη που άγεται από το Ε προς την ευθεία ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ σε σημείο Ζ, τότε:

Α: ΑΕ = ΕΖ Β: ΑΕ = $\frac{1}{2}$ ΕΖ Γ: ΑΕ = 2ΕΖ Δ: ΑΕ = 3ΕΖ

(Μονάδες 10)



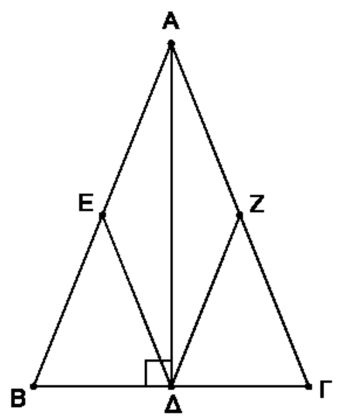
42 – 22095

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ = 12$ και το ύψος του ΑΔ. Έστω Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $ΔΕ = 6$ και $ΔΖ = 6$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΕΔΖ είναι ρόμβος. (Μονάδες 13)



43 – 21012

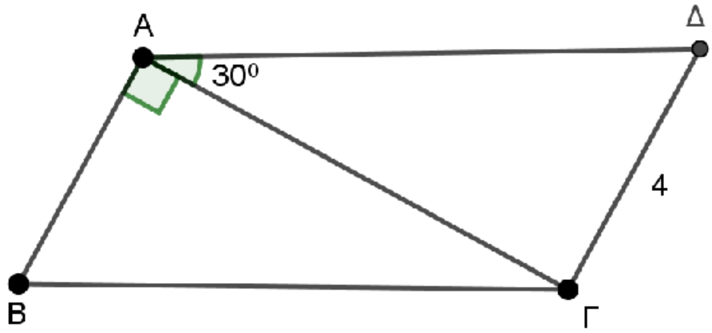
ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο στο οποίο η διαγώνιος ΑΓ είναι κάθετη στην πλευρά του ΑΒ. Επίσης η πλευρά του ΓΔ = 4 και η γωνία ΓΑΔ ισούται με 30^0.

α) Να υπολογίσετε πόσες μοίρες είναι η γωνία ΒΓΔ. (Μονάδες 10)

β) Πόσο είναι το μήκος της πλευράς ΑΒ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 8)



44 – 20945

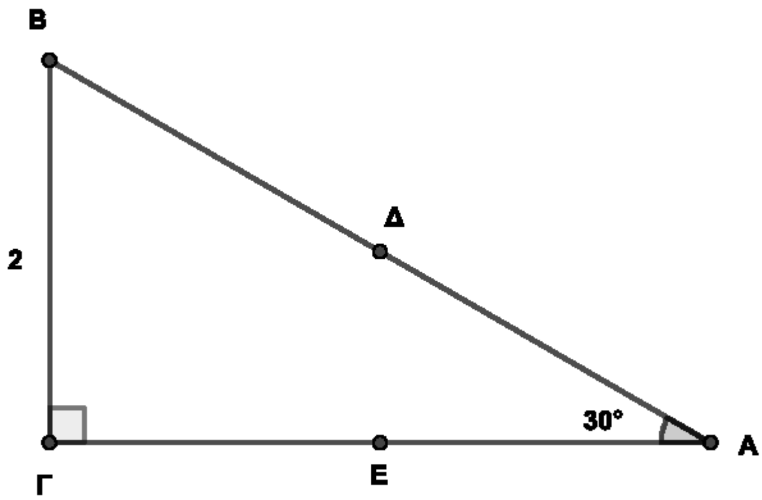
ΘΕΜΑ 2

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος δίνονται $\hat{A} = 30^o$, ΒΓ=2 και τα σημεία Δ, Ε μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

α) το μήκος του ΔΕ. (Μονάδες 9)

β) το μήκος της πλευράς ΑΒ. (Μονάδες 9)

γ) το μήκος του ΓΔ. (Μονάδες 7)



45 – 18304

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του σχήματος με $ΑΔ = 2$ και $\widehat{Α} = 60^{\circ}$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{Β}$, $\widehat{Γ}$ και $Α\widehat{Δ}Γ$.

(Μονάδες 12)

β) Αν ΔΕ είναι ύψος του παραλληλογράμμου, τότε:

i. Να υπολογίσετε τη γωνία $Α\widehat{Δ}Ε$.

(Μονάδες 8)

ii. Να αποδείξετε ότι $ΑΕ = 1$.

(Μονάδες 5)

46 – 21392

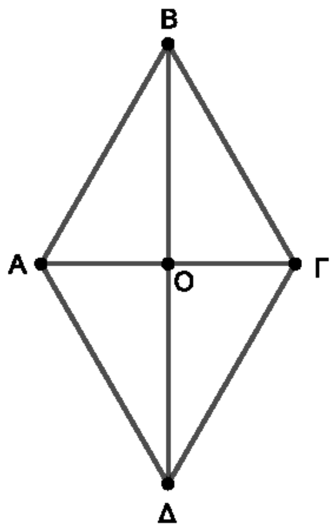
ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το $ΑΒΓΔ$ είναι ρόμβος με κέντρο O, $AB = 4$ και $OA = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $A\hat{B}O = 30^{\circ}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τρεις γωνίες στο παρακάτω σχήμα, εκτός της $A\hat{B}O$, που έχουν μέτρο 30°. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα στο παρακάτω σχήμα, εκτός του AB, που έχουν μήκος 4. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)



47 – 21003

ΘΕΜΑ 4

Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta M = \frac{B\Gamma}{2}$.

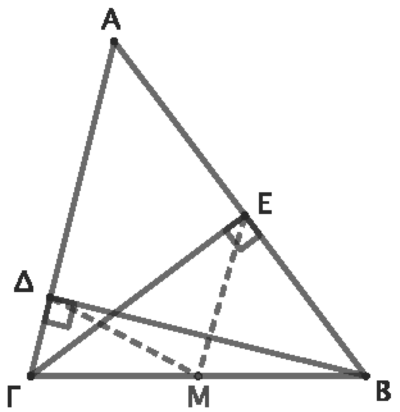
(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta M = EM$.

(Μονάδες 10)

γ) Να εξετάσετε αν τα σημεία Δ, Ε, Β και Γ ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

(Μονάδες 05)



48 – 20558

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^o$). Έστω Κ, Λ, Μ τα μέσα των πλευρών ΑΓ, ΑΒ, ΒΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

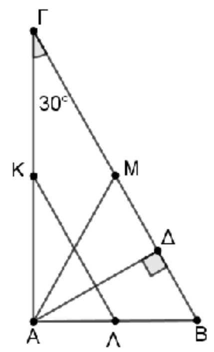
i. ΚΛ = ΑΜ. (Μονάδες 09)

ii. Το ΑΚΜΛ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 09)

β) Έστω $\widehat{\Gamma} = 30^o$ και ΑΔ ύψος του τριγώνου. Προεκτείνουμε το ΑΔ κατά ίσο τμήμα ΔΖ.

Τι είδους τετράπλευρο είναι το ΑΜΖΒ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 07)



49 – 20557

ΘΕΜΑ 4

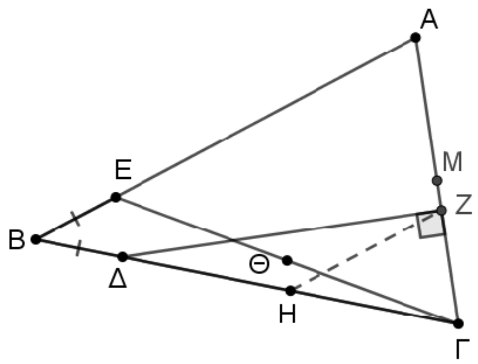
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ και Ε στις πλευρές ΒΓ και ΒΑ αντίστοιχα, ώστε ΒΔ = ΒΕ. Φέρνουμε την ΔΖ κάθετη στην ΑΓ. Θεωρούμε τα μέσα Η, Θ, Μ των ΔΓ, ΕΓ, ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $ZH = \frac{\Delta\Gamma}{2}$. (Μονάδες 09)

β) $M\Theta = \frac{AE}{2}$. (Μονάδες 09)

γ) Ποιο πρέπει να είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις πλευρές του, ώστε ΖΗ = ΜΘ;

(Μονάδες 07)



50 – 19842

ΘΕΜΑ 4

Στο σχήμα που ακολουθεί, το τετράπλευρο ΕΑΓΔ είναι παραλληλόγραμμο με ΕΑ = 2 ΑΔ. Η παράλληλη από το Ε προς την ΑΔ τέμνει την προέκταση της ΓΔ προς το Δ σε σημείο Β.

α) Να αποδείξετε ότι:

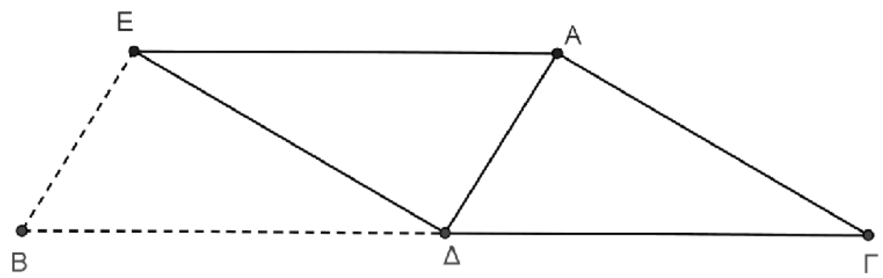
i. Το τμήμα ΕΑ είναι παράλληλο στο τμήμα ΒΔ. (Μονάδες 4)

ii. Το τετράπλευρο ΕΑΔΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)

iii. Το σημείο Δ είναι το μέσο του ΒΓ και ότι ΒΓ = 4 ΑΔ. (Μονάδες 10)

β) Αν το παραλληλόγραμμο ΕΑΓΔ είναι ρόμβος, να βρείτε το είδος του τριγώνου ΒΕΓ ως προς τις γωνίες του.

(Μονάδες 5)



5.10 Τραπέζιο

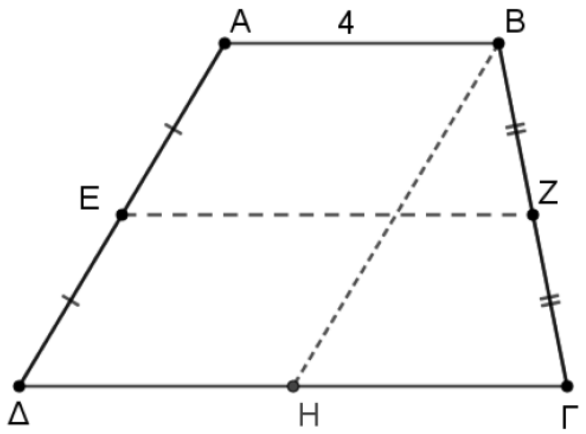
51 – 18158

ΘΕΜΑ 2

Στο τραπέζιο του παρακάτω σχήματος ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ), έχουμε ΑΒ = 4 και ΔΓ = 8.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου του ΕΖ. (Μονάδες 12)

β) Από το Β φέρουμε ΒΗ παράλληλη στην ΑΔ. Να αποδείξετε ότι ΓΗ = ΑΒ. (Μονάδες 13)



52 – 21846

ΘΕΜΑ 4

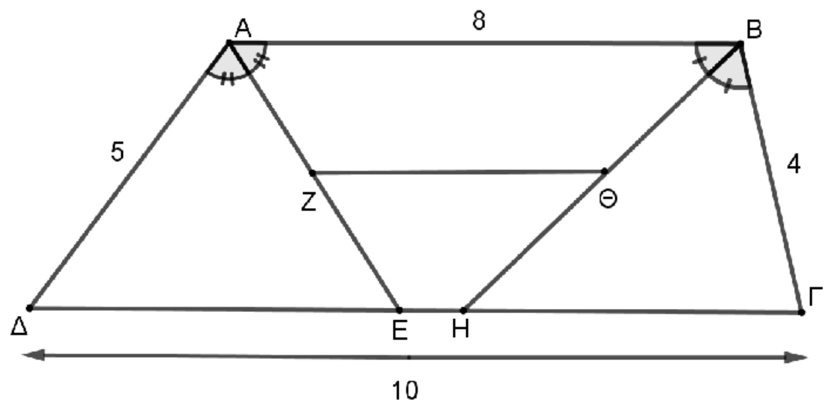
Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ και ΑΒ=8, ΒΓ=4, ΓΔ=10 και ΑΔ=5. Οι διχοτόμοι των γωνιών Α και Β τέμνουν την ΓΔ στα σημεία Ε και Η αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΗ είναι ισοσκελή με βάσεις τις ΑΕ και ΒΗ αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το ΕΗ. (Μονάδες 8)

γ) Αν Ζ και Θ είναι τα μέσα των ΑΕ και ΒΗ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΖΘ= $\frac{9}{2}$.

(Μονάδες 9)



53 – 21399

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με βάσεις $ΑΒ = 4$ και $ΓΔ = 8$, ίσες πλευρές $ΒΓ = ΑΔ = 4$ και τα ύψη του $ΑΕ$ και $ΒΖ$.

α) Να αποδείξετε ότι:

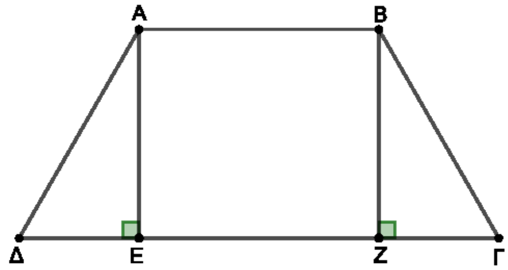
i. $ΕΖ = 4$. (Μονάδες 5)

ii. $ΔΕ = ΓΖ = 2$. (Μονάδες 6)

iii. $Δ\widehat{Α}Ε = 30°$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τα μέτρα των προσκείμενων γωνιών σε κάθε βάση του τραπεζίου.

