

Αναστάσιος Χ. Μπάρλας

# Άλγεβρα

Β΄ ΕΠΑ.Λ.

Τράπεζα  
Θεμάτων  
2023

## 1.1 Γραμμικά Συστήματα

1 – 21911

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y = x + 1 \end{cases} \quad (1).$$

α) Δικαιολογήστε γιατί το σημείο  $A(0,1)$  επαληθεύει μόνο τη μία εξίσωση από τις δύο, ενώ το σημείο  $B(2,3)$  επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε το σύστημα (1).

(Μονάδες 15)

2 – 19102

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το σύστημα  $(\Sigma)$ : 
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 5x - y = 2 \end{cases}.$$

α) Να εξετάσετε αν το ζεύγος  $(x, y) = (3,1)$  είναι λύση του παραπάνω συστήματος.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε το παραπάνω σύστημα.

(Μονάδες 15)

3 – 19503

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες  $\{\varepsilon_1\}: y = x + 1$  και  $\{\varepsilon_2\}: y = x - 4$ .

α) Να εξετάσετε αν το σημείο  $A(0,1)$  ανήκει και στις δύο ευθείες  $\{\varepsilon_1\}, \{\varepsilon_2\}$ .

(Μονάδες 13)

β) Να εξετάσετε αν έχει λύση το σύστημα των εξισώσεων:

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ -x + y = -4 \end{cases}.$$

(Μονάδες 12)

4 – 20381

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το σύστημα 
$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases}$$

α) Το ζεύγος  $(x, y) = (0,3)$  είναι λύση του συστήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε το σύστημα.

(Μονάδες 13)

5 – 20329

ΘΕΜΑ 2

α) Να λυθεί το σύστημα  $(\Sigma): \begin{cases} 2x + 7y = -5 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$

(Μονάδες 15)

β) Ποιο είναι το σημείο τομής των ευθειών που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος  $(\Sigma)$ ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

6 – 20291

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τις ευθείες  $\varepsilon_1 : 3x - 4y = 2$  και  $\varepsilon_2 : 5x + 4y = 14$ .

α) Να εξετάσετε αν το σημείο  $(6, 4)$  είναι κοινό σημείο των ευθειών.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το σημείο τομής των δυο ευθειών λύνοντας το σύστημα  $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 5x + 4y = 14 \end{cases}$ .

(Μονάδες 15)

7 – 20266

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το γραμμικό σύστημα  $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ .

α) Να λύσετε το παραπάνω σύστημα.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών  $(\varepsilon_1): 3x + 2y = 8$  και

$(\varepsilon_2): 2x - y = 3$ .

(Μονάδες 10)

8 – 36876

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το σύστημα  $(\Sigma): \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$

α) Να λύσετε το σύστημα  $(\Sigma)$ .

(Μονάδες 8)

β) Να σχεδιάσετε σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τις ευθείες

$(\varepsilon_1): x + y = 3$ ,  $(\varepsilon_2): x - y = 2$  και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τα  $x$  για τα οποία τα σημεία της ευθείας  $\varepsilon_1$  είναι πάνω από τα σημεία της ευθείας

$\varepsilon_2$ .

(Μονάδες 7)

9 – 20437

ΘΕΜΑ 4

Ένα μικρό κατάστημα σε μια γειτονιά πουλάει, μεταξύ άλλων αγαθών, γάλα και ψωμί. Την Τρίτη το πρωί μέσα σε μια ώρα πούλησε 8 φρατζόλες ψωμί και 5 λίτρα γάλα και εισέπραξε 14 ευρώ. Την Πέμπτη το πρωί την ίδια ώρα πούλησε 6 φρατζόλες ψωμί και 9 λίτρα γάλα και εισέπραξε 21 ευρώ. Αν  $x$  είναι η τιμή πώλησης της μιας φρατζόλας ψωμιού και  $y$  η τιμή πώλησης του ενός λίτρου γάλακτος,

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα του προβλήματος με ένα γραμμικό σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε την τιμή πώλησης της μιας φρατζόλας ψωμιού και του ενός λίτρου γάλακτος.

(Μονάδες 7)

γ)

i. Να παραστήσετε γραφικά το σύστημα του α) ερωτήματος και να ονομάσετε Β το σημείο τομής των δυο ευθειών.

(Μονάδες 6)

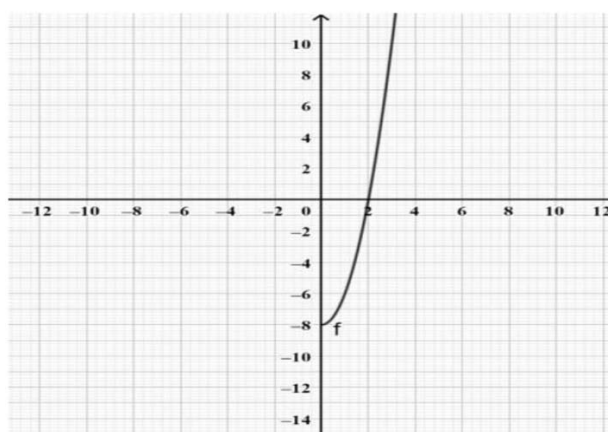
ii. Αν το σημείο τομής των ευθειών είναι  $B\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ , να ερμηνεύσετε τις συντεταγμένες του στο πλαίσιο του προβλήματος.

(Μονάδες 7)

### 2.1 Μονοτονία – Ακρότατα – Συμμετρίες Συνάρτησης

10 – 36703

ΘΕΜΑ 2



Στο παραπάνω σχήμα δίνεται ένα τμήμα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ .

α) Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση με το κομμάτι της καμπύλης που λείπει. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

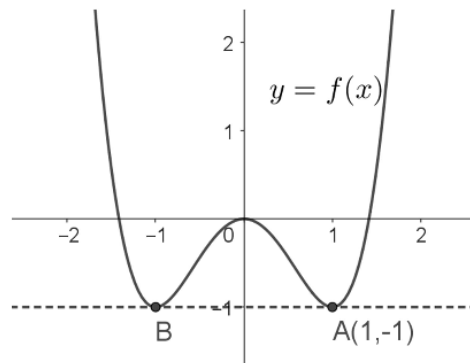
β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f.

(Μονάδες 12)

11 – 36385

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης  $f$ .



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $B$ .

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι:

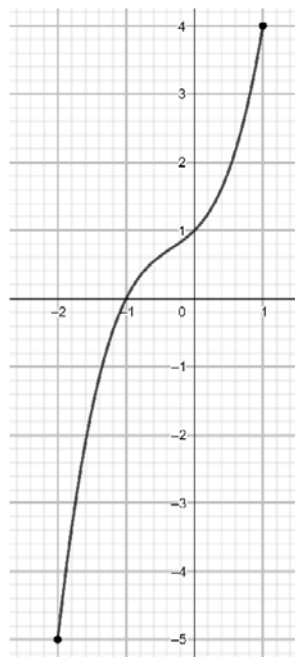
- i. γνησίως αύξουσα,
- ii. γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 13)

12 – 35978

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$ .



α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της  $f$ . Είναι η  $f$  γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα;

(Μονάδες 13)

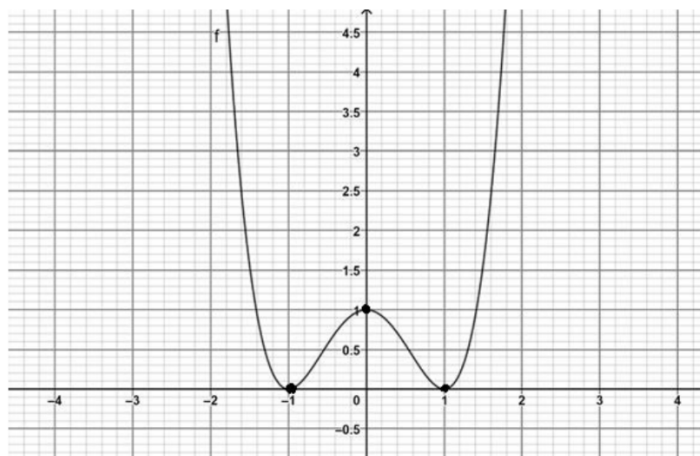
β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της  $f$  καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών.

(Μονάδες 12)

13 – 20435

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ .



α) Να βρείτε αν η συνάρτηση  $f$  είναι άρτια ή περιττή. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

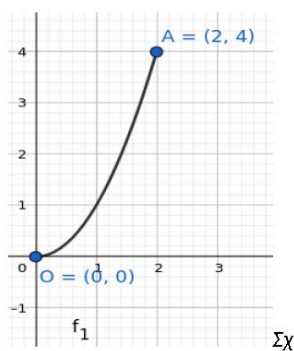
β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της  $f$  καθώς και τις θέσεις που την αποκτά.

(Μονάδες 12)

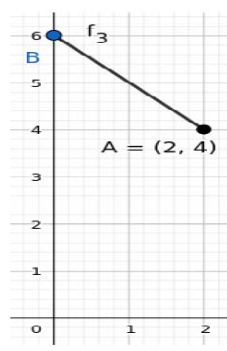
14 – 19504

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f_1, f_3$ .



ήμα 1



Σχήμα 2

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των  $f_1, f_3$ , εφόσον υπάρχουν.

(Μονάδες 12)

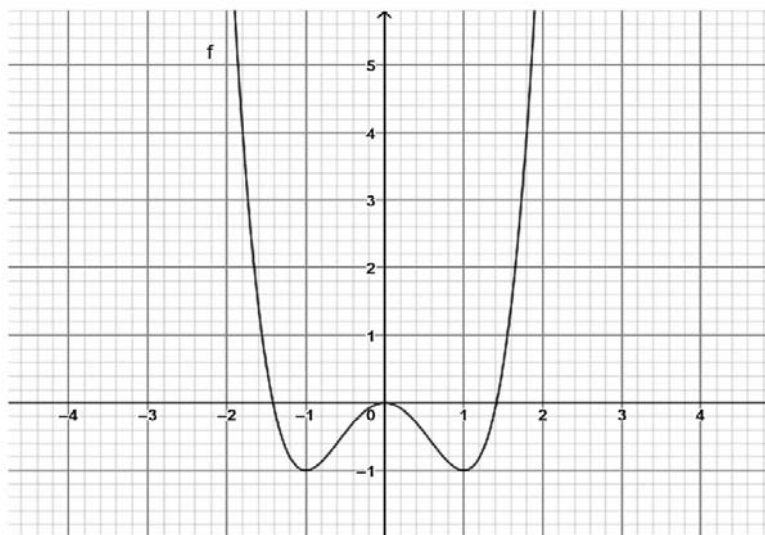
β) Να βρείτε τη μονοτονία των συναρτήσεων  $f_1, f_3$ .

(Μονάδες 13)

15 – 20434

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ .



α) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της  $f$  καθώς και τις θέσεις που την αποκτά.