(Μονάδες 8)



54 – 14581

ΘΕΜΑ 4

Στην εικόνα που ακολουθεί παρουσιάζεται το σχέδιο μιας κατασκευής τριών μερών με συρτάρια. Τόσο η κατασκευή όσο και τα επιμέρους τμήματά της είναι σχήματος τραπεζίου. Συγκεκριμένα, το τετράπλευρο ΑΒΕΖ του σχεδίου της κατασκευής είναι τραπέζιο με βάσεις ΑΒ και ΖΕ, το τετράπλευρο ΑΒΓΘ είναι τραπέζιο με βάσεις ΑΒ και ΘΓ, το τετράπλευρο ΘΓΔΗ είναι τραπέζιο με βάσεις ΘΓ και ΗΔ καθώς και το τετράπλευρο ΗΔΕΖ είναι τραπέζιο με βάσεις ΗΔ και ΖΕ. Επιπλέον, τα Θ, Η και Γ, Δ είναι σημεία των μη παράλληλων πλευρών ΑΖ, ΒΕ αντίστοιχα του τραπεζίου ΑΒΕΖ.

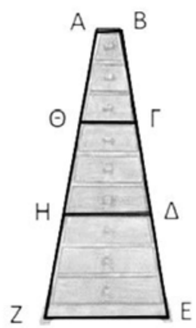
α) Να εξηγήσετε γιατί οι βάσεις ΑΒ, ΘΓ, ΗΔ και ΖΕ των επιμέρους τραπεζίων είναι παράλληλες.

(Μονάδες 9)

β) Έστω ότι τα σημεία Θ και Γ είναι τα μέσα των ΑΗ και ΒΔ αντίστοιχα, ενώ τα σημεία Η και Δ είναι τα μέσα των ΘΖ και ΓΕ αντίστοιχα. Αν είναι ΑΒ = 13,5 cm και ΗΔ = 50,5 cm, να βρείτε τα μήκη των τμημάτων:

i. ΘΓ (Μονάδες 8)

ii. ΖΕ (Μονάδες 8)



5.11 Ισοσκελές Τραπέζιο

55 – 35259

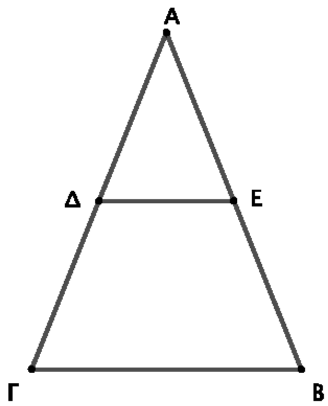
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Από το μέσο Δ της πλευράς ΑΓ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε.

α) Να αιτιολογήσετε ότι ΓΔ = ΒΕ. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΓΒΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 13)



56 – 14517

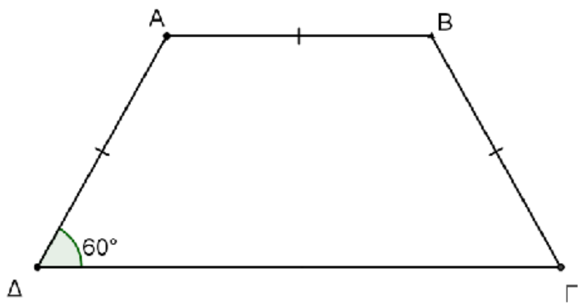
ΘΕΜΑ 2

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις ΑΒ και ΔΓ με ΔΓ = 2ΑΒ και ίσες πλευρές ΑΔ και ΒΓ. Αν είναι ΑΒ = ΑΔ = ΒΓ = 12 και $\widehat{\Delta} = 60^0$, να υπολογίσετε:

α) τις γωνίες του τραπεζίου. (Μονάδες 15)

β) την περίμετρο του τραπεζίου. (Μονάδες 10)

Σε κάθε περίπτωση να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



57 – 19834

ΘΕΜΑ 2

Το τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος είναι ισοσκελές με ΓΑ = ΓΒ = 8, το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς του ΑΓ και η ευθεία ΔΕ είναι παράλληλη στην πλευρά του ΑΒ, όπου ΑΒ = 6.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευράς ΓΒ του τριγώνου ΑΒΓ.

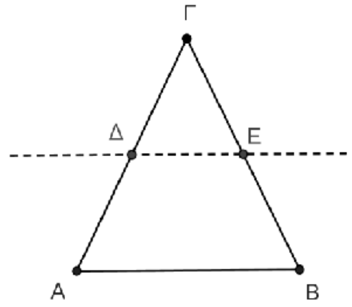
(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τα μήκη των τμημάτων ΔΕ, ΔΑ και ΕΒ, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο και να υπολογίσετε την περίμετρό του.

(Μονάδες 10)



58 – 19826

ΘΕΜΑ 2

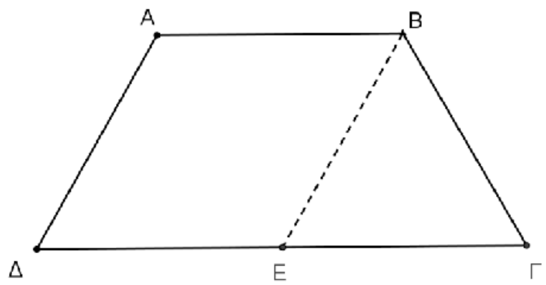
Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις ΑΒ και ΔΓ, ΑΔ = ΒΓ και η ΒΕ είναι παράλληλη στην ΑΔ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

β) Αν είναι ΑΒ = ΑΔ = 12 και ΔΓ = 2ΑΒ,

i. να υπολογίσετε την περίμετρο του τετραπλεύρου ΑΒΕΔ. (Μονάδες 9)

ii. να δείξετε ότι το σημείο Ε είναι το μέσο του τμήματος ΔΓ. (Μονάδες 7)



59 – 19821

ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα που ακολουθεί, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις τις πλευρές ΑΒ, ΔΓ και ίσες πλευρές τις ΑΔ και ΒΓ. Η παράλληλη από το Α στην ΒΓ, δηλαδή η ΑΕ, τέμνει την πλευρά ΔΓ σε σημείο Ε.

α) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας συμπληρωμένη την ακόλουθη πρόταση: «Στο ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ του σχήματος παράλληλες μεταξύ τους είναι η πλευρά ……… με την πλευρά ………, οι προκείμενες γωνίες στη βάση του ΑΒ είναι η γωνία ……. και η γωνία ……. και οι προσκείμενες γωνίες στη βάση του ΔΓ είναι η γωνία……… και η γωνία ………».

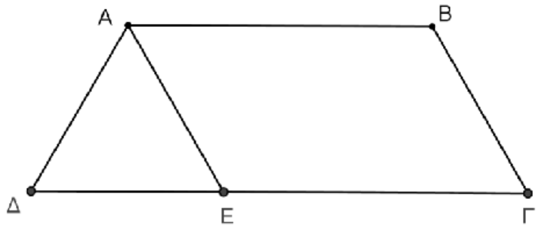
(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 8)

γ) Αν είναι ΒΓ =5, να δείξετε ότι ΑΔ = ΑΕ= 5.

(Μονάδες 8)



60 – 35394

ΘΕΜΑ 4

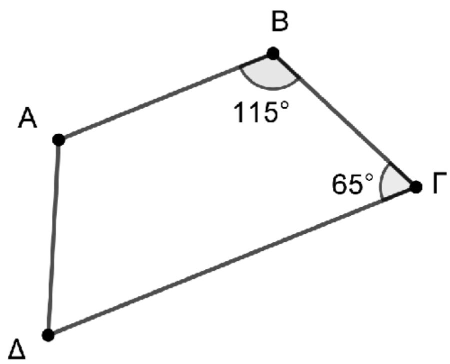
Το τετράπλευρο ΑΒΔΓ του παρακάτω σχήματος έχει γωνίες $\widehat{\mathrm{B}} = 115°$ και $\widehat{\Gamma} = 65°$. Αν οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές, τότε να αποδείξετε ότι:

α)

i. $\widehat{\mathrm{A}} = 115°$ και $\widehat{\Delta} = 65°$, (Μονάδες 9)

ii. το $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ είναι τραπέζιο με βάσεις τις πλευρές του ΑΒ και ΔΓ . (Μονάδες 8)

β) Το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)



61 – 16767

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ του σχήματος με ΑΔ//ΒΓ και ΒΓ > ΔΓ.

Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε σημείο Ε, τέτοιο ώστε ΓΕ = ΓΔ.

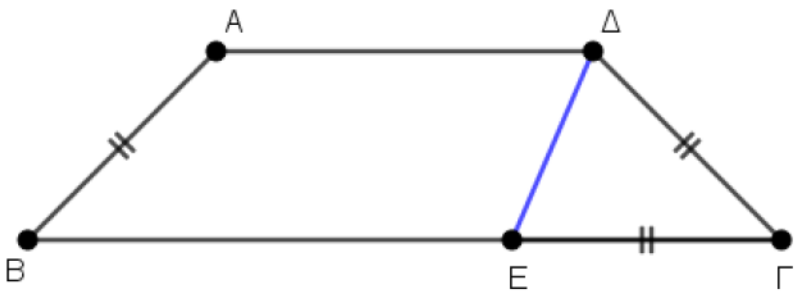
α) Να αποδείξετε ότι:

i. οι γωνίες ΑΔ̂Ε και ΓΕ̂Δ είναι ίσες. (Μονάδες 09)

ii. η ΔΕ είναι διχοτόμος της ΑΔ̂Γ. (Μονάδες 10)

β) Πόσες μοίρες πρέπει να είναι η γωνία $\widehat{\mathrm{A}}$ ώστε το τρίγωνο ΔΕΓ να είναι ισόπλευρο;

(Μονάδες 06)



7.6 Διαίρεση τμημάτων εσωτερικά και εξωτερικά ως προς δοσμένο λόγο

62 – 22115

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τμήμα ΑΒ και σημείο Γ το οποίο το διαιρεί εσωτερικά σε δυο τμήματα ΑΓ και ΓΒ σε λόγο $\frac{ΑΓ}{ΓΒ} = \frac{1}{3}$.

α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθένα από το ακόλουθα δύο ερωτήματα, αιτιολογώντας την επιλογή σας.

i. Το τμήμα ΓΒ είναι

Α: ίσο με το τμήμα ΑΓ.

Β: διπλάσιο από το τμήμα ΑΓ.

Γ: τριπλάσιο από το τμήμα ΑΓ.

ii. Το σημείο Γ

Α: είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ.

Β: βρίσκεται πιο κοντά στο άκρο Α του τμήματος ΑΒ.

Γ: βρίσκεται πιο κοντά στο άκρο Β του τμήματος ΑΒ.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι το τμήμα ΑΒ είναι τετραπλάσιο του τμήματος ΑΓ. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{ΓΒ}{ΑΒ}$. (Μονάδες 7)

63 – 22113

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα, το σημείο Γ είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος ΑΒ.

Αν είναι ΑΒ = 16κ και ΓΒ = 4κ, όπου κ θετικός αριθμός, τότε να υπολογίσετε:

α) το λόγο $\frac{ΓΒ}{ΑΒ}$, (Μονάδες 8)

β) το τμήμα ΑΓ συναρτήσει του κ και το λόγο του τμήματος ΑΓ προς το τμήμα ΑΒ,

(Μονάδες 10)

γ) το λόγο λ στον οποίο το σημείο Γ διαιρεί εσωτερικά το τμήμα ΑΒ.

(Μονάδες 7)

64 – 22112

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα, το σημείο Γ είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος ΑΒ. Έστω ότι είναι ΑΒ = 12κ και ΑΓ = 4κ, όπου κ θετικός αριθμός.

α) Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{ΑΓ}{ΑΒ}$. (Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε

i. το τμήμα ΓΒ συναρτήσει του κ, (Μονάδες 5)

ii. το λόγο του τμήματος ΓΒ προς το τμήμα ΑΒ. (Μονάδες 5) γ) Να αποδείξετε ότι το τμήμα ΓΒ είναι διπλάσιο του τμήματος ΑΓ και να βρείτε το λόγο λ στον οποίο το σημείο Γ διαιρεί εσωτερικά το τμήμα ΑΒ. (Μονάδες 10)

65 – 19516

ΘΕΜΑ 2

Το Ε είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $AB = 12$ και ισχύει ότι $A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta E$.

α) Ποια είναι τα μήκη των τμημάτων ΑΕ, ΕΒ, ΑΓ, ΓΔ και ΔΕ; (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το λόγο $\frac{AE}{EB}$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το λόγο $\frac{A\Gamma}{\Gamma B}$. (Μονάδες 5)

66 – 19523

ΘΕΜΑ 4

Τα σημεία Γ, Δ και Ε είναι σημεία του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, ώστε το Ε να είναι μέσο του ΑΒ και $A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta E$.

α) Αν $AB = 12$, ποια είναι τα μήκη των τμημάτων ΕΑ και ΑΓ; (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το λόγο $\lambda_1 = \frac{EA}{EB}$ που το σημείο Ε διαιρεί το τμήμα ΑΒ. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε το λόγο $\lambda_2 = \frac{\Gamma A}{\Gamma B}$ που το σημείο Γ διαιρεί το τμήμα ΑΒ. (Μονάδες 10)

7.7 Θεώρημα του Θαλή

67 – 22117

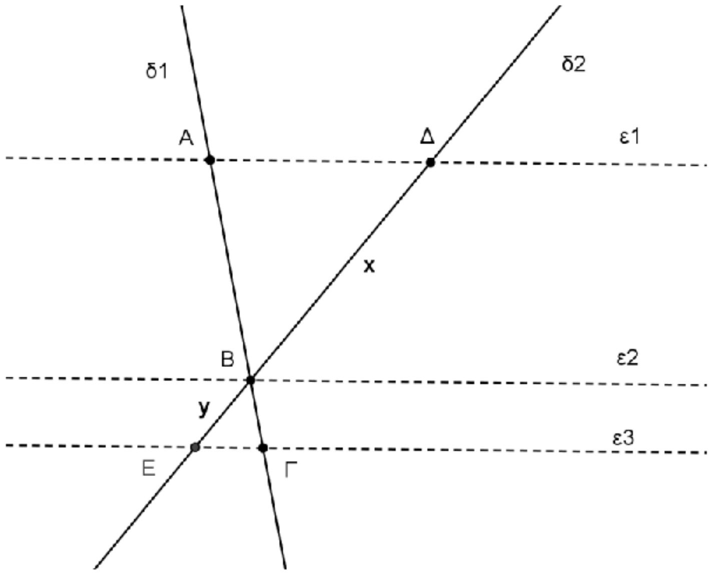
ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα που ακολουθεί, οι ευθείες ε_1, ε_2, ε_3 είναι παράλληλες και τέμνουν τις ευθείες δ_1, δ_2 στα σημεία Α, Β, Γ και Δ, Β, Ε αντίστοιχα. Έστω ότι είναι ΑΒ = 14 και ΒΓ = 4.

α) Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}}$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}} = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}}$, όπου x = ΒΔ και y = ΒΕ. (Μονάδες 10)

γ) Αν είναι $\mathrm{x} = 16$, να υπολογίσετε το y. (Μονάδες 10)



68 – 22116

ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα που ακολουθεί, οι ευθείες ε_1, ε_2, ε_3 είναι παράλληλες και τέμνουν τις ευθείες δ_1, δ_2 στα σημεία Α, Β, Γ και Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα. Έστω ότι είναι ΑΒ = 10 και ΒΓ = 3.

α) Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΑΒ}}$. (Μονάδες 5)

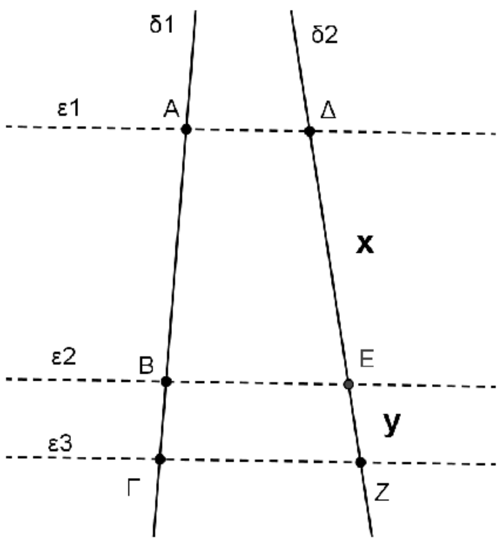
β)

i. Να συμπληρώσετε τα κενά στην αναλογία που ακολουθεί, αιτιολογώντας την απάντησή σας:

$$\frac{\text{ΑΒ}}{....} = \frac{....}{\text{ΕΖ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{....}$$ (Μονάδες 5)

ii. Να δείξετε ότι $\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{y}{x}$, όπου x = ΔΕ και y = ΕΖ. (Μονάδες 8)

γ) Αν είναι $y = 4$, να υπολογίσετε το x. (Μονάδες 7)



69 – 22108

ΘΕΜΑ 2

Οι ΔΖ και ΕΗ είναι παράλληλες με την πλευρά ΑΒ του τριγώνου ΑΒΓ και τέμνουν την πλευρά ΓΑ στα σημεία Δ,Ε και την πλευρά ΓΒ στα σημεία Ζ, Η αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΓΔ = 3, ΔΕ = 6 και ΖΗ = 4.

α)

i. Να συμπληρώσετε τα κενά στην παρακάτω αναλογία, εφαρμόζοντας το θεώρημα του Θαλή στο τρίγωνο ΓΕΗ, στο οποίο η ΔΖ είναι παράλληλη στην πλευρά του ΕΗ.

$$\frac{\text{ΓΖ}}{\dots} = \frac{\dots}{\text{ΔΕ}}$$ (Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι ΓΖ = 2. (Μονάδες 6)

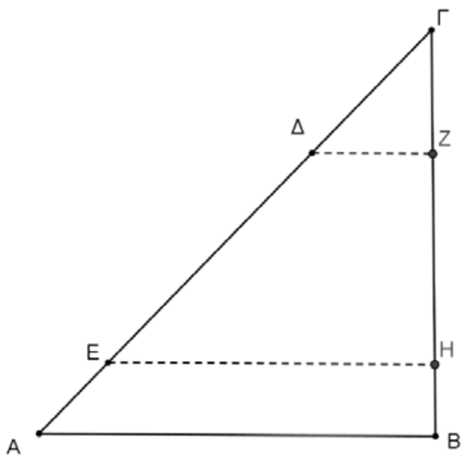
β)

i. Να συμπληρώσετε τα κενά στην παρακάτω αναλογία, εφαρμόζοντας το θεώρημα του Θαλή στο τρίγωνο ΓΑΒ, στο οποίο η ΕΗ είναι παράλληλη στην πλευρά του ΑΒ.

$$\frac{\dots}{\text{ΓΗ}} = \frac{\text{ΕΑ}}{\dots}$$ (Μονάδες 5)

ii. Αν επιπλέον είναι ΗΒ =1, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΕΑ.

(Μονάδες 9)



70 – 19835

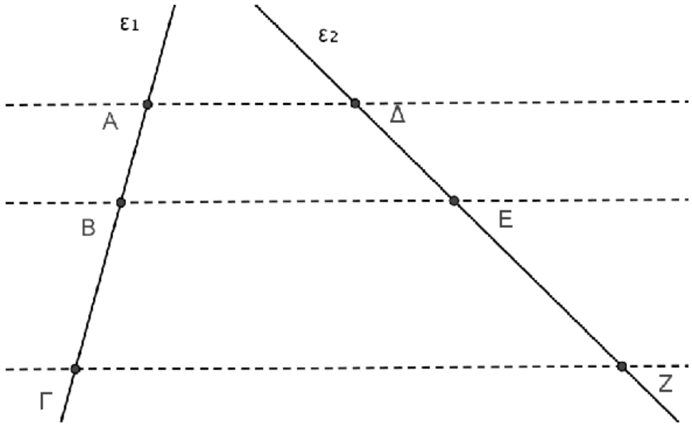
ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα που ακολουθεί, οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι παράλληλες, οι οποίες τέμνουν τις ευθείες ε_1 και ε_2 στα σημεία Α, Β, Γ και Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα. Αν είναι ΑΒ =4, ΒΓ = 8 και ΔΖ = 18, τότε

α) να υπολογίσετε το λόγο $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΓ}}$, (Μονάδες 5)

β) να αιτιολογήσετε γιατί είναι $\frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΔΖ}} = \frac{1}{3}$, (Μονάδες 12)

γ) να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΔΕ και ΕΖ. (Μονάδες 8)



71 – 19828

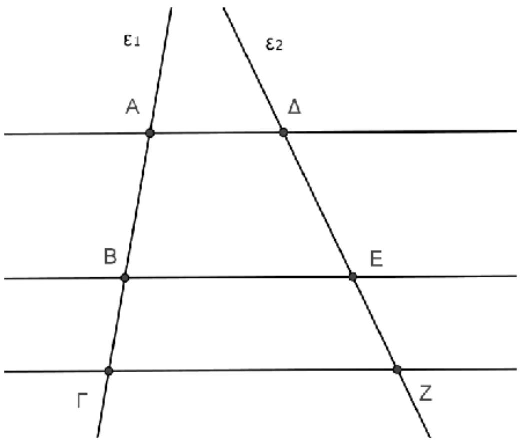
ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα που ακολουθεί, οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι παράλληλες, οι οποίες τέμνουν τις ευθείες ε_1 και ε_2. Αν είναι ΑΒ =12, ΔΕ = 15 και ΕΖ = 10,

α) να υπολογίσετε το λόγο $\frac{ΕΖ}{ΔΕ}$. (Μονάδες 7)

β) να δείξετε ότι $\frac{ΒΓ}{ΑΒ} = \frac{2}{3}$. (Μονάδες 9)

γ) να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ. (Μονάδες 9)



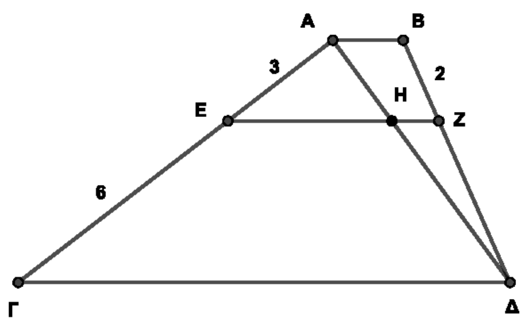
72 – 19643

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΕΖ και ΓΔ είναι παράλληλα. Αν έχουμε ότι ΑΕ = 3, ΕΓ = 6 και ΒΖ = 2, τότε:

α) να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔΖ. (Μονάδες 12)

β) να αποδείξετε ότι ΗΔ = 2·ΑΗ. (Μονάδες 13)



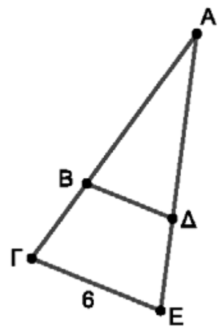
73 – 19522

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τραπέζιο ΒΓΕΔ του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές ΓΒ και ΕΔ όταν προεκταθούν τέμνονται στο σημείο Α, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Επιπλέον δίνεται ότι $\frac{A\Delta}{AE} = \frac{2}{3}$ και $\Gamma E = 6$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΔ. (Μονάδες 11)
β) Αν επιπλέον το ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο και $AE = 12$:
i. να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.
ii. να υπολογίσετε τα μήκη των υπόλοιπων πλευρών του τριγώνου ΑΒΔ.
(Μονάδες 14)



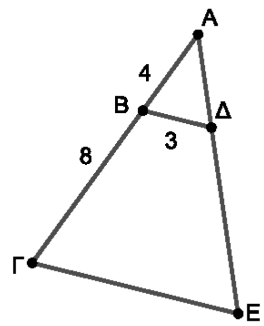
74 – 19521

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τραπέζιο ΒΓΕΔ του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές ΓΒ και ΕΔ όταν προεκταθούν τέμνονται στο σημείο Α, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.

Επιπλέον δίνεται ότι $AB = 4$, $B\Gamma = 8$ και $B\Delta = 3$.

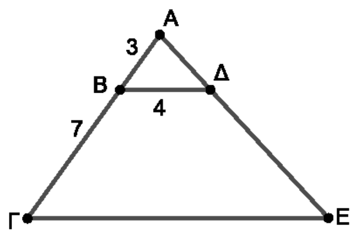
α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΓΕ. (Μονάδες 12)
β) Αν επιπλέον το ΑΒΔ είναι ισοσκελές με $AB = A\Delta$, να βρείτε την περίμετρο του τραπεζίου.
(Μονάδες 13)



75 – 19520

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τραπέζιο ΒΓΕΔ του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές ΓΒ και ΕΔ όταν προεκταθούν τέμνονται στο σημείο Α. Επιπλέον δίνεται ότι $AB = 3$, $B\Gamma = 7$ και $B\Delta = 4$.
α) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών ΑΓ και ΓΕ του τριγώνου ΑΓΕ. (Μονάδες 12)
β) Αν επιπλέον το ΑΒΔ είναι ισοσκελές να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΕ του τριγώνου ΑΓΕ. (Μονάδες 13)



8.2 Κριτήρια ομοιότητας

76 – 35389

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\Delta\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{B} = 130°$ και $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma = 110°$ και τις απέναντι γωνίες τους παραπληρωματικές. Έστω ότι οι απέναντι γωνίες του ΑΒΓΔ είναι παραπληρωματικές και Σ το σημείο στο οποίο τέμνονται οι πλευρές του ΔΑ και ΓΒ προεκτεινόμενες προς τα σημεία Α και Β αντίστοιχα.