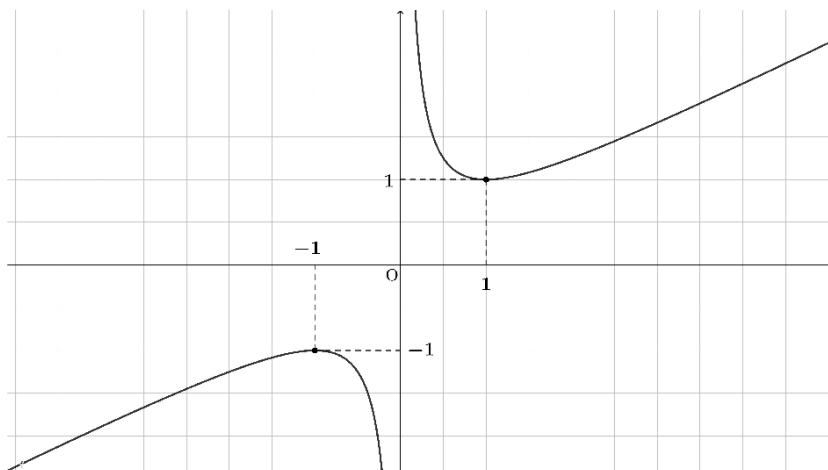
(Μονάδες 12)

16 – 20328

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $y = f(x)$  με  $x \neq 0$ .

Με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος:



α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 15)

β) Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός «η συνάρτηση  $f$  είναι περιττή».

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

## 17 – 20268

## Θέμα 2

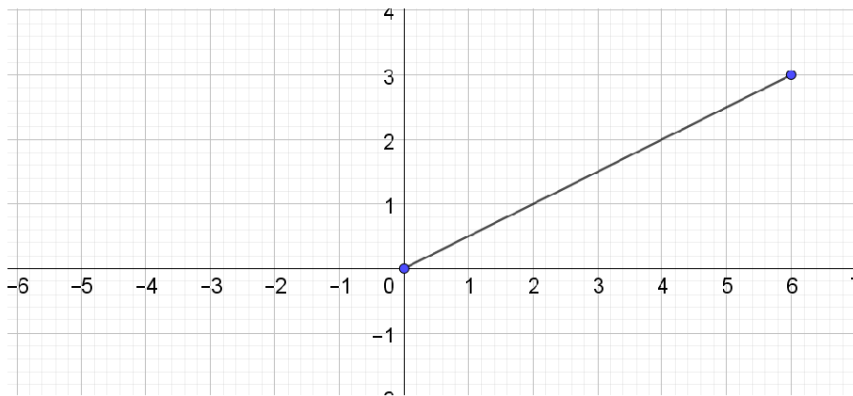
Μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το διάστημα  $[-6,6]$  είναι περιττή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο  $(4,2)$ . Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  στο διάστημα  $[0,6]$ .

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$  στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το  $f(-4)$ .

(Μονάδες 12)



## 18 – 20267

## Θέμα 2

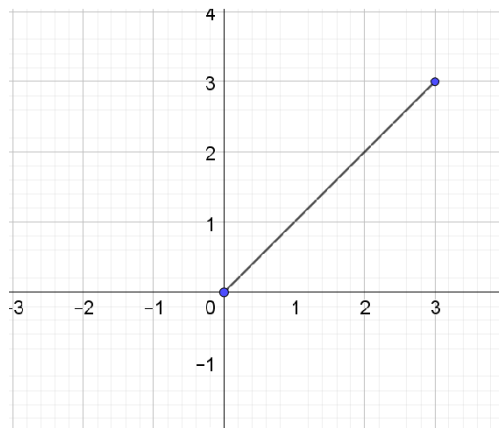
Μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το διάστημα  $[-3,3]$  είναι άρτια και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο  $(2,2)$ . Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  στο διάστημα  $[0,3]$ .

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$  στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το  $f(-2)$ .

(Μονάδες 12)

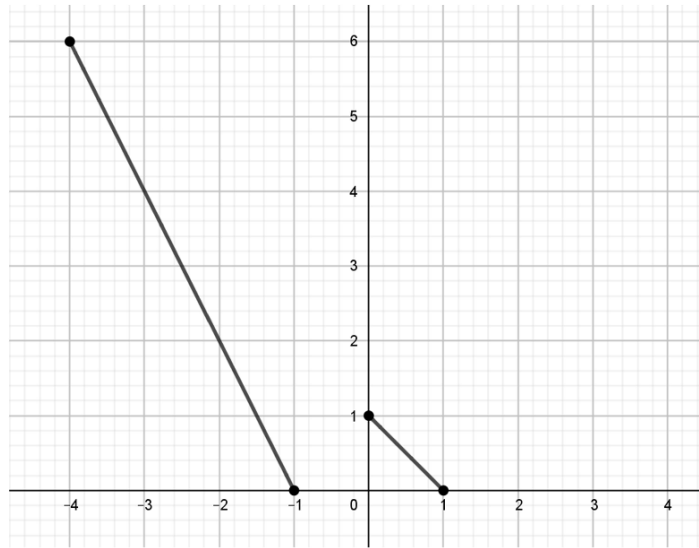




19 – 19026

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορισμένα τμήματα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης  $f$  με πεδίο ορισμού το διάστημα  $[-4, 4]$ .



α) Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας και να χαράξετε τα υπόλοιπα τμήματα της γραφικής παράστασης της  $f$ .

(Μονάδες 13)

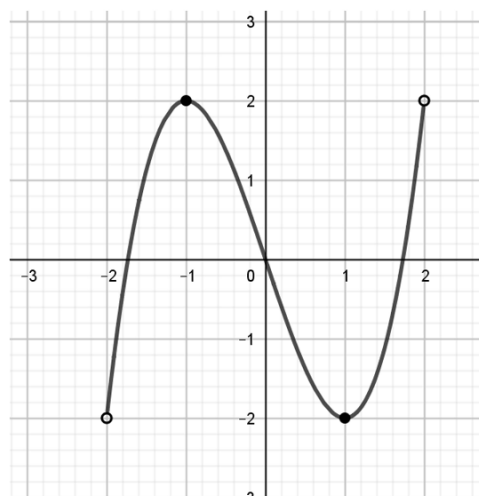
β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

20 – 19024

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  με πεδίο ορισμού το διάστημα  $(-2, 2)$ .



α) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της  $f$  καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών.

(Μονάδες 12)

21 – 19509

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία  $O(0,0), A(1,2), B(3,4)$  τα οποία ανήκουν στη γραφική παράσταση μίας περιττής συνάρτησης  $f$ , με πεδίο ορισμού τους πραγματικούς αριθμούς  $\mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες δύο ακόμα σημείων  $\Gamma$  και  $\Delta$ , τα οποία να ανήκουν στη γραφική παράσταση της  $f$ .

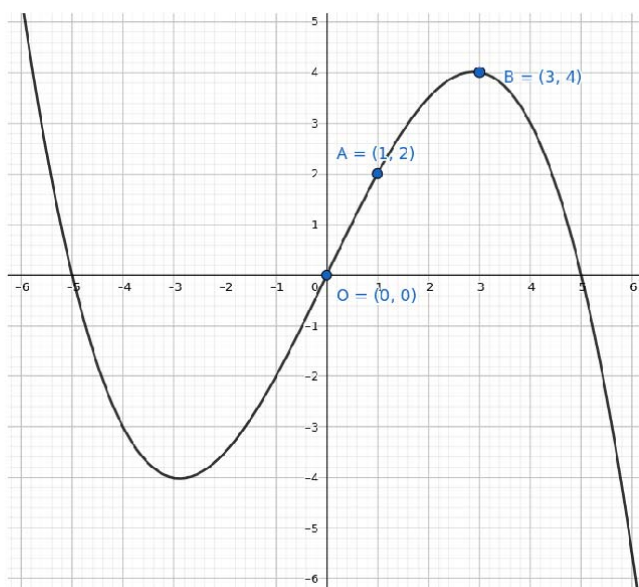
(Μονάδες 8)

β) Αν δίνεται ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως μονότονη, να βρείτε αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 8)

γ) Αν δίνεται ότι η συνάρτηση  $f$  δεν είναι γνησίως μονότονη και στο παρακάτω σχήμα δίνεται μέρος της γραφικής της παράστασης, να εξετάσετε σε ποια διαστήματα είναι γνησίως μονότονη και να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της σε καθένα από αυτά.

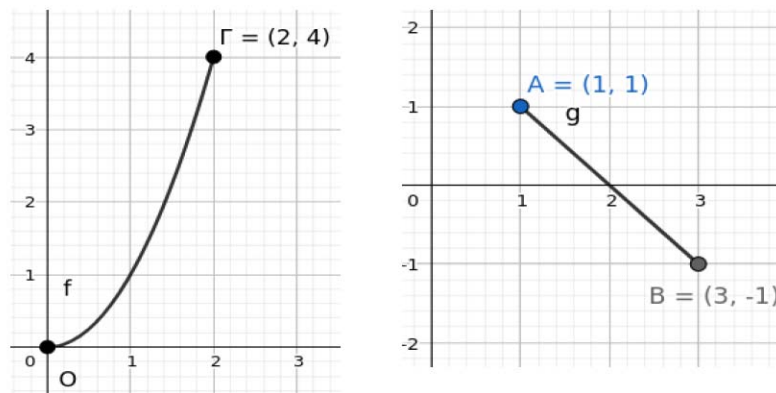
(Μονάδες 9)



22 – 19505

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ένα τμήμα (μέρος) της γραφικής παράστασης καθεμίας από τις συναρτήσεις  $f, g$  σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων .



α) Σε καθένα από τα δύο σχήματα φαίνεται η γραφική παράσταση για όλους τους αριθμούς  $x > 0$  για τους οποίους ορίζεται καθεμία από τις συναρτήσεις αυτές. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι περιττή και η  $g$  άρτια, να βρείτε τα πεδία ορισμού των δύο συναρτήσεων.

(Μονάδες 7)

β) Να συμπληρώσετε ολόκληρη τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  σε όλο το πεδίο ορισμού της, αν αυτή είναι περιττή.

(Μονάδες 7)

γ) Να συμπληρώσετε ολόκληρη τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  σε όλο το πεδίο ορισμού της, αν αυτή είναι άρτια.

(Μονάδες 6)

δ) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας των δύο συναρτήσεων  $f, g$ , όπως αυτές προέκυψαν από τα ερωτήματα β και γ.

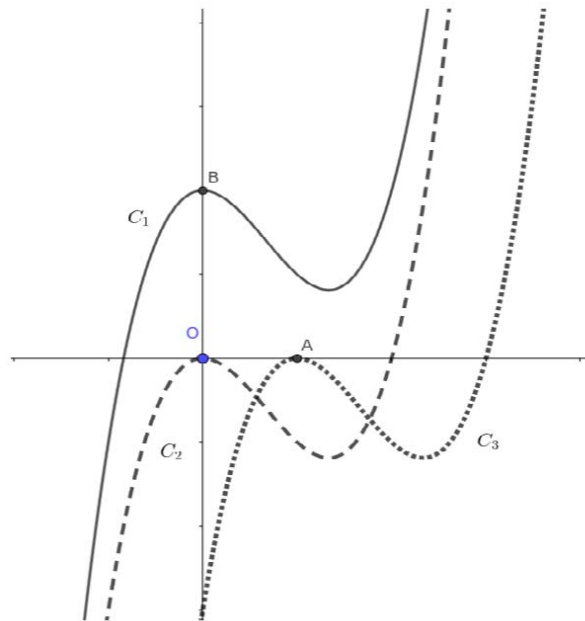
(Μονάδες 5)

## 2.2 Κατακόρυφη – Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης

23 – 21601

ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις  $C_1, C_2, C_3$ , των συναρτήσεων  $f, g, h$ , όχι αναγκαστικά με αυτήν την αντιστοίχιση.