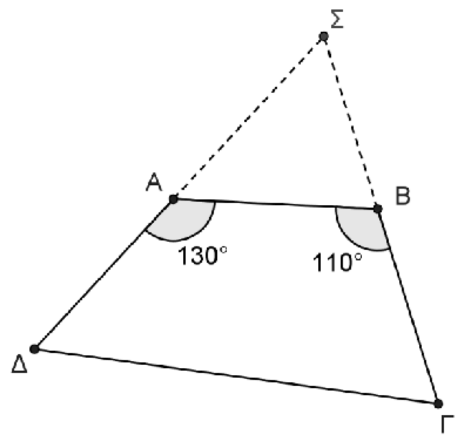
α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{\Gamma} = 50°$ και $\widehat{\Delta} = 70°$. (Μονάδες 9)

β)

i. Να αποδείξετε ότι $\Sigma\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{B} = \widehat{\Gamma}$ και $\Sigma\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = \Delta$. (Μονάδες 7)

ii. Τα τρίγωνα ΣΑΒ και ΣΔΓ είναι όμοια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)



77 – 35258

ΘΕΜΑ 2

Οι χορδές ΑΒ και ΓΔ ενός κύκλου τέμνονται στο σημείο Ε και οι γωνίες με κορυφές τα σημεία Α και Δ είναι ίσες, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

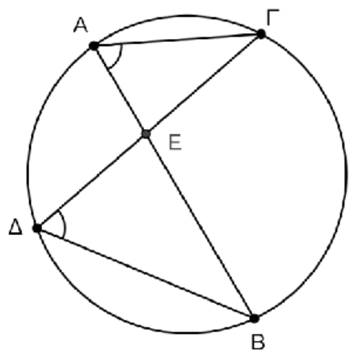
α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΔΕΒ είναι όμοια. (Μονάδες 10)

β)

i. Ποιες είναι οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

ii. Να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων.

(Μονάδες 6)



78 – 22241

ΘΕΜΑ 2

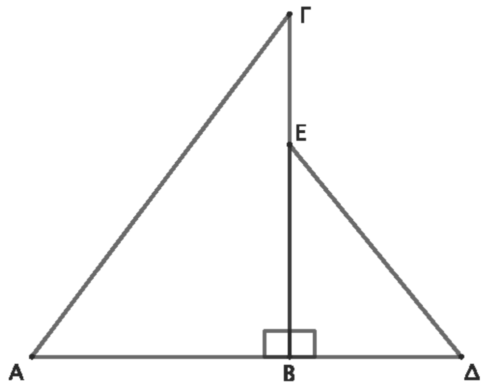
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ότι $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ είναι όμοια.

(Μονάδες 13)

β) Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΒΕ.

(Μονάδες 12)



79 – 21390

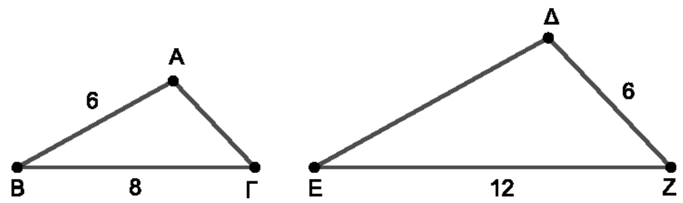
ΘΕΜΑ 2

Τα τρίγωνα $\mathrm{AB\Gamma}$ και $\Delta\mathrm{EZ}$ στο παρακάτω σχήμα είναι όμοια και η ομόλογη πλευρά της $\mathrm{B\Gamma}$ είναι η EZ. Δίνονται επίσης $\mathrm{AB} = 6,\ \mathrm{B\Gamma} = 8,\ \Delta\mathrm{Z} = 6$ και $\mathrm{EZ} = 12$.

α) Να αποδείξετε ότι ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων $\mathrm{AB\Gamma}$ και $\Delta\mathrm{EZ}$ είναι $\frac{2}{3}$. (Μονάδες 8)

β) Να συμπληρώσετε τα κενά στην ισότητα των λόγων $\frac{\mathrm{AB}}{\dots} = \frac{\dots}{\mathrm{EZ}} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\dots}$. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών $\mathrm{A\Gamma}$ και $\Delta\mathrm{E}$. (Μονάδες 10)



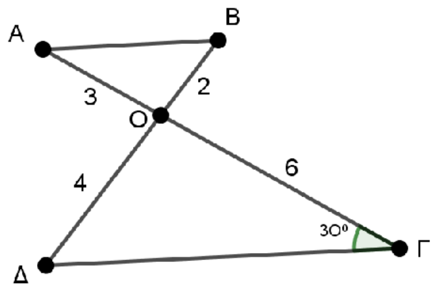
80 – 21270

ΘΕΜΑ 2

Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΒΔ τέμνονται στο σημείο Ο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αν ΟΑ = 3, ΟΒ = 2, ΟΓ = 6, ΟΔ =4 και η γωνία ΟΓΔ ισούται με 30^0 τότε:

α) να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ είναι όμοια. (Μονάδες 9)

β) να συμπληρώσετε τα κενά στην ισότητα των λόγων: $\frac{\mathrm{OA}}{\dots} = \frac{\dots}{\mathrm{O\Delta}} = \frac{\mathrm{AB}}{\dots}$. (Μονάδες 7) γ) να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ΟΑΒ. (Μονάδες 9)



81 – 21305

ΘΕΜΑ 2

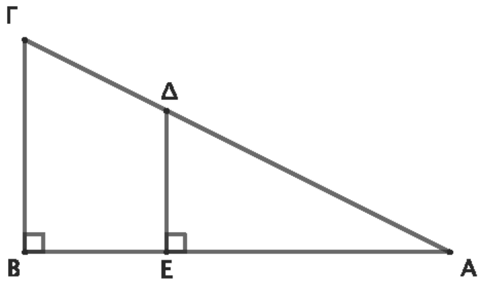
Στο παρακάτω σχήμα οι γωνίες $\hat{B}$ και $A\hat{E}\Delta$ είναι ορθές.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΒΓ είναι όμοια.

(Μονάδες 13)

β) Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΕΔ και ΑΒΓ.

(Μονάδες 12)



82 – 21005

ΘΕΜΑ 2

Έστω Δ και Ε τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα τριγώνου ΑΒΓ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί ΔΕ // ΒΓ.

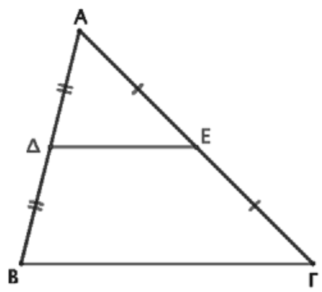
(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

γ) Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ.

(Μονάδες 05)



83 – 21002

ΘΕΜΑ 2

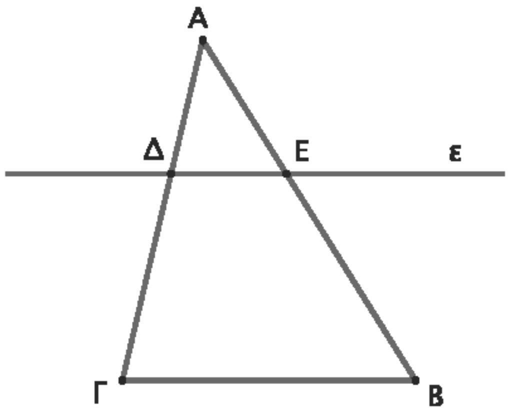
Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ. Από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΓ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΕΔ είναι όμοια.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔΕ, αν είναι $ΑΔ = 2$, $ΔΓ = 6$ και $ΒΓ = 4$.

(Μονάδες 13)



84 – 20956

ΘΕΜΑ 2

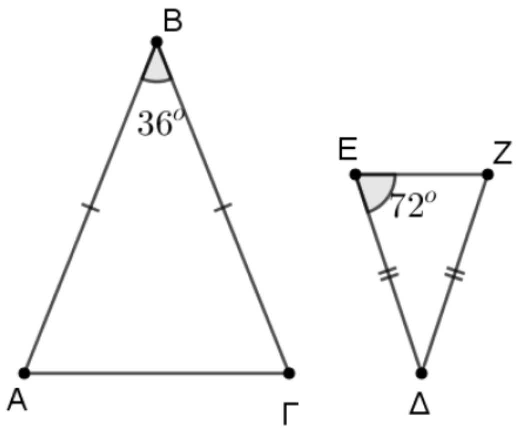
Δίνονται τα ισοσκελή τρίγωνα ΒΑΓ με ΒΑ = ΒΓ και ΔΕΖ με ΔΕ = ΔΖ. Δίνεται επίσης ότι $\hat{B} = 36^o$, $\hat{E} = 72^o$ και ΑΒ = 2ΔΕ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{Δ} = 36^o$. (Μονάδες 08)

ii. ΒΓ = 2ΔΖ. (Μονάδες 08)

β) Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα ΒΑΓ και ΔΕΖ είναι όμοια. (Μονάδες 09)



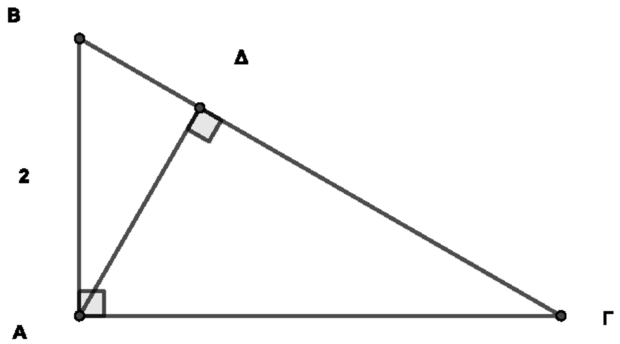
85 – 19645

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, με την υποτείνουσα του ΒΓ = 4 και την κάθετη πλευρά του ΑΒ = 2. Αν ΑΔ το ύψος του τριγώνου τότε:

α) να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι όμοια. (Μονάδες 12)

β) να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΔ. (Μονάδες 13)



86 – 19644

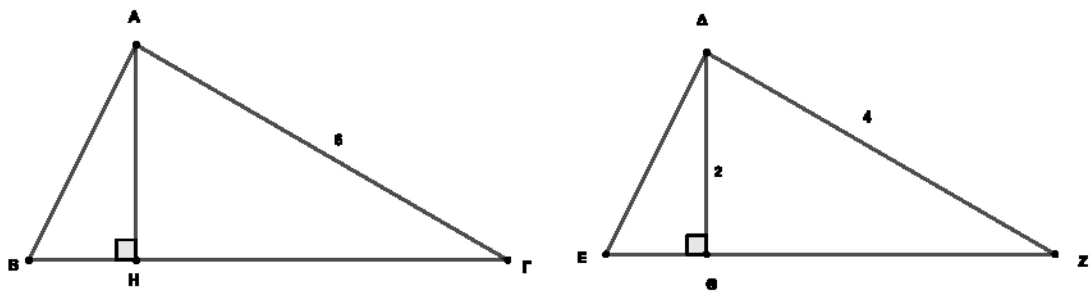
ΘΕΜΑ 2

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ του παρακάτω σχήματος έχουν $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $\hat{B} = \hat{E}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$. Αν γνωρίζουμε ότι ΑΓ = 6, ΔΖ = 4 και ΔΘ = 2, τότε:

α) να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΗΓ και ΔΘΖ είναι όμοια. (Μονάδες 6)

β) να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΗ. (Μονάδες 9)

γ) να υπολογίσετε το λόγο $\frac{\mathrm{H\Gamma}}{\Theta\mathrm{Z}}$. (Μονάδες 10)



87 – 19518

ΘΕΜΑ 2

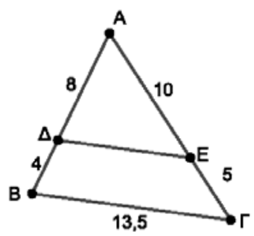
Τα Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, ώστε $A\Delta = 8, B\Delta = 4, AE = 10$ και $E\Gamma = 5$. Επίσης $B\Gamma = 13{,}5$.

α) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{2}{3}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΔΕ του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 9)



88 – 19517

ΘΕΜΑ 2

Τα σημεία Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα, του τριγώνου ΑΒΓ, ώστε $AE = 9$, $E\Gamma = 3$ και η γωνία $\hat{\Delta}_1 = A\hat{\Delta}E$ είναι ίση με τη γωνία $\hat{B}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

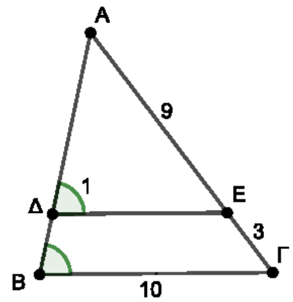
α) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{3}{4}$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν επιπλέον $B\Gamma = 10$, να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΔΕ του τριγώνου ΑΔΕ.

(Μονάδες 10)



89 – 19274

ΘΕΜΑ 2

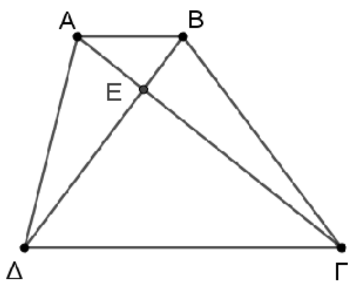
Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ και ΓΔ = 3ΑΒ. Οι διαγώνιές του ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο σημείο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΔΕΓ είναι όμοια.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{E\Gamma}{EA}$.

(Μονάδες 13)



90 – 22247

ΘΕΜΑ 4

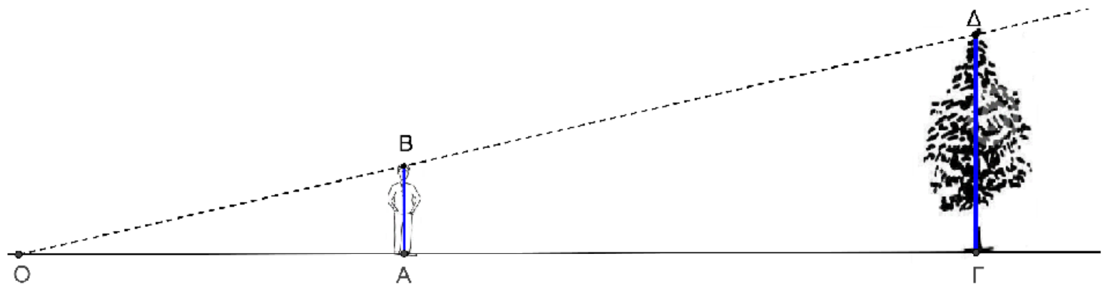
Ένα δέντρο ρίχνει κάποια στιγμή σε οριζόντιο έδαφος σκιά ΓΟ μήκους 12 m. Την ίδια στιγμή, ένας μαθητής, ύψους 1,75 m, για να βρει το ύψος του δέντρου στέκεται σε ένα σημείο πάνω στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο έτσι ώστε, η σκιά του ΑΟ και η σκιά ΓΟ του δέντρου να βρίσκονται στην ίδια ευθεία και να έχουν το ίδιο άκρο Ο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Ο μαθητής μετράει τη σκιά του εκείνης της χρονικής στιγμής και βρίσκει ότι έχει μήκος 2 m.

Να θεωρήσετε ότι τα τμήματα ΑΒ και ΓΔ του σχεδίου αναπαριστάνουν τα ύψη του μαθητή και του δέντρου αντίστοιχα και ότι είναι κάθετα στην ΟΓ.

α)

i. Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι όμοια. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε το ύψος του δέντρου. (Μονάδες 10)



(Σημειώνεται ότι τα σχέδια δεν έχουν γίνει υπό κλίμακα)

β) Η γραπτή λύση που έδωσε ένας μαθητής στο ερώτημα α)ii. είναι η παρακάτω.

«α)ii. $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΟΑ}} = \frac{\text{ΓΔ}}{\text{ΓΑ}}$ ή $\frac{1,75}{2} = \frac{\text{ΓΔ}}{12-2}$ ή ΓΔ = $\frac{1,75 \cdot 10}{2} = 8,75$ m». Είναι η λύση του μαθητή σωστή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

[Σημείωση: Όταν το φως κινείται μέσα σε ομογενή υλικά, διαδίδεται ευθύγραμμα και σχηματίζει αυτό που περιγράφεται ως φωτεινή ακτίνα. Όταν οι φωτεινές ακτίνες συναντήσουν στην πορεία τους αδιαφανές εμπόδιο, πίσω από το εμπόδιο δημιουργείται μια περιοχή που δεν φωτίζεται απευθείας από τις ακτίνες, την οποία περιοχή αναγνωρίζουμε ως σκιά. Όταν η πηγή του φωτός βρίσκεται σε πολύ μεγάλη απόσταση, όπως ο ήλιος, οι φωτεινές ακτίνες θεωρούνται παράλληλες μεταξύ τους]

91 – 22246

ΘΕΜΑ 4

Το φως όταν κινείται μέσα σε ομογενή υλικά, διαδίδεται ευθύγραμμα και για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε ευθείες γραμμές (φωτεινές ακτίνες) για να αναπαραστήσουμε το ίχνος της διαδρομής του. Όταν η πηγή του φωτός βρίσκεται σε πολύ μεγάλη απόσταση, όπως ο ήλιος, οι φωτεινές ακτίνες θεωρούνται παράλληλες μεταξύ τους.

Ένας άνθρωπος ύψους 1,6m ρίχνει κάποια στιγμή σκιά μήκους 3m. Την ίδια χρονική στιγμή και πάνω στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο ένα δέντρο ρίχνει σκιά μήκους 24m. Τα σχέδια της εικόνας που ακολουθεί αναπαριστάνουν τις δυο περιπτώσεις.

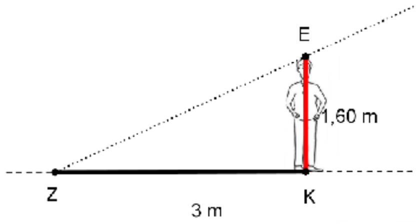
Να θεωρήσετε ότι οι ΖΕ και ΘΗ αναπαριστάνουν τις φωτεινές ακτίνες του ήλιου και είναι παράλληλες μεταξύ τους, τα τμήματα ΚΖ, ΑΘ αναπαριστάνουν τις σκιές του δέντρου και του ανθρώπου και είναι παράλληλα μεταξύ τους και, τα δε τμήματα ΚΕ, ΑΗ αναπαριστάνουν τα αντίστοιχα ύψη τους, τα οποία είναι κάθετα στα ΚΖ, ΑΘ.

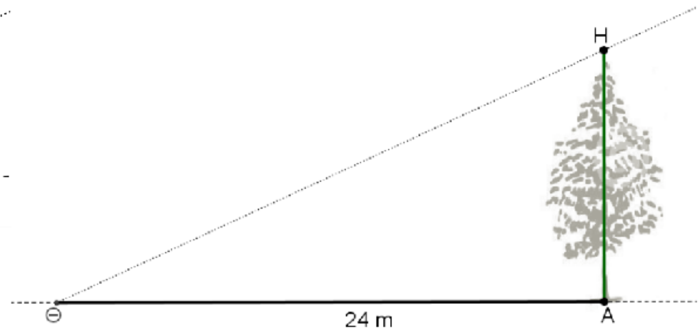
α)

i. Είναι όμοια τα τρίγωνα ΖΚΕ και ΘΑΗ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε το ύψος του δέντρου. (Μονάδες 10)





(Σημειώνεται ότι τα σχέδια δεν έχουν γίνει υπό κλίμακα)

β) Η γραπτή λύση που έδωσε ένας μαθητής στο ερώτημα α)i. είναι η ακόλουθη: «Τα δύο τρίγωνα ΚΖΕ και ΑΘΗ είναι όμοια γιατί είναι ορθογώνια». Ο καθηγητής του μαθητή του είπε ότι ο συλλογισμός του έχει λάθος. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος του μαθητή;

(Μονάδες 5)

92 – 21842

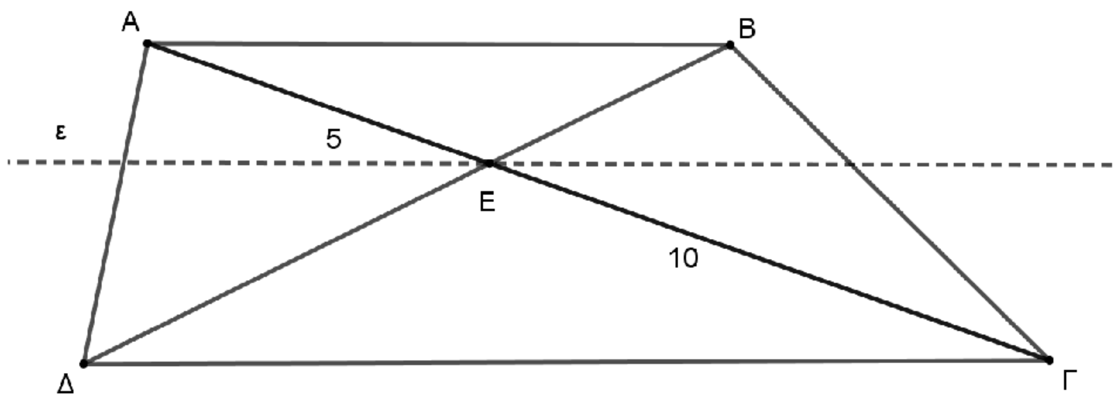
ΘΕΜΑ 4

Έστω τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και Ε το σημείο τομής των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ . Αν ΑΕ=5 και ΕΓ=10 :

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{BE}{E\Delta}=\frac{1}{2}$. (Μονάδες 8)

β) Αν ΒΔ = 12 να βρείτε το μήκος των τμημάτων ΒΕ και ΔΕ. (Μονάδες 10)

γ) Να δικαιολογήσετε ότι $\frac{AB}{\Delta\Gamma}=\frac{1}{2}$. (Μονάδες 7)



93 – 20880

ΘΕΜΑ 4

Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στους κύκλους (K,r) και (Λ,R) στα σημεία A και B αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω Γ το σημείο τομής της διακέντρου ΚΛ και της ευθείας (ε).

α) Να αιτιολογήσετε ότι οι γωνίες $K\hat{A}\Gamma$ και $\Lambda\hat{B}\Gamma$ είναι ορθές.

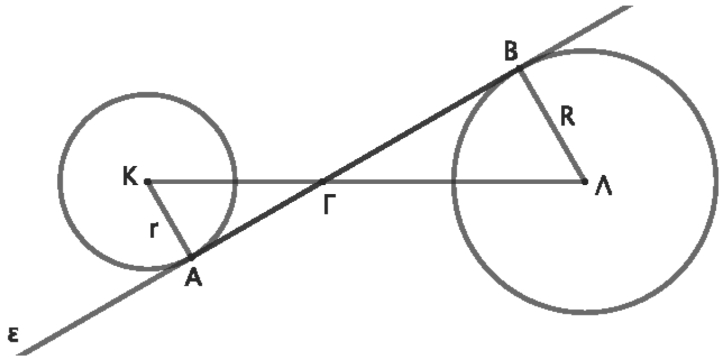
(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΚΑΓ και ΛΒΓ είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

γ) Ποια είναι η θέση του σημείου Γ στη διάκεντρο ΚΛ όταν η ακτίνα R είναι διπλάσια της ακτίνας r;

(Μονάδες 05)



94 – 21021

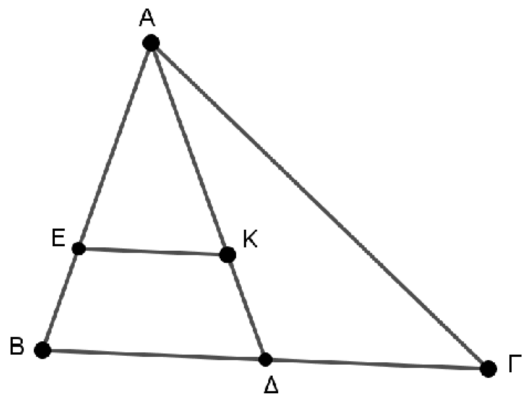
ΘΕΜΑ 4

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, η ΑΔ είναι διάμεσος και το σημείο Κ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου. Από το Κ φέρνουμε παράλληλη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε. Δίνεται ότι η ΑΒ = 6.

α) Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{AK}{A\Delta}$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΚ και ΑΒΔ είναι όμοια. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του ΑΕ. (Μονάδες 8)



95 – 21015

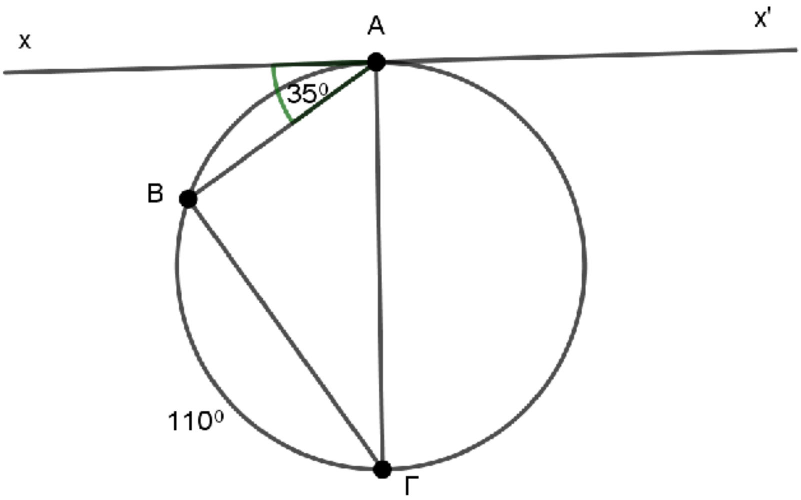
Θέμα 4

Στο παρακάτω σχήμα η xx' είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α και επιπλέον ισχύουν: $B\widehat{A}x = 35^0$ και $\overset{\frown}{B\Gamma} = 110^0$.

α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας Γ. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι η χορδή ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου. (Μονάδες 5)



9.2 Το Πυθαγόρειο θεώρημα

96 – 22240

ΘΕΜΑ 2

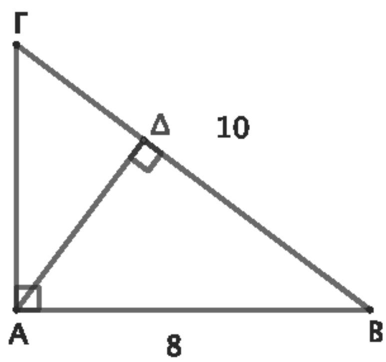
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^o$) με $AB = 8$ και $B\Gamma = 10$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της κάθετης πλευράς ΑΓ.

(Μονάδες 12)

β) Έστω ΑΔ το ύψος στην υποτείνουσα ΒΓ. Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής ΔΒ της κάθετης πλευράς ΑΒ πάνω στη ΒΓ.

(Μονάδες 13)



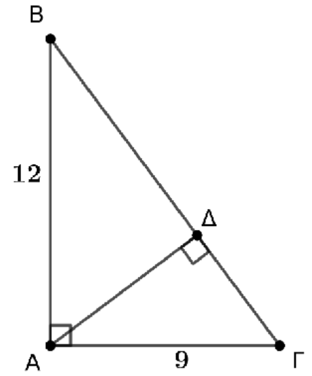
97 – 20654

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ($\widehat{\mathrm{A}} = 90^o$) με κάθετες πλευρές ΑΒ = 12 και ΑΓ = 9, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι ΒΓ = 15. (Μονάδες 12)

β) Αν ΑΔ είναι το ύψος του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, να υπολογίσετε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΔΓ. (Μονάδες 13)



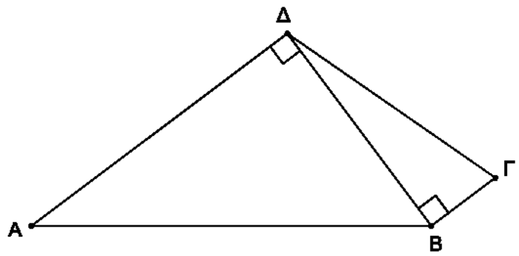
98 – 22096

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ είναι ορθογώνια με $\mathrm{A\hat{\Delta}B} = \mathrm{\Delta\hat{B}\Gamma} = 90^o$ και $\mathrm{A\Delta} = 16, \mathrm{B\Gamma} = 5$ και $\Gamma\Delta = 13$.