α) Αν η μία γραφική παράσταση από αυτές προκύπτει από τη μετατόπιση μίας άλλης κατά μία μονάδα προς τα δεξιά, να βρείτε ποιες είναι αυτές οι γραφικές παραστάσεις.

(Μονάδες 12)

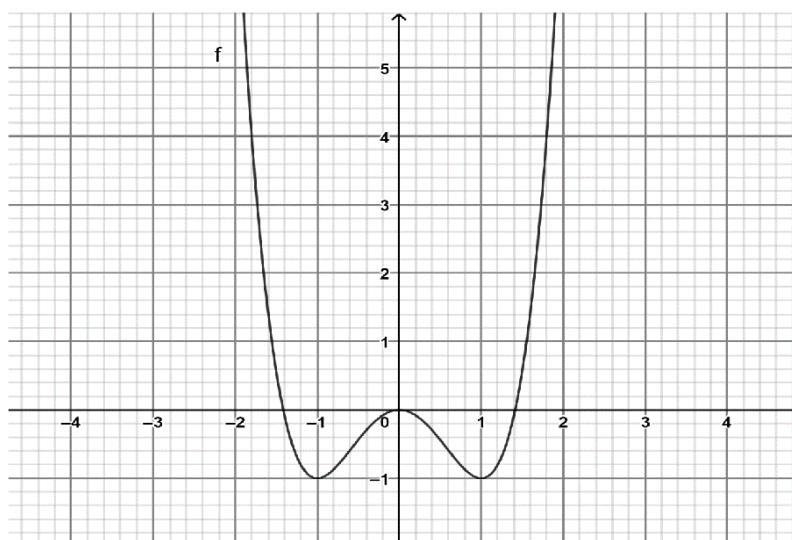
β) Αν η  $C_2$  είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = x^3 - 2x^2$ , να βρείτε ποια γραφική παράσταση αντιστοιχεί στην  $g(x) = x^3 - 2x^2 + 2$ .

(Μονάδες 13)

24 – 20436

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ .



α) Να μεταφέρετε στο τετραδιό σας το σχήμα και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = f(x) + 1$ .

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε ποια από τις παρακάτω συναρτήσεις έχει γραφική παράσταση που προκύπτει αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της  $f$  κατά δύο μονάδες προς τα κάτω και κατά μία μονάδα αριστερά. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

A.  $h_1(x) = f(x + 1) + 2$

B.  $h_2(x) = f(x + 1) - 2$

Γ.  $h_3(x) = f(x) - 2$

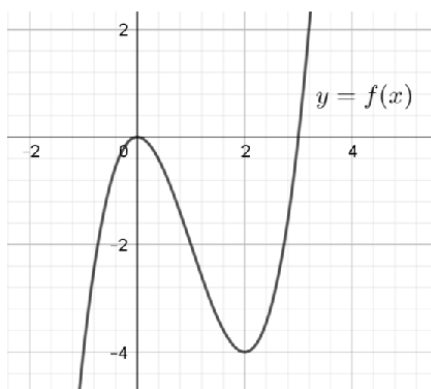
Δ.  $h_4(x) = f(x + 1)$

(Μονάδες 12)

25 – 20968

ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα 1, δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = x^3 - 3x^2$  με  $x \in \mathbb{R}$ .



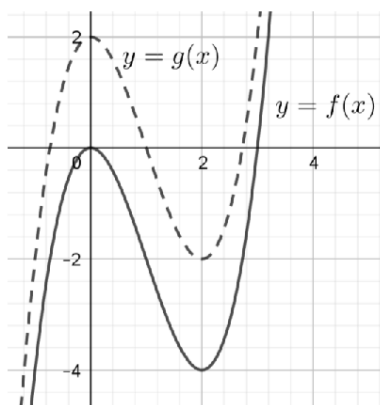
Σχήμα 1

α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 14)

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $g$  του σχήματος 2, η οποία προκύπτει με κατακόρυφη μετατόπιση της  $f$ .

(Μονάδες 11)



Σχήμα 2

26 – 20286

## ΘΕΜΑ 2

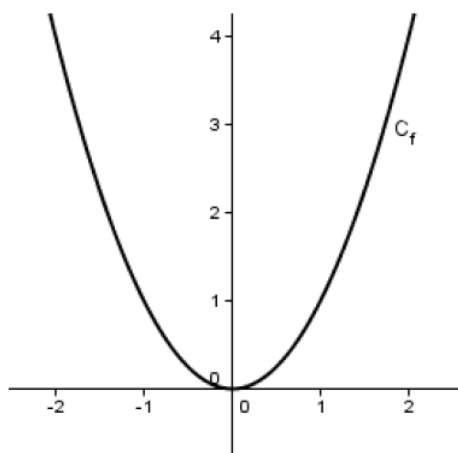
Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση

$C_f$  της συνάρτησης  $f(x) = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $f(x)$  είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $\phi(x) = x^2 + 1$



(Μονάδες 13)

27 – 36368

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -x^2 + 4x - 5$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = -(x-2)^2 - 1$ .

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι  $f(x) \leq -1$  και να βρείτε για ποια τιμή του  $x$  είναι  $f(x) = -1$ .

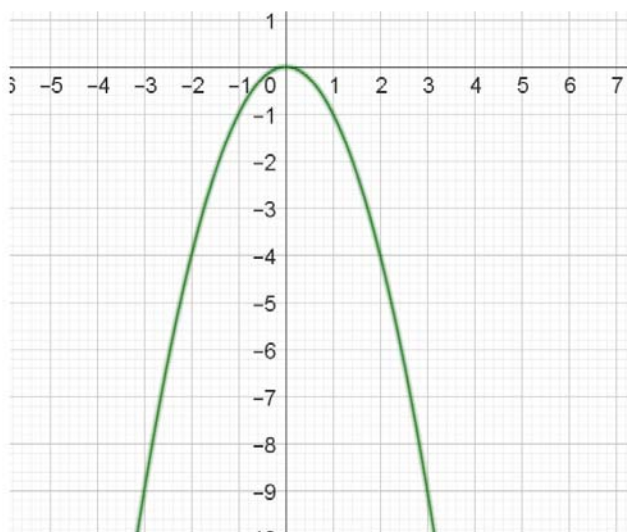
(Μονάδες 6)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η  $f$  παρουσιάζει μέγιστο το οποίο και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 6)

δ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της  $g(x) = -x^2$ . Με βάση αυτή να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

(Μονάδες 7)



## 3.1 Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας

28 – 36880

ΘΕΜΑ 2

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο δίνονται τα σημεία  $A(1,0)$ ,  $M(-0.6,-0.8)$  και

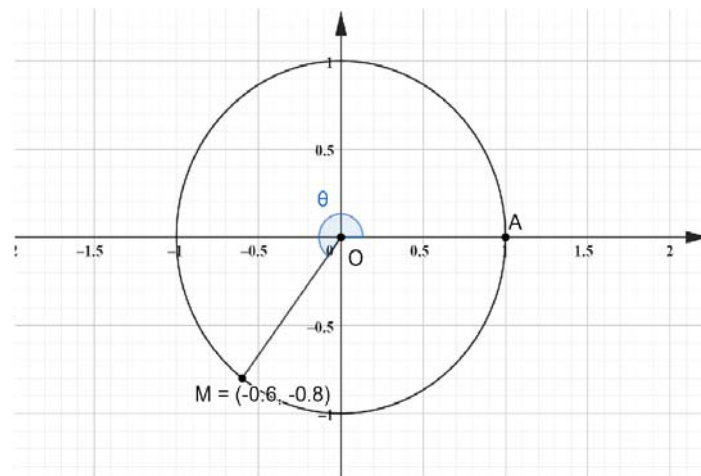
η μη κυρτή γωνία  $\theta = \widehat{AOM}$ . Να βρείτε :

α) το  $\sin\theta$  και το  $\eta\mu\theta$ .

(Μονάδες 13)

β) το  $\eta\mu(360^\circ + \theta)$  και το  $\sin(2\pi + \theta)$ .

(Μονάδες 12)



29 – 36820

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα έχει σχεδιασθεί σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων ο τριγωνομετρικός κύκλος και η γωνία  $\hat{\omega} = \widehat{AOM}$ .

α) Να βρείτε τους αριθμούς  $\eta\mu\omega$  και  $\sin\omega$ .

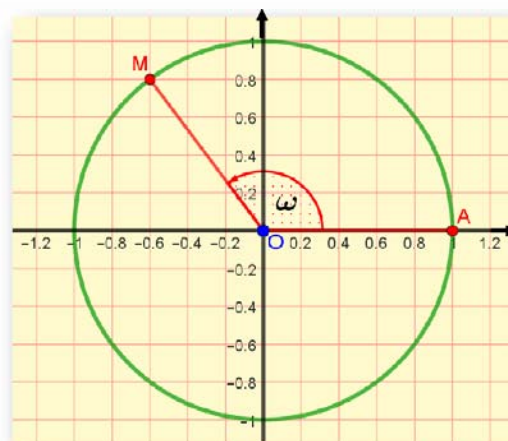
(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε, με δικαιολόγηση, τους αριθμούς  $\eta\mu(720^\circ + \hat{\omega})$  και  $\sin(-360^\circ + \hat{\omega})$ .

(Μονάδες 8)

γ) Σε ποιο τεταρτημόριο θα βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας  $180^\circ + \hat{\omega}$ ;

(Μονάδες 5)



30 – 36748

## ΘΕΜΑ 2

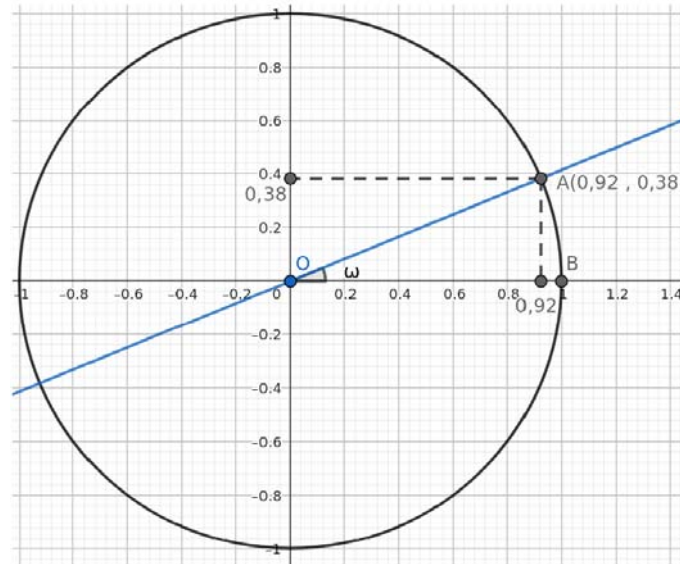
Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο έχει σχεδιαστεί η γωνία  $\omega$ .

α) Να υπολογίσετε το  $\eta\mu\omega$  και το  $\sigma\upsilon\nu\omega$ .

(Μονάδες 12)

β) Υπάρχει γωνία  $\varphi$  στο 2ο τεταρτημόριο ώστε  $\sigma\upsilon\nu\varphi = \sigma\upsilon\nu\omega$ ;

(Μονάδες 13)

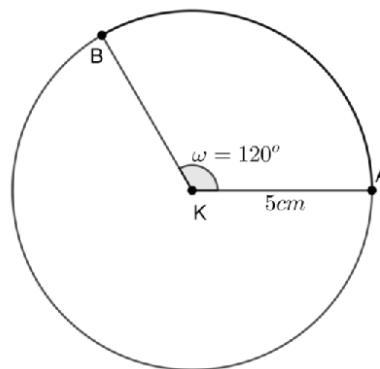


31 – 36389

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος με κέντρο  $K$  και ακτίνα  $5\text{cm}$ . Επίσης, δίνεται τόξο  $AB$  που αντιστοιχεί σε γωνία

$$\hat{\omega} = 120^\circ.$$



α) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας  $\omega$  σε  $\text{rad}$ .

(Μονάδες 12)

β) Αν το μέτρο της γωνίας  $\omega$  σε  $\text{rad}$  είναι  $\frac{2}{3}\pi$ , να βρείτε το μήκος  $S$  του τόξου  $AB$ .

(Μονάδες 13)



32 – 36358

## ΘΕΜΑ 2

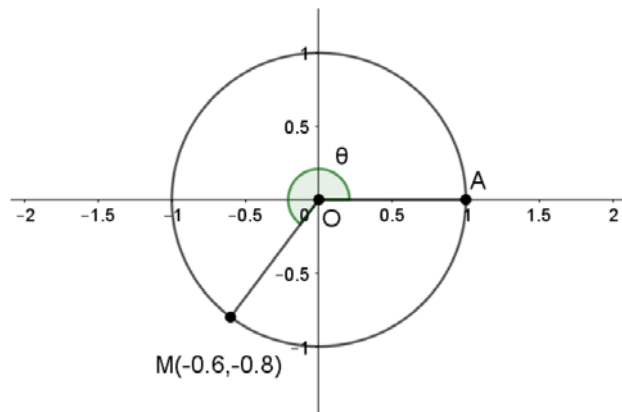
Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα σημεία  $A(1,0)$ ,  $M(-0.6,-0.8)$  και η μη κυρτή γωνία  $\theta = \widehat{AOM}$ . Να βρείτε:

α) Να βρείτε το  $\sin\theta$  και το  $\eta\mu\theta$ .

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το  $\eta\mu(2\pi + \theta)$ .

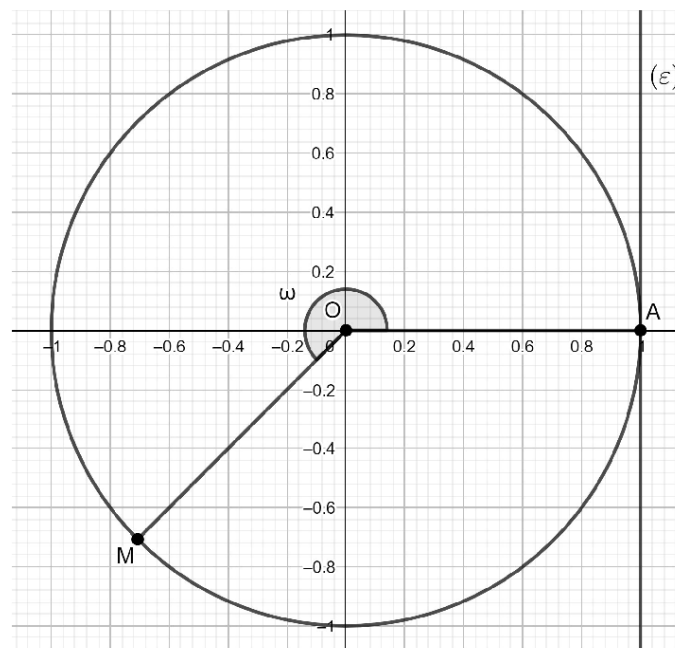
(Μονάδες 12)



33 – 36335

## ΘΕΜΑ 2

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία  $\hat{\omega}$  και φέραμε την εφαπτομένη  $(\varepsilon)$  του κύκλου στο σημείο A.



Με βάση το σχήμα:

α)

i. Είναι ο αριθμός  $\sin \omega$  θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

ii. Είναι ο αριθμός  $\eta\mu\omega$  θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

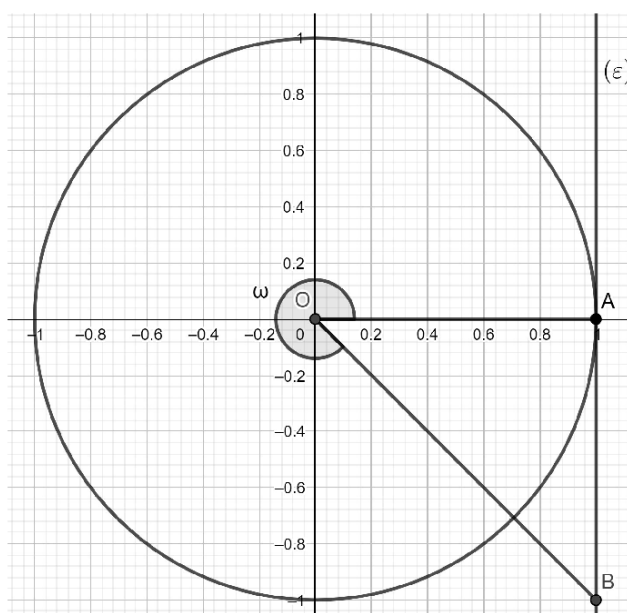
β) Να βρείτε την  $\varepsilon\varphi\omega$ .

(Μονάδες 9)

34 – 36334

### ΘΕΜΑ 2

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία  $\hat{\omega}$  και φέραμε την εφαπτομένη  $(\varepsilon)$  του κύκλου στο σημείο A.



Με βάση το σχήμα:

α)

i. Είναι ο αριθμός  $\sin \omega$  θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

ii. Είναι ο αριθμός  $\eta\mu\omega$  θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

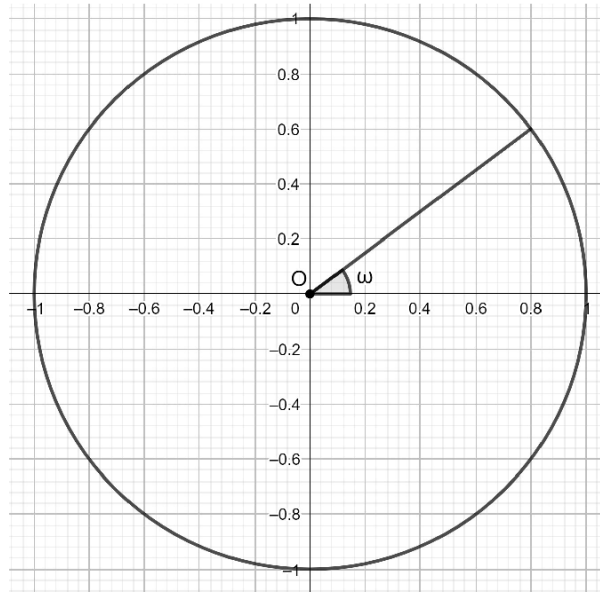
β) Να βρείτε την  $\varepsilon\varphi\omega$ .

(Μονάδες 9)

35 – 35618

## ΘΕΜΑ 2

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία  $\hat{\omega}$ .



α) Με την βοήθεια του σχήματος να βρείτε το  $\text{συν}\omega$  και το  $\eta\mu\omega$ . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Αν  $\eta\mu\omega = 0,6$  και  $\text{συν}\omega = 0,8$ , να βρείτε το  $\eta\mu(-3 \cdot 360^\circ + \omega)$  και το  $\text{συν}(-3 \cdot 360^\circ + \omega)$ .

(Μονάδες 13)

36 – 35617

## ΘΕΜΑ 2

Έστω  $\theta$  μια γωνία με  $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ , για την οποία ισχύει  $\eta\mu\theta^\circ = 0,8$  και  $\text{συν}\theta^\circ = 0,6$ .

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η  $\theta$  είναι γωνία του πρώτου τεταρτημόριου του τριγωνομετρικού κύκλου.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης  $A = \text{συν}\theta^\circ - \text{συν}(2 \cdot 360^\circ + \theta^\circ)$ .

(Μονάδες 15)

37 – 20994

## ΘΕΜΑ 2

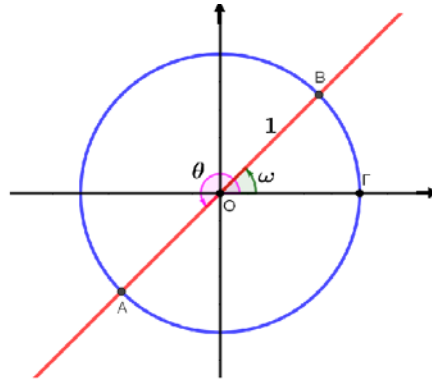
Θεωρούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο και τα σημεία του  $A$  και  $B$ , τα οποία είναι συνευθειακά με την αρχή  $O$  των αξόνων. Γνωρίζουμε ότι  $\hat{\omega} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$ .

α) Να βρείτε τους αριθμούς  $\eta\mu\omega$  και  $\text{συν}^2\omega$ .

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε μια γωνία  $\theta$ , σε  $\text{rad}$ , της οποίας η αρχική πλευρά είναι η  $OG$  και η τελική πλευρά είναι η  $OA$ .

(Μονάδες 12)



38 – 21118

ΘΕΜΑ 2

Μία γωνία  $\omega$  είναι ίση με 2 ακτίνια.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία  $\omega$  βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο του τριγωνομετρικού κύκλου.

(Μονάδες 13)

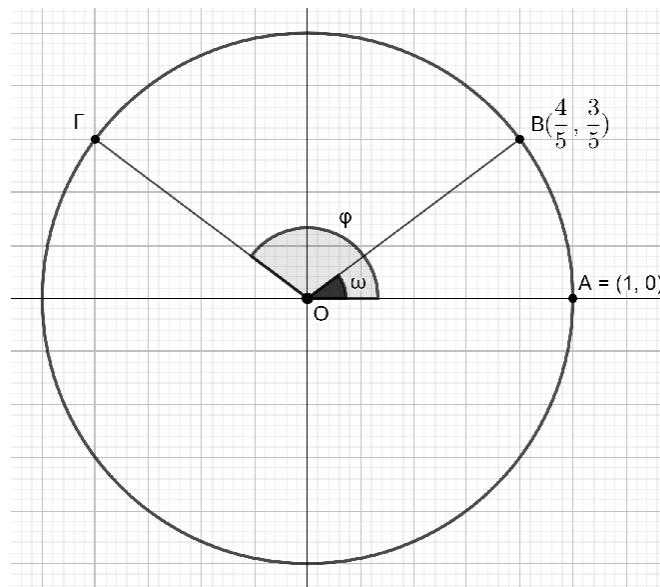
β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία  $\omega$ .