α) Να αποδείξετε $\mathrm{B\Delta} = 12$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΒ και την περίμετρο του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 13)



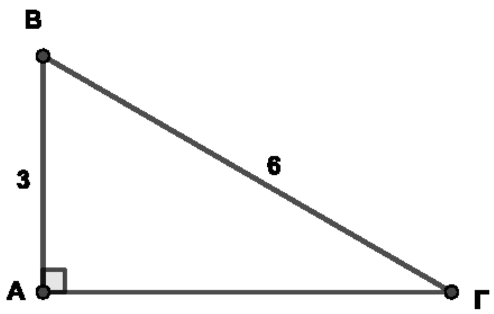
99 – 21273

ΘΕΜΑ 2

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος η ΑΒ = 3 και η ΒΓ = 6. Να υπολογίσετε:

α) το μέτρο της γωνίας Γ. (Μονάδες 13)

β) το μήκος της πλευράς ΑΓ. (Μονάδες 12)



100 – 21064

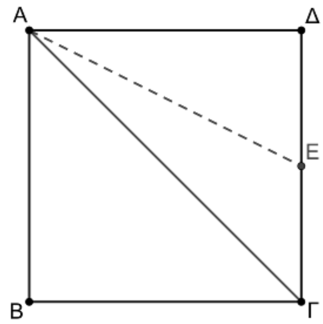
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 2 και Ε είναι το μέσο της ΔΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΓ = $2\sqrt{2}$. (Μονάδες 12)

β) ΑΕ = $\sqrt{5}$. (Μονάδες 13)



101 – 20876

ΘΕΜΑ 2

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^o$) του σχήματος, το ΑΔ είναι ύψος και το ΑΜ διάμεσος. Αν ΒΔ $=$ 4 και ΔΓ $=$ 16, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

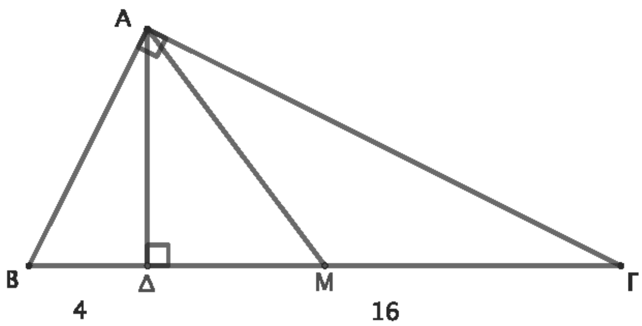
i. ΑΔ $=$ 8.

ii. ΑΒ $= 4\sqrt{5}$.

(Μονάδες 16)

β) Να υπολογίσετε τη διάμεσο ΑΜ.

(Μονάδες 09)



102 – 20873

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα, το ΑΔ είναι το ύψος στην υποτείνουσα ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Αν είναι ΒΓ $=$ 10 και ΔΓ $=$ 8, τότε:

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΔ.

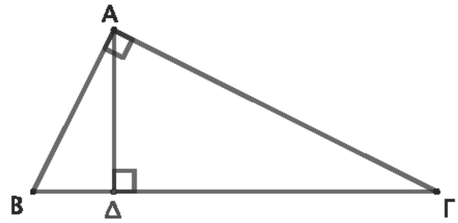
(Μονάδες 05)

β) Να αποδείξετε ότι ΑΔ $=$ 4.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΒ.

(Μονάδες 10)



103 – 20871

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα R = 3. Θεωρούμε το εφαπτόμενο τμήμα ΑΒ ώστε ΑΒ = 4, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αιτιολογήσετε ότι η γωνία $O\hat{B}A$ είναι ορθή.

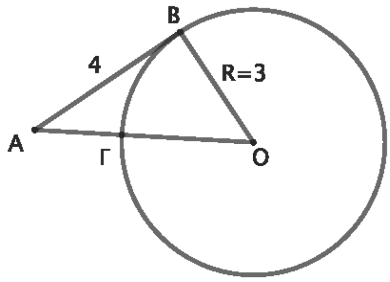
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι ΟΑ = 5.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΓ.

(Μονάδες 8)



104 – 20842

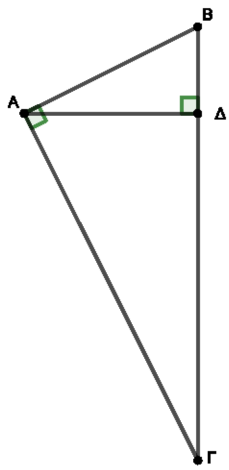
ΘΕΜΑ 2

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ οι προβολές ΔΒ και ΔΓ των κάθετων πλευρών ΑΒ και ΑΓ στην υποτείνουσα ΒΓ έχουν μήκη 3 cm και 12 cm αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το μήκος του ύψους ΑΔ προς την υποτείνουσα ΒΓ είναι 6.

(Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τις κάθετες πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου. (Μονάδες 16)



105 – 20841

ΘΕΜΑ 2

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η μία κάθετη πλευρά του είναι μεγαλύτερη από την άλλη κατά 3 cm. Αν οι δύο κάθετες πλευρές έχουν άθροισμα 21 cm, τότε :

α) Να δείξετε ότι οι κάθετες πλευρές έχουν μήκη 9 cm και 12 cm. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου. (Μονάδες 15)

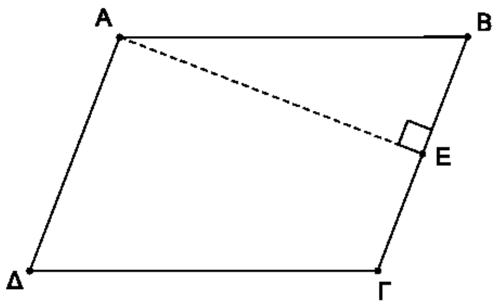
106 – 20662

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, Ε είναι το μέσο της πλευράς του ΒΓ και η ΑΕ είναι κάθετη στην ΒΓ. Αν $AB = 13$ και $BE = 5$, να βρείτε το μήκος:

α) της πλευράς ΑΔ του παραλληλογράμμου. (Μονάδες 12)

β) του ευθύγραμμου τμήματος ΑΕ. (Μονάδες 13)



107 – 20644

ΘΕΜΑ 2

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι τραπέζιο με $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90^\circ$, ΑΔ = 12, ΔΓ = 11, ΒΓ = 13 και ΓΕ το ύψος του.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΓΕ είναι ορθογώνιο.

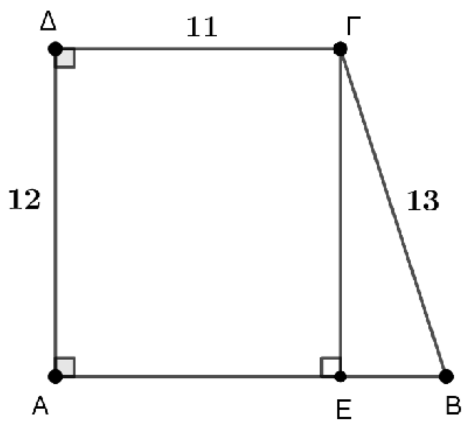
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι ΕΒ = 5.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τραπεζίου.

(Μονάδες 7)



108 – 20085

ΘΕΜΑ 2

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος δίνεται ότι, ΑΓ=10 και ΒΓ=8. Το τμήμα ΓΕ είναι το ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΑΒ με ΓΕ=6.

α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

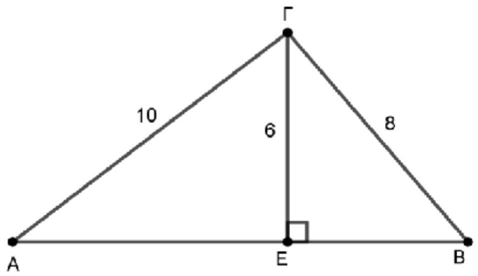
Το τμήμα ΑΕ ονομάζεται προβολή της πλευράς .... στην πλευρά .....

Το τμήμα .... είναι η προβολή της πλευράς ΒΓ στην πλευρά .... (Μονάδες 08)

β)

i. Να υπολογίσετε το τμήμα ΑΕ. (Μονάδες 08)

ii. Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΒ. (Μονάδες 09)



109 – 20083

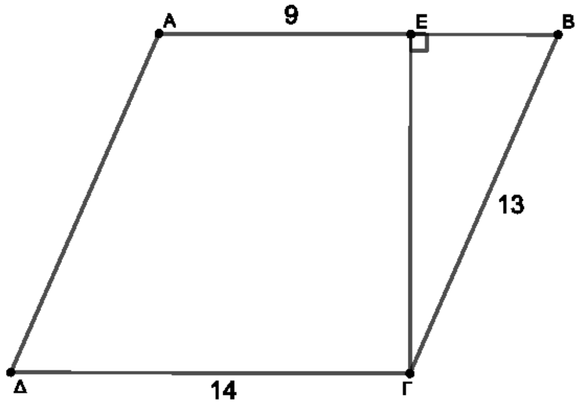
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΒΓ=13 και ΓΔ=14. Αν ΓΕ είναι το κάθετο τμήμα από το σημείο Γ στην πλευρά ΑΒ και το τμήμα ΑΕ έχει μήκος 9, να αποδείξετε ότι:

α) Το μήκος του τμήματος ΓΕ είναι 12. (Μονάδες 10)

β) Τα μήκη των πλευρών ΑΔ, ΔΓ και ΑΓ του τριγώνου ΑΔΓ είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί.

(Μονάδες 15)



110 – 19647

ΘΕΜΑ 2

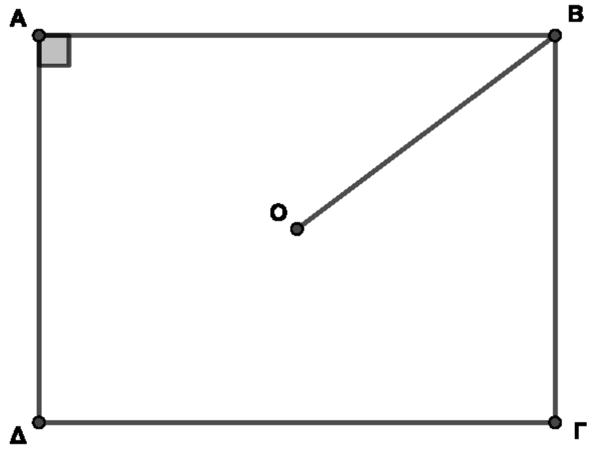
Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος το σημείο Ο είναι το κέντρο του. Επίσης η ΟΒ = 5 και η ΑΔ = 6.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της ΒΔ. (Μονάδες 10)

β) Πόσο είναι το μήκος της διαγωνίου ΑΓ; Να αιτιολογήσετε την απάντησής σας.

(Μονάδες 5)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΒ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 10)



111 – 19646

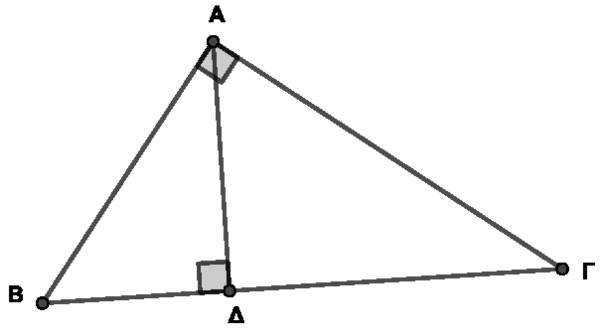
ΘΕΜΑ 2

Το τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος είναι ορθογώνιο με $\widehat{A} = 90^o$, ΒΓ = 10 και ΑΓ=8. Αν ΑΔ είναι το ύψος του από την κορυφή Α να υπολογίσετε το μήκος:

α) της πλευράς ΑΒ. (Μονάδες 10)

β) του τμήματος ΔΓ. (Μονάδες 10)

γ) του τμήματος ΔΒ. (Μονάδες 5)



112 – 19272

ΘΕΜΑ 2

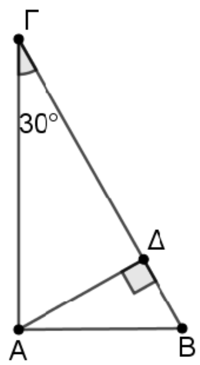
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^o$) με ΒΓ = 8 και $\widehat{\Gamma} = 30^o$.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΒ = 4.

(Μονάδες 12)

β) Φέρουμε το ύψος ΑΔ. Να υπολογίσετε το τμήμα ΒΔ.