(Μονάδες 12)

39 – 36546

ΘΕΜΑ 4

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο έχουμε  $\widehat{A\hat{O}B} = \omega$  και  $\widehat{A\hat{O}\Gamma} = \varphi$ . Το σημείο  $\Gamma$  είναι συμμετρικό του  $B\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$  ως προς τον  $y'y$  άξονα.



α) Να βρείτε το  $\sigma\upsilon\nu\omega$  και το  $\eta\mu\omega$ .

(Μονάδες 6)

β)

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $\Gamma$ .

(Μονάδες 2)

ii. Να βρείτε το  $\sigma\upsilon\nu\varphi$  και το  $\eta\mu\varphi$ .

(Μονάδες 6)

γ)

i. Να φέρετε τον άξονα των εφαπτομένων και να σημειώσετε σε αυτόν τα σημεία

$E(1, \varepsilon\varphi\omega)$  και  $E'(1, \varepsilon\varphi\varphi)$ . Αν  $\varepsilon\varphi\omega = \frac{3}{4}$ , να βρείτε την  $\varepsilon\varphi\varphi$ .

(Μονάδες 7)

ii. Τι παρατηρείτε για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών  $\omega$  και  $\varphi$ ;

(Μονάδες 4)

### 3.2 Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

40 – 36704

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -3\sigma\upsilon\nu x, x \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f$ .

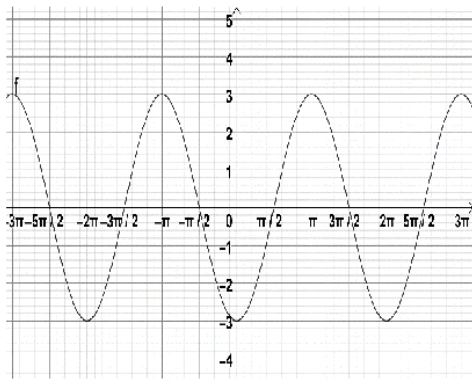
(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης  $f$ .

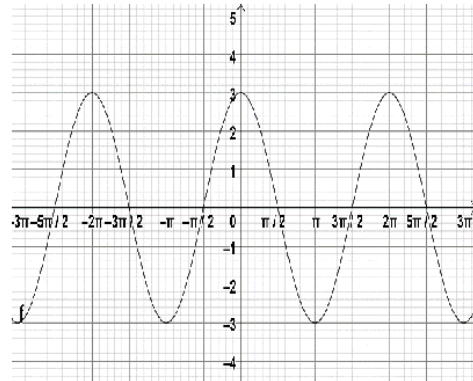
(Μονάδες 7)

γ) Από τις παρακάτω τέσσερις γραφικές παραστάσεις μία μόνο αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της  $f$ , να επιλέξετε αυτή που αντιστοιχεί στη συνάρτηση  $f(x) = -3\sigma\upsilon\nu x$  και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

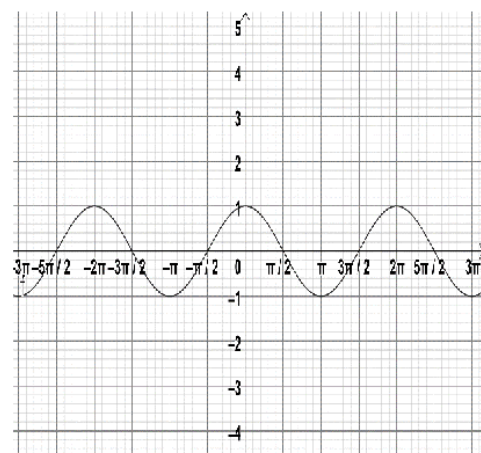
Α)



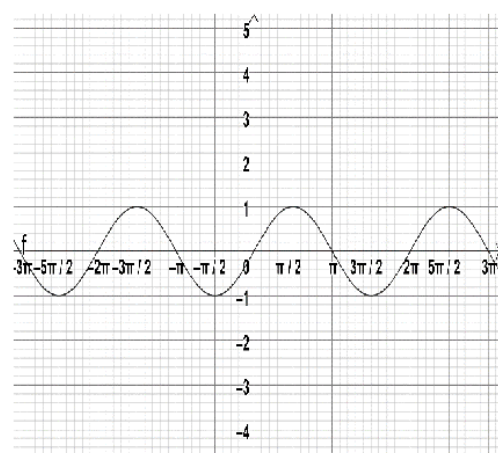
Β)



Γ)



Δ)



(Μονάδες 10)

### 3.4 Οι Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

41 – 36701

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 3\sin 2x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 12)

42 – 36364

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -3 \cdot \eta\mu x$ .α) Να βρείτε την περίοδο  $T$  της  $f$ .

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της  $f$ .

(Μονάδες 10)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$  στο  $[0, 2\pi]$ .

(Μονάδες 10)

43 – 36363

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2 \cdot \eta\mu x$ .α) Να βρείτε την περίοδο  $T$  της  $f$ .

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της  $f$ .

(Μονάδες 10)

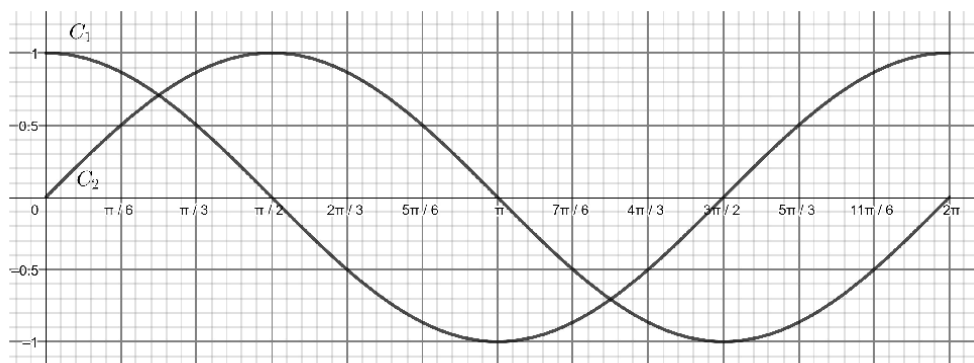
γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$  στο  $[0, 2\pi]$ .

(Μονάδες 10)

44 – 35983

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε σχεδιάσει τις γραφικές παραστάσεις  $C_1$  και  $C_2$  δυο συναρτήσεων στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ .



α) ) Αν οι γραφικές παραστάσεις είναι των συναρτήσεων  $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$  και  $g(x) = \eta\mu x$ , ποια από τις  $C_1, C_2$  είναι η γραφική παράσταση της  $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$  και ποια της  $g(x) = \eta\mu x$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

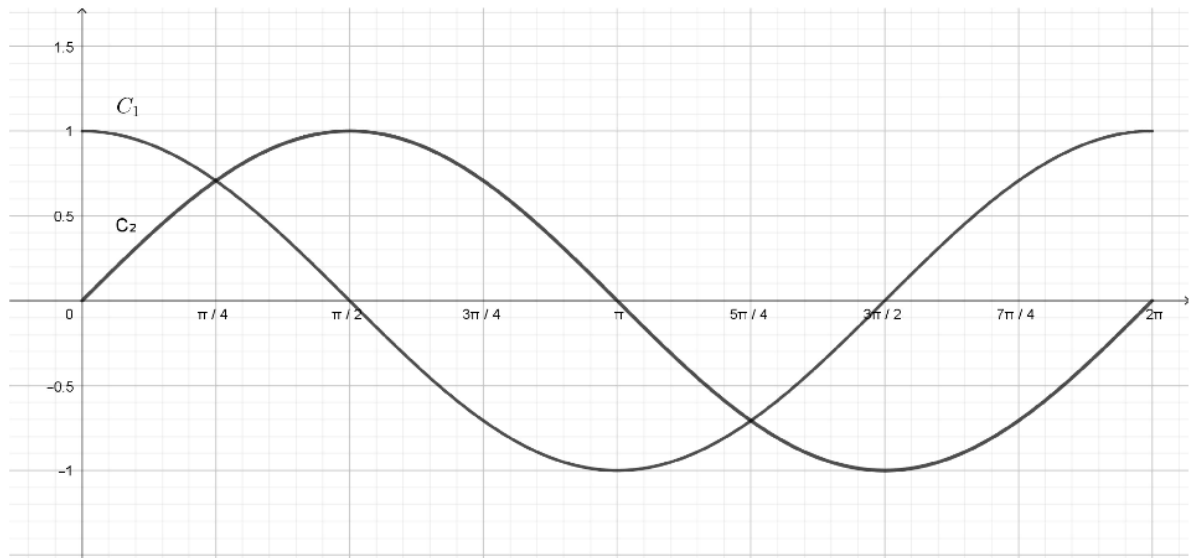
β) Με την βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τις τιμές  $g\left(\frac{\pi}{6}\right)$  και  $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ .

(Μονάδες 12)

45 – 35548

#### ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε σχεδιάσει δύο γραφικές παραστάσεις  $C_1$  και  $C_2$  στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ .



α) Αν οι γραφικές παραστάσεις είναι των συναρτήσεων  $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$  και  $g(x) = \eta\mu x$ , ποια από τις  $C_1, C_2$  είναι η γραφική παράσταση της  $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$  και ποια της  $g(x) = \eta\mu x$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

β) Με την βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής των  $C_1, C_2$  στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ .

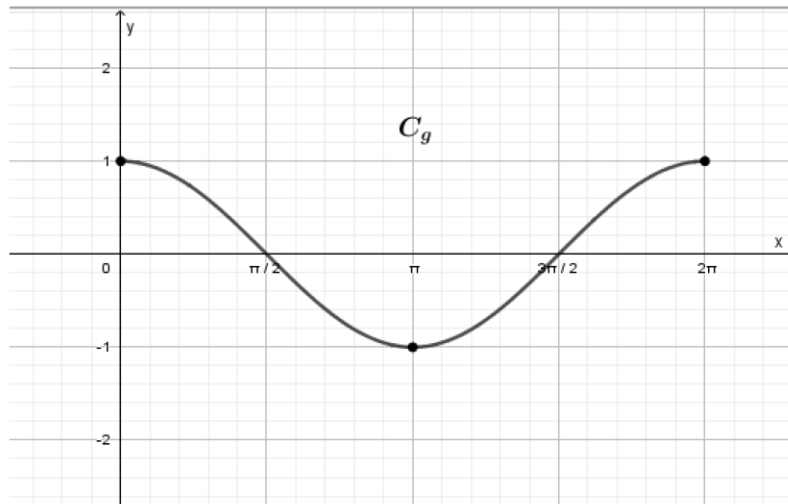
(Μονάδες 15)

46 – 21789

#### ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1$ ,  $x \in [0, 2\pi]$  και η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ .





α) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 12)

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f$  καθώς επίσης και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών.