(Μονάδες 13)



113 – 18314

ΘΕΜΑ 2

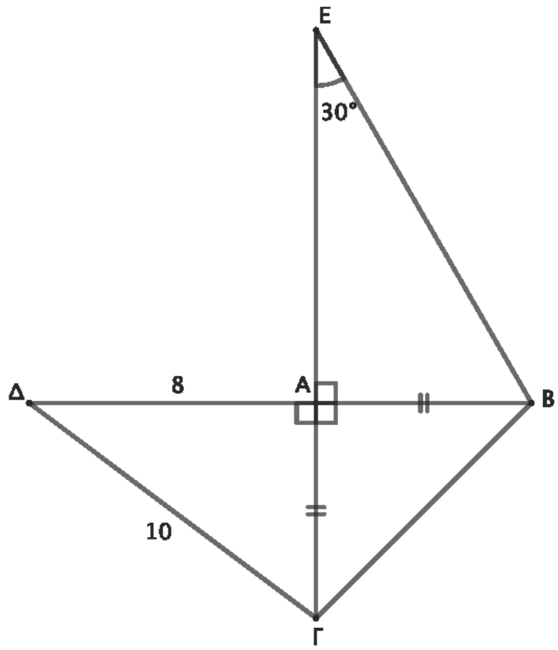
Στο σχήμα παρακάτω είναι $ΑΒ = ΑΓ$, $ΑΔ = 8$, $ΔΓ = 10$ και $Α\hat{Ε}Β = 30^o$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΓ = 6$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την υποτείνουσα ΒΕ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΕ.

(Μονάδες 13)



114 – 18306

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα $R = 1$. Θεωρούμε το εφαπτόμενο τμήμα ΒΑ ώστε $Ο\hat{Β}Α = 30^o$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αιτιολογήσετε ότι η γωνία $Ο\hat{Α}Β$ είναι ορθή.

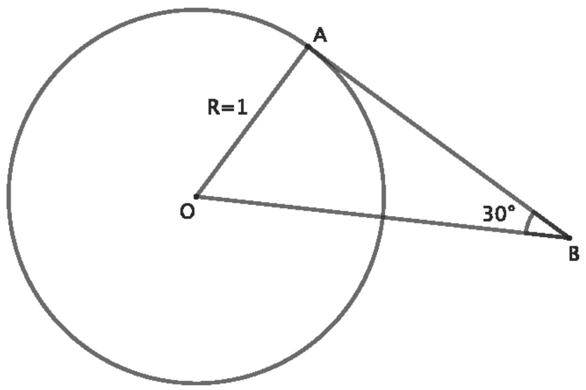
(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $ΟΒ = 2$.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος ΒΑ.

(Μονάδες 5)



115 – 18203

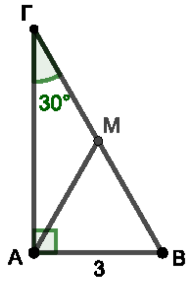
ΘΕΜΑ 2

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\widehat{A} = 90^o$, $\widehat{\Gamma} = 30^o$ και $AB = 3$. Το Μ είναι μέσο της υποτείνουσας του ΑΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 6$. (Μονάδες 08)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΜ. (Μονάδες 09)

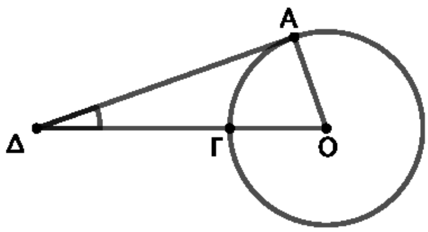
γ) Να υπολογίσετε το μήκος της κάθετης πλευράς ΑΓ του ΑΒΓ. (Μονάδες 08)



116 – 35395

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και εξωτερικό σημείο του Δ. Φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΔΑ και τη διακεντρική ευθεία ΔΟ η οποία τέμνει τον κύκλο στο σημείο Γ, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\Delta\widehat{A}O$ είναι ορθή. (Μονάδες 7)

β) Αν $A\widehat{\Delta}O = 20^o$, τότε να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $A\widehat{O}\Delta$. (Μονάδες 8)

γ) Αν είναι $OA = 1$ και $O\Delta = 2$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $A\widehat{\Delta}O = 30^o$. (Μονάδες 5)

ii. Να υπολογίσετε το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος ΑΔ. (Μονάδες 5)

117 – 35393

ΘΕΜΑ 4

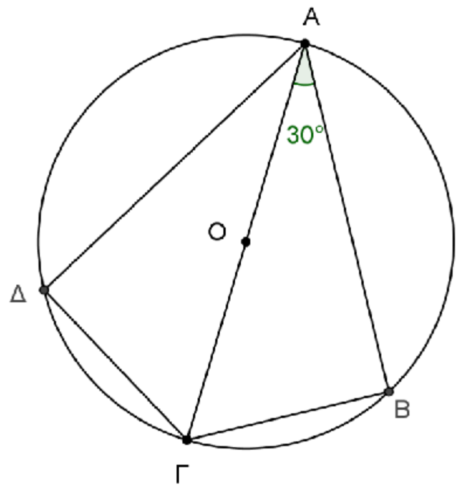
Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ του οποίου οι κορυφές είναι σημεία κύκλου κέντρου Ο και ακτίνας ρ και οι πλευρές του ΒΓ και ΔΓ είναι ίσες. Η διαγώνιος ΑΓ του ΑΒΓΔ είναι διάμετρος του κύκλου και να σχηματίζει με την πλευρά ΑΒ γωνία ίση με 30^o, δηλαδή $B\widehat{A}\Gamma = 30^o$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ είναι ορθογώνια. (Μονάδες 9)

β) Αν είναι $B\Gamma = \Delta\Gamma = 4$,

i. να αποδείξετε ότι ΑΓ = 8, (Μονάδες 8)

ii. να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΔ. (Μονάδες 8)



118 – 35392

ΘΕΜΑ 4

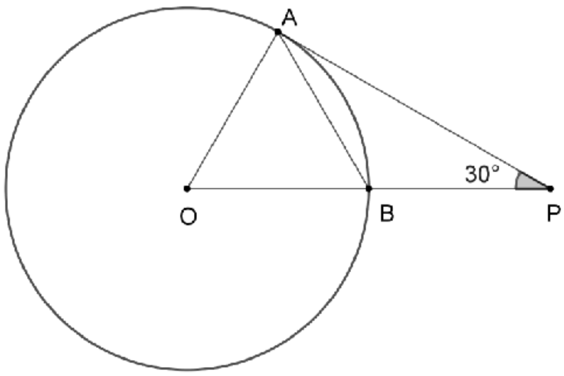
Από σημείο Ρ εκτός κύκλου που έχει κέντρο Ο και ακτίνα ρ φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΡΑ και την ΡΟ που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Β. Έστω ότι είναι $\mathrm{A\widehat{P}O} = 30°$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. το σημείο Β είναι το μέσο του ΟΡ, (Μονάδες 8)

ii. $\mathrm{B\widehat{A}P} = 30°$. (Μονάδες 8)

β) Αν επιπλέον είναι $\mathrm{BP} = 5$, να βρείτε την ακτίνα του κύκλου και το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος ΡΑ. (Μονάδες 9)



119 – 35391

ΘΕΜΑ 4

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος έχει τις κορυφές του Α, Β, Γ και Δ σε κύκλο με κέντρο το σημείο Ο, τη διαγώνιό του ΔΒ διάμετρο του κύκλου και τις γωνίες του $\widehat{\mathrm{A}}$ και $\widehat{\Gamma}$ ορθές. Έστω ότι είναι $\mathrm{A\widehat{B}\Delta} = 30°$ και $\mathrm{\Delta\widehat{B}\Gamma} = 45°$.

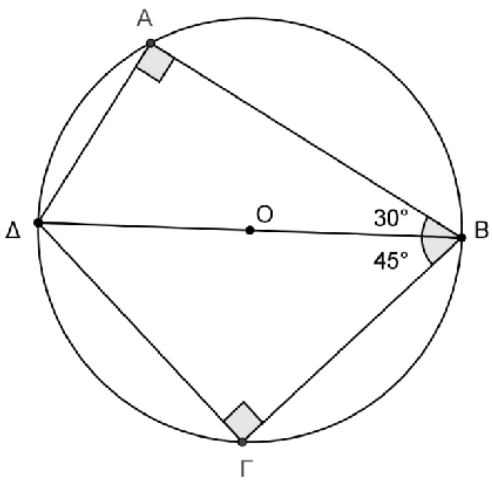
α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\mathrm{A\widehat{\Delta}\Gamma}$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{B\widehat{\Delta}\Gamma} = \mathrm{\Delta\widehat{B}\Gamma}$. (Μονάδες 6)

γ) Αν είναι $\mathrm{B\Delta} = 2$, τότε να αποδείξετε ότι:

i. $\mathrm{A\Delta} = 1$. (Μονάδες 6)

ii. $\mathrm{B\Gamma} = \sqrt{2}$. (Μονάδες 7)



120 – 35390

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος κέντρου Α και σημεία του Γ, Β και Δ έτσι ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ τέμνονται στο Κ και είναι $\mathrm{KA} = \mathrm{KB}$ και $\mathrm{K\Gamma} = \mathrm{K\Delta}$.

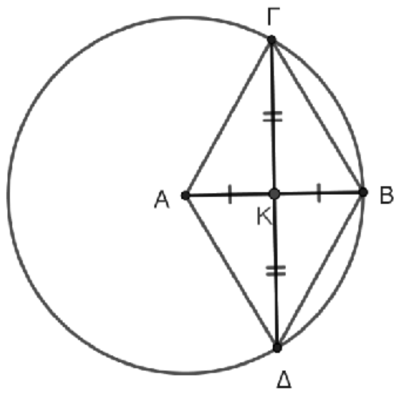
α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΑΓ = ΑΒ = ΑΔ, (Μονάδες 5)

ii. το τετράπλευρο ΑΓΒΔ είναι ρόμβος, (Μονάδες 7)

iii. $\mathrm{K\hat{\Gamma}B} = 30^o$. (Μονάδες 7)

β) Αν είναι $\mathrm{\Gamma B} = 4$, τότε να αποδείξετε ότι $\mathrm{\Gamma\Delta} = 4\sqrt{3}$. (Μονάδες 6)



121 – 22245

ΘΕΜΑ 4

Στο σχήμα που ακολουθεί, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\widehat{\mathrm{A}} = 90^0$, ΑΒ = ΑΓ = 14 και Β σημείο του τμήματος ΔΕ. Αν είναι ΑΔ // ΓΒ, ΑΒ // ΓΕ και ΑΓ // ΔΕ τότε:

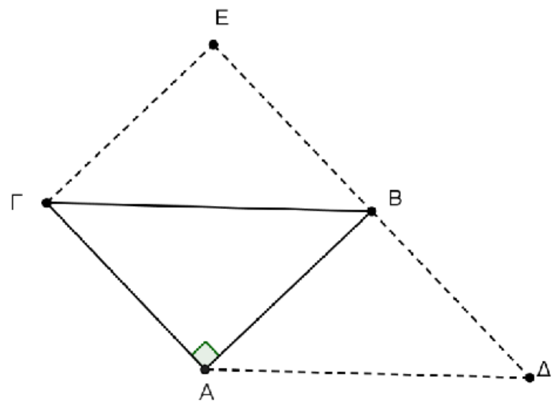
α) Να αποδείξετε ότι

i. το τετράπλευρο ΑΓΒΔ είναι παραλληλόγραμμο, (Μονάδες 8)

ii. το τετράπλευρο ΑΓΕΒ είναι τετράγωνο. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τετραπλεύρου ΑΓΒΔ είναι ίση με 28 $(\sqrt{2} + 1)$.

(Μονάδες 8)



122 – 22203

ΘΕΜΑ 4

Μια ευθεία ε εφάπτεται στους κύκλους (Κ,r) και (Λ,R) στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν $r = 3$, $R = 5$, $ΑΒ = 11$ και $ΚΓ \perp ΒΛ$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΚ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε:

i. Τα μήκη των τμημάτων ΚΓ και ΓΛ.

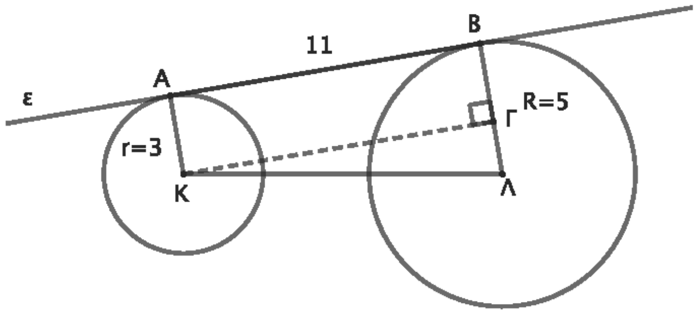
(Μονάδες 8)

ii. Την απόσταση των κέντρων Κ και Λ.

(Μονάδες 6)

γ) Τι είδους τετράπλευρο θα είναι το ΑΒΛΚ όταν οι κύκλοι έχουν ίσες ακτίνες;

(Μονάδες 5)



123 – 22097

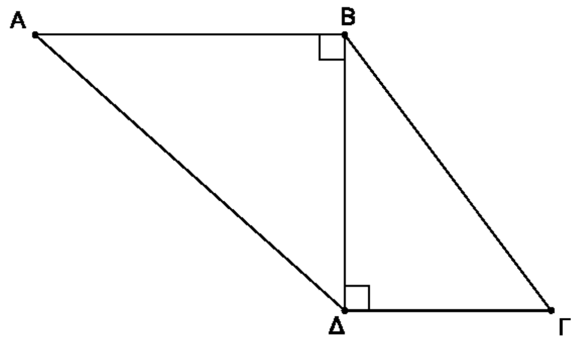
ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ είναι ορθογώνια με $Α\hat{Β}Δ = Β\hat{Δ}Γ = 90^o$ και $ΑΒ = 9, ΒΔ = 8$ και $ΓΔ = 6$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΓ. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε $ΑΔ = \sqrt{145}$. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε $ΑΓ = 17$. (Μονάδες 7)



124 – 20877

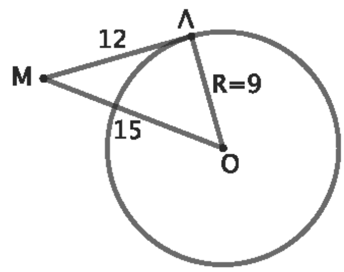
ΘΕΜΑ 4

α) Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^o$) είναι $AB = 12$ και $B\Gamma = 15$. Να υπολογίσετε την κάθετη πλευρά ΑΓ.