(Μονάδες 13)

47 – 21600

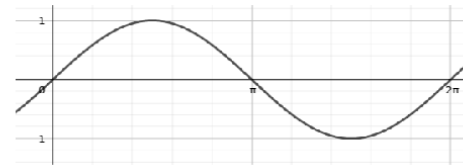
#### ΘΕΜΑ 2

Στα παρακάτω 4 σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

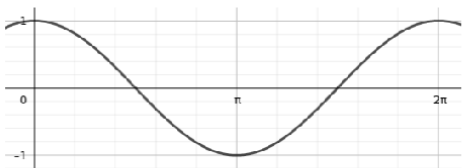
$f(x) = \eta\mu x$ ,  $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ ,  $h(x) = \eta\mu 2x$ ,  $\varphi(x) = \sigma\upsilon\nu(2x)$ , όχι με αυτήν τη σειρά αναγκαία.



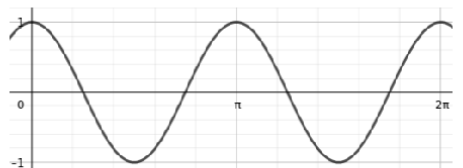
Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3



Σχήμα 4

α) Να αιτιολογήσετε γιατί οι περίοδοι των παραπάνω συναρτήσεων είναι:  $T_f = T_g = 2\pi$ ,

$$T_h = T_\varphi = \pi.$$

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ποιο από τα τέσσερα σχήματα αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της

$$h(x) = \eta\mu(2x).$$

(Μονάδες 13)

48 – 20397

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 3\eta\mu x, x \in [0, 2\pi]$ .

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας τον παρακάτω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$f(x)$					

(Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της  $f(x)$  στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ .

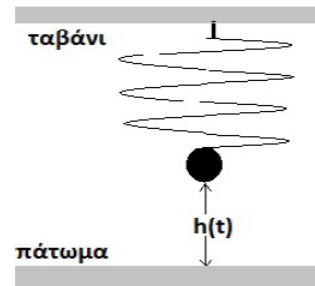
(Μονάδες 15)

49 – 36949

ΘΕΜΑ 4

Μια μπάλα που κρέμεται με ένα ελατήριο από το ταβάνι ανεβοκατεβαίνει και η απόστασή της  $h$  σε μέτρα από το πάτωμα τη χρονική στιγμή  $t$  δίνεται από τη σχέση  $h(t) = \alpha + 2\eta\mu(\pi t)$ , όπου  $t$  ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.

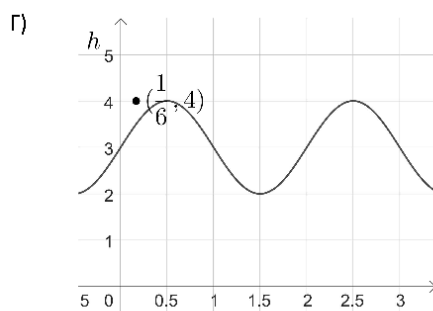
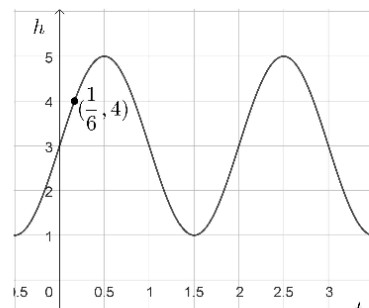
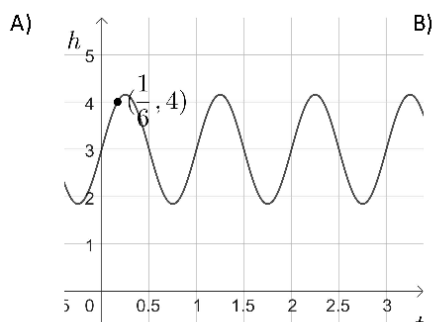
Αν τη χρονική στιγμή  $t = \frac{1}{6}$  η μπάλα απέχει από το πάτωμα 4 μέτρα, τότε:



α) Να δείξετε ότι  $\alpha = 3$  και ότι η περίοδος της ταλάντωσης είναι  $T = 2$ .

(Μονάδες 8)

β) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις αντιστοιχεί στη συνάρτηση  $h$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



(Μονάδες 10)

γ) Με βάση τη γραφική παράσταση που επιλέξατε στο ερώτημα β), ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη απόσταση της μπάλας από το έδαφος; Πόση είναι η συνολική απόσταση που διανύει η μπάλα κατά τη διάρκεια μιας ταλάντωσης;

(Μονάδες 7)

50 – 36850

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα έχει σχεδιασθεί στο διάστημα  $\left[0, \frac{4\pi}{3}\right]$  η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x)$  όπου  $\rho > 0, \omega > 0, x \in \mathbb{R}$ .

Γνωρίζουμε ότι τα σημεία  $A, B, \Gamma$  έχουν τις εξής συντεταγμένες:

$$A\left(\frac{\pi}{6}, 2\right), B\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right), \Gamma\left(\frac{4\pi}{3}, 0\right).$$

α) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = 2 \cdot \eta\mu(3x)$ .

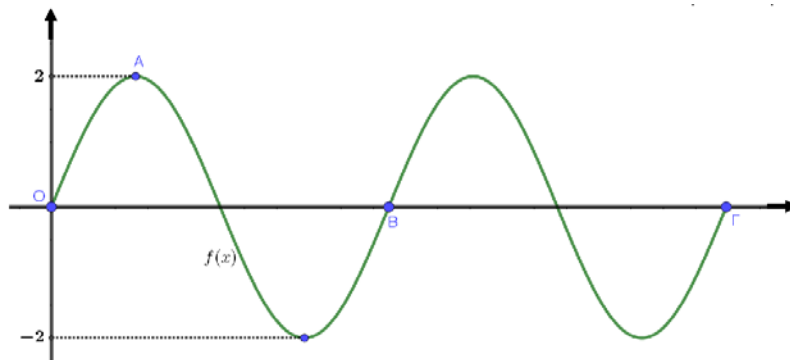
(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τους αριθμούς  $f\left(\frac{\pi}{12}\right), f\left(\frac{\pi}{9}\right)$ .

(Μονάδες 8)

γ) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας το παρακάτω σχήμα, στο οποίο να σχεδιάσετε και την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$  στο διάστημα  $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}\right]$ .

(Μονάδες 8)

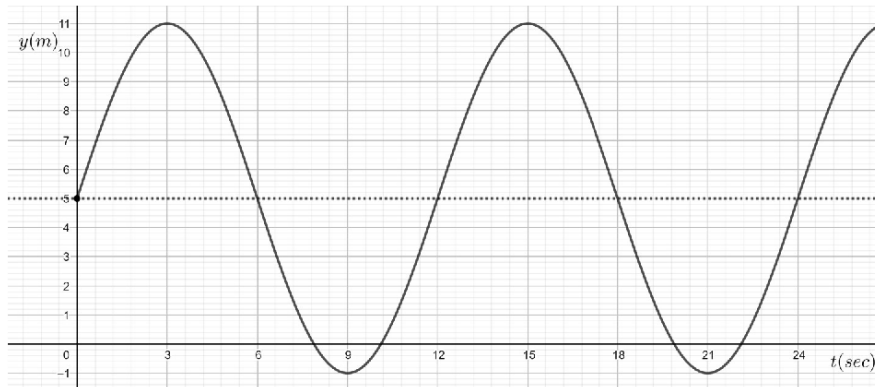


51 – 36792

ΘΕΜΑ 4

Η απόσταση  $y$ , σε μέτρα, της άκρης του φτερού ενός νερόμυλου από την επιφάνεια του νερού, δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου  $t$ , σε δευτερόλεπτα, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων.





α) Με βάση το σχήμα να βρείτε:

i. Την περίοδο  $T$  της συνάρτησης.

(Μονάδες 4)

ii. Ποια χρονική στιγμή  $t \in [0, 12]$  η άκρη του φτερού έχει την μεγαλύτερη απόσταση από την επιφάνεια του νερού και ποια είναι η απόσταση αυτή.

(Μονάδες 6)

iii. Ποια χρονική  $t \in [0, 12]$  η άκρη του φτερού βρίσκεται 1 μέτρο κάτω από την επιφάνεια του νερού.

(Μονάδες 3)

β) Να βρείτε τη διάμετρο του νερόμυλου.

(Μονάδες 4)

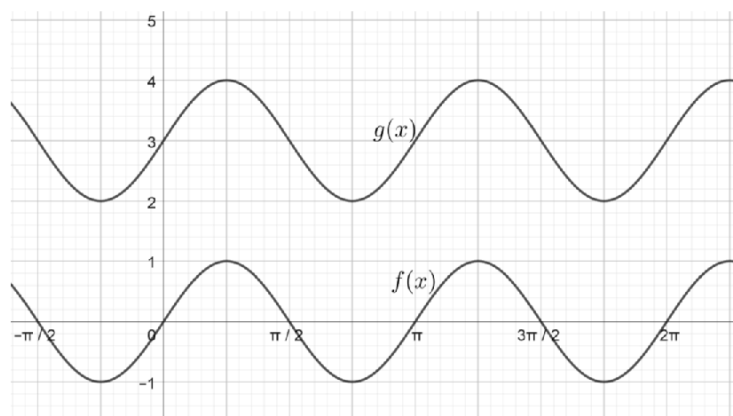
γ) Αν η συνάρτηση είναι της μορφής  $y = \rho \eta\mu(\omega t) + 5$ ,  $\rho, \omega > 0$ , να βρείτε τους αριθμούς  $\omega$  και  $\rho$ .

(Μονάδες 8)

52 – 36395

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης  $f$  με τύπο  $f(x) = \eta\mu(\omega x)$  και της συνάρτησης  $g$  με τύπο  $g(x) = \eta\mu(\omega x) + c$  με  $\omega, c \in \mathbb{R}$ .



α) Να βρείτε:

i. την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή, καθώς και την περίοδο  $T$  της συνάρτησης  $f$ ,  
(Μονάδες 7)

ii. την τιμή της παραμέτρου  $\omega$ .  
(Μονάδες 7)

β) Αν  $\omega = 2$  και η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  προκύπτει από μετατόπιση της γραφικής παράστασης της  $f$ , τότε:

i. να προσδιορίσετε το είδος της μετατόπισης με την οποία προκύπτει η γραφική παράσταση της  $g$  από τη γραφική παράσταση της  $f$ ,  
(Μονάδες 6)

ii. να βρείτε την τιμή της παραμέτρου  $c$  και τον τύπο της συνάρτησης  $g$ .  
(Μονάδες 5)

53 - 21376

ΘΕΜΑ 4

Το βάθος  $y$ , σε μέτρα, του νερού σε ένα λιμάνι επηρεάζεται από το φαινόμενο της παλίρροιας κατά τη διάρκεια μιας ημέρας (εντός 24 ωρών) και δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου  $t$  (σε ώρες) από τη σχέση:  $y = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 4$ , με  $0 \leq t \leq 24$ .

α)

i. Να αιτιολογήσετε γιατί η περίοδος της συνάρτησης είναι  $T = 12$ .  
(Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

$t$	0	3	6	9	12
$y$					

(Μονάδες 5)

iii. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της  $y = 2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 4$ , με  $0 \leq t \leq 24$ .