(Μονάδες 12)

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι στο σχήμα, «το ΜΛ είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (O,R) στο σημείο του Λ». Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του μαθητή είναι αληθής και να τεκμηριώσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)



125 – 20852

ΘΕΜΑ 4

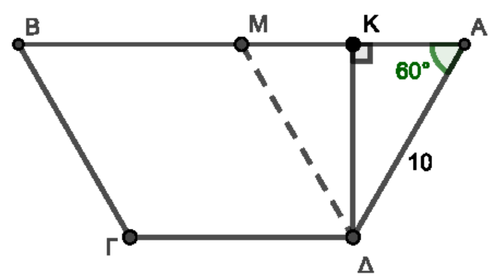
Στο παρακάτω σχήμα το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές και η μεγάλη βάση του ΑΒ είναι διπλάσια από την πλευρά ΑΔ. Επιπλέον η γωνία Α είναι 60^o και η πλευρά ΑΔ είναι 10 cm.

α) Να υπολογίσετε το ύψος ΔΚ του τραπεζίου. (Μονάδες 10)

β) Αν Μ είναι το μέσο της ΑΒ να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ΔΜΑ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 05)

ii. Το τετράπλευρο ΔΜΒΓ είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)



126 – 20850

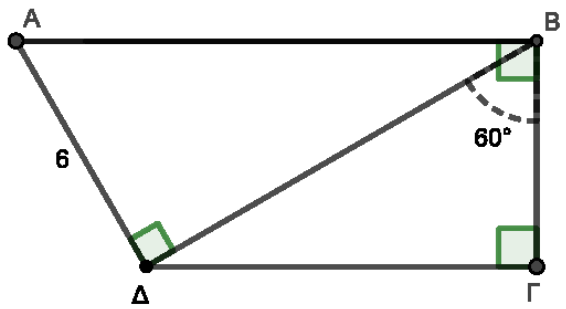
ΘΕΜΑ 4

Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος με ΑΒ//ΓΔ, είναι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 90^o$. Η πλευρά ΑΔ είναι 6 και η διαγώνιος ΒΔ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΔ και σχηματίζει με την πλευρά ΒΓ γωνία $\Delta\widehat{B}\Gamma = 60^o$.

α) Να αποδείξετε ότι η βάση ΑΒ του τραπεζίου είναι 12. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τη διαγώνιο ΒΔ. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι $27 + 3\sqrt{3}$. (Μονάδες 10)



127 – 20849

ΘΕΜΑ 4

Σε ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά 12, ΑΔ είναι το ύψος του και Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Αν το τμήμα ΕΗ είναι κάθετο στην πλευρά ΒΓ, με Η σημείο της ΒΓ, τότε :

α) Να αποδείξετε ότι :

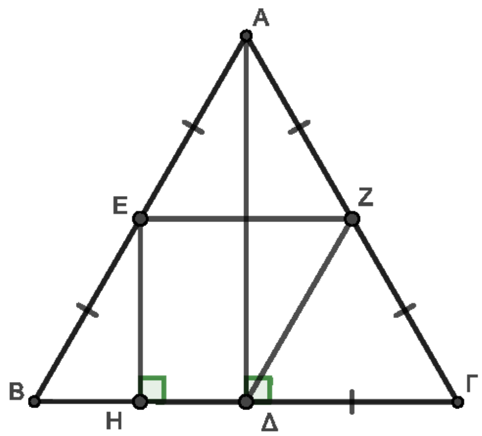
i. ΕΖ//ΗΔ

ii. ΕΖ = 6 και ΗΔ = 3.

(Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν το τετράπλευρο ΕΖΔΗ είναι παραλληλόγραμμο και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΖΔΗ είναι τραπέζιο, του οποίου η βάση του ΕΖ είναι ίση με τη μία από τις μη παράλληλες πλευρές του τη ΔΖ. (Μονάδες 8)



128 – 18160

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = $8\sqrt{3}$, το ύψος του ΒΔ και το μέσο Μ της ΒΓ.

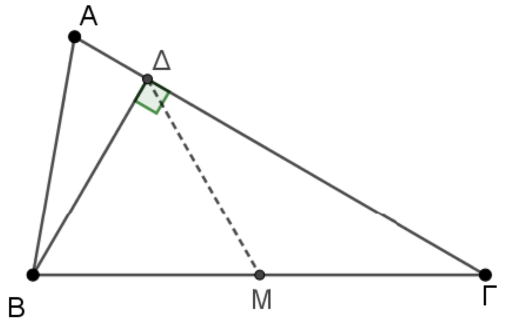
α) Να αποδείξετε ότι ΔΜ = $4\sqrt{3}$. (Μονάδες 07)

β) Αν $\hat{\Gamma} = 30^o$ και ΑΒ = 8:

i. Να υπολογίσετε την $M\hat{\Delta}\Gamma$. (Μονάδες 06)

ii. Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{B\Delta}{B\Gamma}$. (Μονάδες 06)

iii. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΔ. (Μονάδες 06)



129 – 19843

ΘΕΜΑ 4

Στο σχήμα που ακολουθεί, το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο με διαγώνιο ΖΕ = 60 και το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με πλευρά ΑΒ =16. Αν είναι ΖΑ = ΓΕ = 20, τότε:

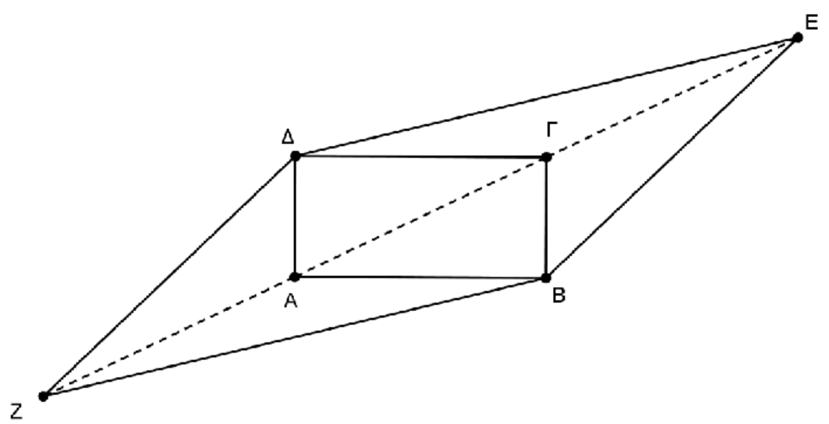
α) Να αποδείξετε ότι ΖΑ = ΑΓ = ΓΕ. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε:

i. το μήκος της πλευράς ΒΓ και την περίμετρο του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, (Μονάδες 10)

ii. τη διαγώνιο ΔΒ του παραλληλογράμμου ΔΕΒΖ. (Μονάδες 7)

Σε κάθε περίπτωση να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

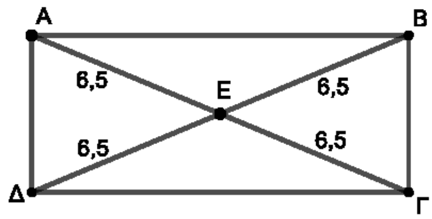


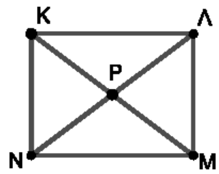
130 – 19519

ΘΕΜΑ 4

α) Το Ε είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.
Επιπλέον ισχύει ότι $ΕΑ = ΕΓ = ΕΔ = ΕΒ = 6{,}5$.
i. Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)
ii. Αν επιπλέον δίνεται ότι η πλευρά $ΑΔ = 5$, να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΒ του ΑΒΓΔ.
(Μονάδες 10)

β) Μια ταμπέλα έχει το σχήμα του τετραπλεύρου ΚΛΜΝ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.
Σας δίνεται ότι οι διαγώνιοι του ΚΜ και ΛΝ τέμνονται στο Ρ και έχει $ΡΚ = ΡΛ = ΡΜ = 2{,}5$.
Ένας συμμαθητής σας, ο Κώστας γνωρίζει επιπλέον το μήκος του ΡΝ και βγάζει, σωστά, το συμπέρασμα ότι η ταμπέλα είναι σχήματος ορθογωνίου. Πόσο είναι το μήκος του ΡΝ;
(Μονάδες 05)





131 – 18352

ΘΕΜΑ 4

Έστω Ο το κέντρο ρόμβου ΑΒΓΔ με μήκη διαγωνίων $ΔΒ = 6$ και $ΑΓ = 8$.

α) Να υπολογίσετε την πλευρά του ρόμβου.

(Μονάδες 9)

β) Θεωρούμε σημεία Ε και Ζ εσωτερικά των τμημάτων ΟΑ και ΟΓ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $ΕΟ = ΟΖ$.

i. Πόσο πρέπει να είναι το μήκος καθενός από τα τμήματα ΕΟ και ΟΖ ώστε το τετράπλευρο ΕΒΖΔ να είναι τετράγωνο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

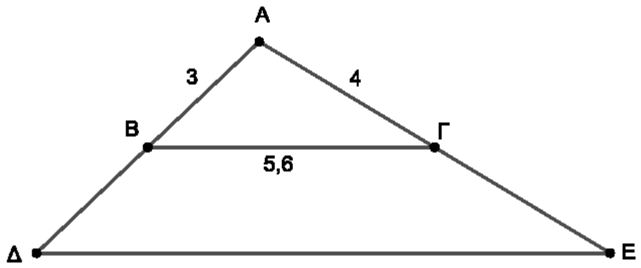
ii. Να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου ΕΒΖΔ του προηγούμενου ερωτήματος.

(Μονάδες 8)

132 – 18208

ΘΕΜΑ 4

Η πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ είναι παράλληλη στην πλευρά ΔΕ του τριγώνου ΑΔΕ.
Επίσης δίνονται $ΑΒ = 3$, $ΒΓ = 5{,}6$ και $ΑΓ = 4$.
α) Αν $ΑΔ = 6$ να υπολογίσετε:
i. το μήκος της πλευράς ΑΕ του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 09)
ii. το μήκος της πλευράς ΔΕ του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 08)
β) Αν $ΑΔ = 9$ να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΔΕ του τριγώνου ΑΔΕ.
(Μονάδες 08)



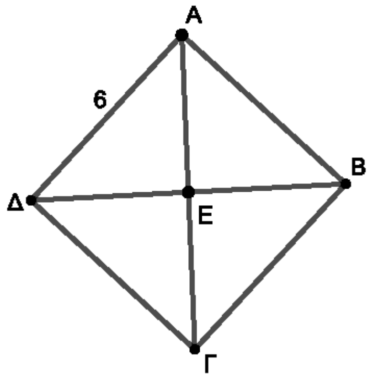
133 – 18207

ΘΕΜΑ 4

Το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο με περίμετρο 24 και $\text{ΑΔ} = 6$.

α) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του ΑΒΓΔ και να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος. (Μονάδες 13)

β) Αν επιπλέον $\text{ΑΓ} = 6\sqrt{2}$ να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο. (Μονάδες 12)



9.4 Γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος

134 – 22111

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ =6, ΑΓ =6 και ΒΓ = 9.

α) Να δείξετε ότι η γωνία $\text{Α}\widehat{\text{Β}}\text{Γ}$ του τριγώνου είναι οξεία. (Μονάδες 9)

β) Να απαντήσετε στα επόμενα ερωτήματα αιτιολογώντας την απάντησή σας.

i. Να χαρακτηρίσετε τη γωνία $\text{Β}\widehat{\text{Α}}\text{Γ}$ του τριγώνου, ως οξεία ή αμβλεία.

(Μονάδες 10)

ii. Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές και τις γωνίες του.

(Μονάδες 6)

135 – 22110

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = 5, ΒΓ =5 και ΑΓ = 7.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\text{Β}\widehat{\text{Α}}\text{Γ}$ του τριγώνου είναι οξεία.

(Μονάδες 9)

β) Να απαντήσετε στα επόμενα ερωτήματα αιτιολογώντας την απάντησή σας.

i. Να χαρακτηρίσετε τις άλλες δύο γωνίες του τριγώνου ως οξεία ή αμβλεία.

(Μονάδες 10)

ii. Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές και τις γωνίες του.

(Μονάδες 6)

136 – 18172

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90^o$, ΑΓ = 12 και ΑΒ = 5.

α) Να αποδείξετε ότι ΒΓ = 13. (Μονάδες 08)

β) Φέρουμε ημιευθεία Βx κάθετη στην ΒΓ στο σημείο Β και παίρνουμε στην Βx σημείο Δ , τέτοιο ώστε ΓΔ = 14, όπως φαίνεται στο σχήμα.

i. Να αποδείξετε ότι ΒΔ = $3\sqrt{3}$. (Μονάδες 08)

ii. Να υπολογίστε την προβολή της ΒΔ στην ΔΓ. (Μονάδες 09)