(Μονάδες 6)

β)

i. Ποιο θα είναι το βάθος του νερού στις 12 το μεσημέρι, δηλαδή τη χρονική στιγμή  $t = 12$ ;

(Μονάδες 4)

ii. Ένα μεγάλο πλοίο χρειάζεται τουλάχιστον 4 μέτρα βάθος νερού για να δέσει στο λιμάνι. Στη διάρκεια ποιού χρονικού διαστήματος από τις 12 το μεσημέρι και μετά θα μπορεί να δέσει με ασφάλεια;

(Μονάδες 5)

## 4.1 Πολυώνυμα

54 – 35980

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x) = -2x^4 + 4x^2 + 2(x^4 - 1) + 2x \text{ και } Q(x) = 4x^2 + \alpha x - 2, \alpha \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι  $P(x) = 4x^2 + 2x - 2$ .

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ , ώστε τα πολυώνυμα  $P(x)$  και  $Q(x)$  να είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

55 – 20723

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2 \text{ και } Q(x) = -2x^2(x - 2) + 2.$$

α) Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου  $P(x)$ ;

(Μονάδες 5)

β) Τα πολυώνυμα  $P(x)$  και  $Q(x)$  είναι ίσα; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

γ) Να βρείτε τη τιμή του πολυωνύμου  $Q(x)$  για  $x = 1$ .

(Μονάδες 8)

56 – 19025

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2(x^3 - 1) + 9 \text{ και } Q(x) = \alpha x^2 + 7, \alpha \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι  $P(x) = 4x^2 + 7$ .

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ , ώστε τα πολυώνυμα  $P(x)$  και  $Q(x)$  να είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

## 4.2 Διαίρεση Πολυωνύμων

57 – 36394

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 - x^2 - 4$ .α) Να εξετάσετε αν το  $x - 2$  είναι παράγοντας του  $P(x)$ .

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης  $P(x) : (x - 2)$ .

(Μονάδες 13)

## 58 – 36360

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ .

α) Να αποδείξετε ότι το  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $x-1$ .

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης  $P(x) : (x-2)$ .

(Μονάδες 12)

## 59 – 20428

## ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα πολυώνυμα  $P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$  και  $\delta(x) = x + 1$ .

α) Να κάνετε τη διαίρεση  $P(x) : \delta(x)$ .

(Μονάδες 15)

β) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του α) ερωτήματος.

(Μονάδες 10)

## 60 – 20382

## ΘΕΜΑ 2

Η διαίρεση ενός πολυωνύμου  $P(x)$  με το  $x-3$  έχει ηλίκο  $x^2 + 2$  και υπόλοιπο 4.

α) Να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του  $P(x)$  με το  $x-3$  και να αποδείξετε ότι  $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2$ .

(Μονάδες 13)

β) Είναι το  $x = 3$  ρίζα του πολυωνύμου  $P(x)$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

## 61 – 20966

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^3 - 16x^2 + 4x - 27$ .

α) Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το  $(x-8)$  είναι  $v = 5$ .

(Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε το  $P(8)$ .

(Μονάδες 10)

## 62 – 20556

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 2(x-1)^{20} - 3(x-1)^{10} + 5x^2 - 3x - 2$ .

α) Να υπολογίσετε την τιμή  $P(1)$ .

(Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $x-1$ .

(Μονάδες 12)

63 - 36832

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 3x^3 - x^2 + 3x - 1$ .

α) Να δείξετε ότι το  $P(x)$  δεν έχει ακέραιες ρίζες.

(Μονάδες 8)

β) Να κάνετε τη διαίρεση  $P(x) : (3x - 1)$  και να δείξετε ότι  $P(x) = (3x - 1)(x^2 + 1)$ .

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση  $P(x) > 0$ .

(Μονάδες 9)

### 4.3 Πολυωνυμικές Εξισώσεις και Ανισώσεις

64 - 36359

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$ .

α) να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης  $P(x) : (x - 1)$ .

(Μονάδες 10)

β) να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 2$ .

(Μονάδες 15)

65 - 21910

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα πολυώνυμα  $P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$  και  $\delta(x) = x + 1$ .

α) Να βρείτε το πηλίκο  $\pi(x)$  και το υπόλοιπο  $\upsilon(x)$  της διαίρεσης  $P(x) : \delta(x)$ .

(Μονάδες 15)

β) Να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 1$ .

(Μονάδες 10)

66 - 21317

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση  $8x^4 - 9x + 1 = 0$ .

α) Να αποδείξετε ότι έχει ρίζα τον αριθμό 1.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι δεν έχει άλλη ακέραια ρίζα.

(Μονάδες 13)

67 - 21315

ΘΕΜΑ 2

Έστω  $P(x)$  πολυώνυμο το οποίο έχει παράγοντα το  $x - 1$ . Αν η διαίρεση  $P(x) : (x - 1)$  δίνει πηλίκο  $x^2 + 1$ , τότε:

α) Να αιτιολογήσετε γιατί  $P(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την ανίσωση  $P(x) \leq 0$ .

(Μονάδες 12)



68 – 15619

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι:  $2x^3 + x^2 - x = x(2x^2 + x - 1)$ .

(Μονάδες 10)

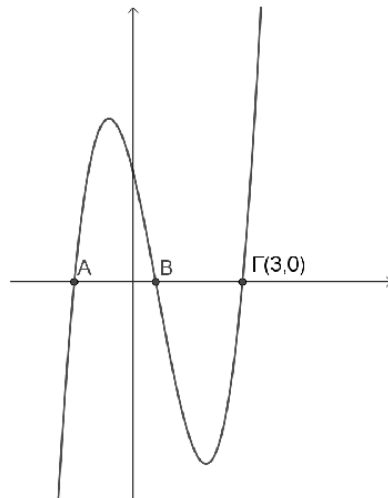
β) Να λύσετε την εξίσωση  $2x^3 + x^2 - x = 0$ .

(Μονάδες 15)

69 – 36948

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης

 $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + ax + \beta$  με  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  και  $4 < \beta < 8$ .

α)

i. Να αιτιολογήσετε γιατί ο 3 είναι διαιρέτης του  $\beta$ .

(Μονάδες 3)

ii. Να δείξετε ότι  $\beta = 6$ .

(Μονάδες 3)

β) Αν  $f(1) = -4$ , να δείξετε ότι  $\alpha = -8$ .

(Μονάδες 5)

γ) Αν  $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 8x + 6$ , να δείξετε ότι  $f(x) = (x - 3)(2x^2 + 2x - 2)$ .

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων A και B.

(Μονάδες 7)

## 70 – 36947

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^3 + x^2 + \alpha x + \beta$ , με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $P(-1) = 6$  και  $P(2) = 12$ .

α)

i. Να δείξετε ότι οι αριθμοί  $\alpha, \beta$  είναι λύσεις του συστήματος  $\begin{cases} -\alpha + \beta = 7 \\ 2\alpha + \beta = -8 \end{cases}$   
(Μονάδες 3)

ii. Να υπολογίσετε τους αριθμούς  $\alpha, \beta$ .  
(Μονάδες 6)

β) Αν  $P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$ , να βρείτε το ηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης  $P(x) : (x + 2)$ .

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση  $(x + 2)(2x^2 - 3x + 1) < 0$ .

(Μονάδες 8)

## 71 – 36878

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$ .

α) Να δείξετε ότι το  $P(x)$  δεν έχει ακέραιες ρίζες.  
(Μονάδες 8)

β) Να κάνετε τη διαίρεση  $P(x) : (2x + 1)$  και να δείξετε ότι  $P(x) = (2x + 1)(x^2 + 1)$ .  
(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση  $P(x) < 0$ .  
(Μονάδες 9)

## 72 – 36705

## ΘΕΜΑ 4

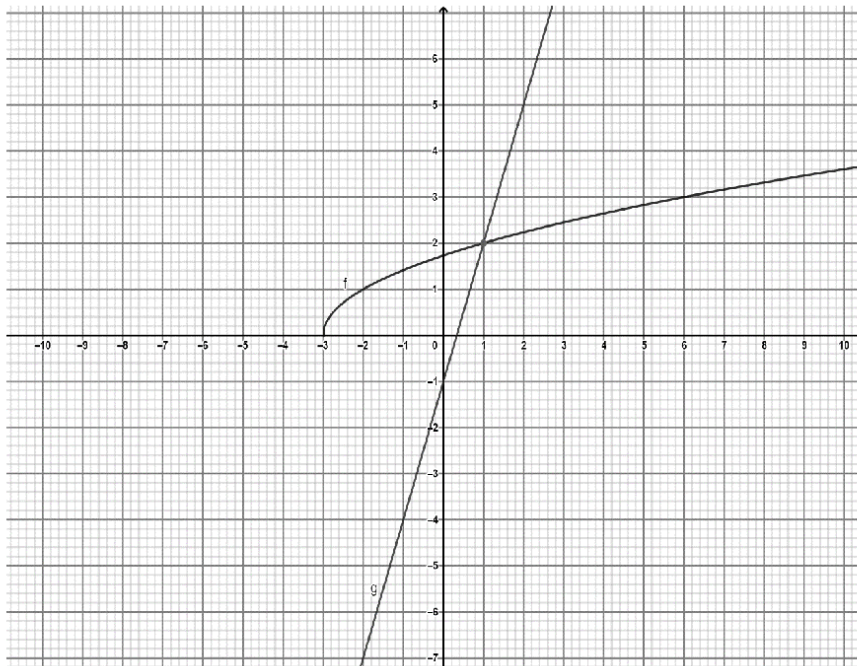
Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = \sqrt{x + 3}$  και

$$g(x) = 3x - 1.$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τη μονοτονία των συναρτήσεων  $f, g$ .  
(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = g(x)$ .  
(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση  $f(x) < g(x)$ .  
(Μονάδες 9)



73 – 19226

ΘΕΜΑ 4

Η διαίρεση  $P(x) : (x + 2)$  είναι τέλεια και έχει πηλίκο  $x^2 - 4x + 3$ .

α) Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης .

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση  $(x + 2) \cdot (x^2 - 4x + 3) = 0$ .

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση  $P(x) < 0$ .

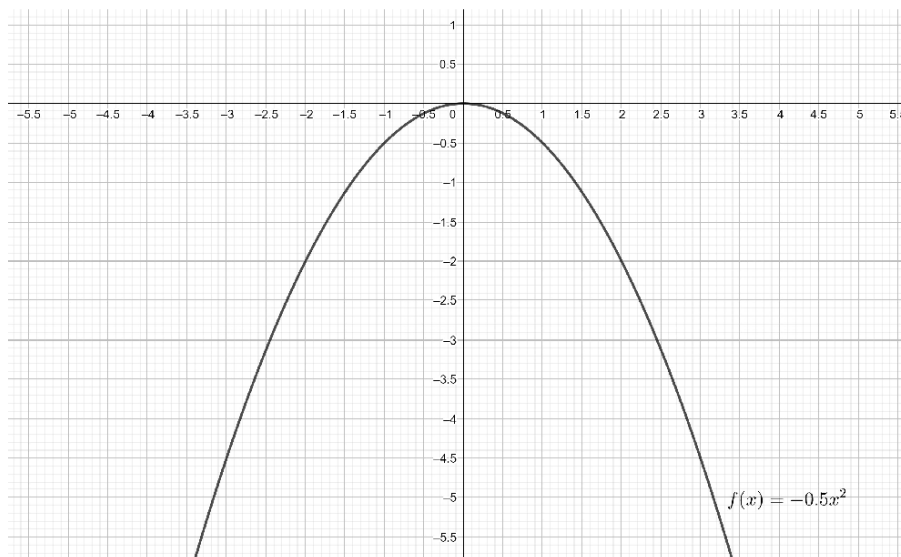
(Μονάδες 9)

74 – 36696

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = -0,5x^2, x \in \mathbb{R}.$$



α)

i. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

$x$	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = -0,5x^2$						
$g(x) = -0,5x^2 + 1$						

(Μονάδες 3)

ii. Στο παραπάνω σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = -0,5x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$ .

(Μονάδες 5)

iii. Να βρείτε με ποια μετατόπιση η γραφική παράσταση της  $f$  θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της  $g$ .

(Μονάδες 5)

75 – 36370

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 - x^2 + x + \lambda$ . Αν είναι γνωστό ότι το  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $x - 1$ , τότε:α) να αποδείξετε ότι το  $\lambda = -1$ .

(Μονάδες 8)

β) να αποδείξετε ότι  $P(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$ .

(Μονάδες 8)

γ) να λύσετε την ανίσωση  $P(x) \leq 0$ .

(Μονάδες 9)

76 – 36369

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$ .α) Να αποδείξετε ότι το  $P(x)$  δεν έχει ακέραιες ρίζες.

(Μονάδες 8)

β) Να κάνετε τη διαίρεση  $P(x) : (2x + 1)$  και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 8)

γ) Αν  $P(x) = (2x + 1)(x^2 + 1)$  να λύσετε την ανίσωση  $P(x) < 0$ .

(Μονάδες 9)

77 – 18991

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ .

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το πολυώνυμο  $x-1$  είναι παράγοντας του  $P(x)$ .

(Μονάδες 8)

β)

i. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης  $P(x) : (x-1)$ .

(Μονάδες 5)

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του βι) ερωτήματος.

(Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$

(Μονάδες 7)

78 – 21672

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^4 + \alpha x^2 + \beta$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Αν η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από τα σημεία  $A(0, -1)$  και  $B(-1, 0)$ , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 0$  και  $\beta = -1$ .

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της  $f$  που βρίσκονται κάτω από τον άξονα  $x'x$ .

(Μονάδες 10)

79 – 21905

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$ , με  $x \in \mathbb{R}$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αιτιολογήσετε γραφικά γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.

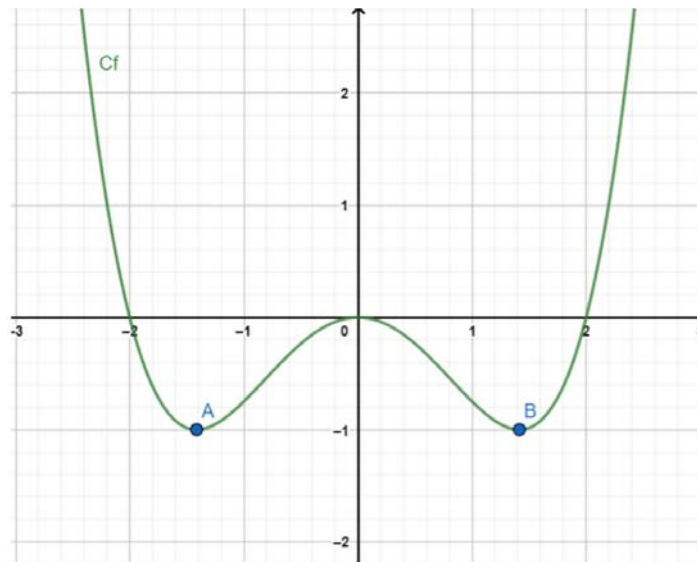
(Μονάδες 7)

β) Αν η τετμημένη του σημείου A είναι  $-\sqrt{2}$ , να βρείτε το είδος του (ολικού) ακρότατου, τις θέσεις που το αποκτά και τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 10)

γ) Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) < 0$ , με όποιο τρόπο θέλετε (αλγεβρικό ή γραφικό).

(Μονάδες 8)

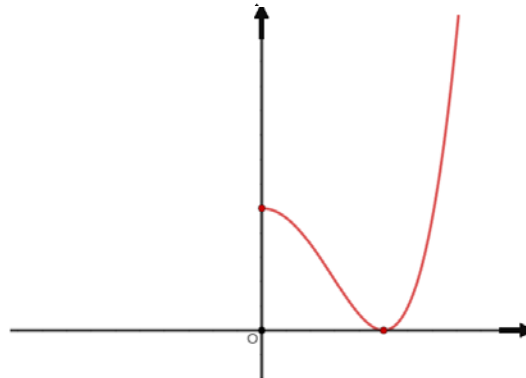


80 – 21635

## ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε την πολυωνυμική συνάρτηση  $P(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , η οποία γνωρίζουμε ότι είναι άρτια.

α) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας το παρακάτω σχήμα στο οποίο δίνεται η γραφική παράσταση της  $P(x)$  για  $x \geq 0$ . Να συμπληρώσετε το σχήμα με την γραφική παράσταση της  $P(x)$  για  $x < 0$ .



(Μονάδες 6)

β) Να λυθεί η εξίσωση  $P(x) = 0$ .

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός μηδέν είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $P(x)$ . Για ποιες τιμές του  $x$  επιτυγχάνεται αυτή η ελάχιστη τιμή;

(Μονάδες 10)

## 81 – 21090

## ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα πολυώνυμα  $P(x) = (2 - \alpha)x^3 - 3x^2 + 4x - 2$  και  $Q(x) = x^3 - 3x^2 + (\alpha^2 + 3)x - 2$

α) Να βρείτε το  $\alpha \in \mathbb{R}$  ώστε τα πολυώνυμα  $P(x)$  και  $Q(x)$  να είναι ίσα.

(Μονάδες 09)

β) Για  $\alpha = 1$  να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$ .

(Μονάδες 08)

γ) Για  $\alpha = 1$  να εξετάσετε αν το  $x+1$  είναι παράγοντας του  $Q(x)$ . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 08)

## 82 – 21320

## ΘΕΜΑ 4

Έστω  $P(x)$  ένα πολυώνυμο το οποίο όταν διαιρείται με το  $x^2 + x + 2$  δίνει πηλίκο  $x - 2$  και υπόλοιπο  $-2x + 4$ .

α) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης  $P(x) : (x^2 + x + 2)$ .

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι  $P(x) = x^3 - x^2 - 2x$ .

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το πηλίκο  $\frac{P(x)}{x}$  ( $x \neq 0$ ) είναι ίσο με ένα τριώνυμο και κατόπιν να λύσετε

την ανίσωση  $\frac{P(x)}{x} < 0$ .

(Μονάδες 10)

## 83 – 20665

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ .

α) Να βρείτε τις τιμές του πολυωνύμου  $P(0)$  και  $P(-1)$ .

(Μονάδες 5)

β) Ποιος από τους αριθμούς 0 και  $-1$  είναι ρίζα του πολυωνύμου; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης  $P(x) : (x + 1)$ .

(Μονάδες 6)

δ) Να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$ .

(Μονάδες 8)

## 84 – 20340

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ .

α) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο έχει παράγοντα το  $x + 1$ .

(Μονάδες 8)

β) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner, ή με όποιο άλλο τρόπο μπορείτε, να αποδείξετε ότι

$$P(x) = (x + 1)(x - 2)(x + 2)$$

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση  $P(x) \leq 0$ .

(Μονάδες 9)

## 85 – 21324

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 - \alpha x^2 - (\beta + 2)x + 6$  και το τριώνυμο  $x^2 - x - 6$ .

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

(Μονάδες 6)

β) Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα κάθε παράγοντα του τριωνύμου, τότε:

i. να αιτιολογήσετε γιατί  $P(3) = P(-2) = 0$ .

(Μονάδες 5)

ii. να αποδείξετε ότι  $\alpha = 2$  και  $\beta = 3$ .

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$ .

(Μονάδες 6)

## 86 – 20709

## ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης

$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και έστω  $\alpha, \beta, \gamma$  οι τετμημένες των σημείων στα οποία τέμνει η γραφική παράσταση τον άξονα  $x'x$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $P(3) = 0$ .

(Μονάδες 5)

β) Ναλυθεί η εξίσωση  $P(x) = 0$ .

(Μονάδες 9)

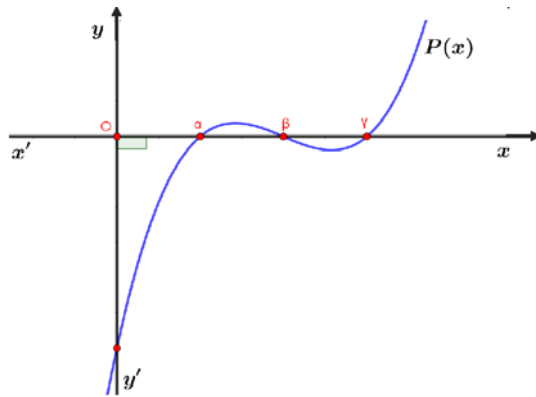
γ) Να βρείτε, με αιτιολόγηση, τα  $\alpha, \beta, \gamma$ .

(Μονάδες 6)

δ) Με τη βοήθεια του σχήματος, να λύσετε την ανίσωση  $P(x) < 0$ .

(Μονάδες 5)





87 – 20323

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ .

α) Να δείξετε ότι το  $x - 2$  είναι παράγοντας του πολυωνύμου.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$ .

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση  $(x - 2)(x^2 - 2x - 3) > 0$ .

(Μονάδες 9)

88 – 20433

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ .

α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο  $P(x)$  έχει ρίζα τον αριθμό 1.

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$ .

(Μονάδες 9)

γ) Αν  $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 1)$ , να λύσετε την ανίσωση  $P(x) > 0$ .

(Μονάδες 9)

89 – 20350

ΘΕΜΑ 4

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση  $C_f$  της συνάρτησης  $f(x) = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση  $C_g$  της συνάρτησης  $g(x) = x^2 + 1$ .

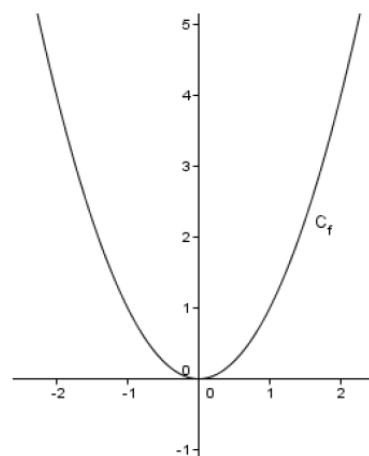
(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τη μονοτονία και την ελάχιστη τιμή της  $g(x)$ .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της  $C_g$  με τη γραφική παράσταση της  $h(x) = x^3 + x$ .

(Μονάδες 9)



## 90 – 20346

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Αν είναι γνωστό ότι έχει ρίζα τον αριθμό 1, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 6$ .

(Μονάδες 8)

β) Να κάνετε τη διαίρεση  $P(x) : (x - 1)$  και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$ .

(Μονάδες 8)

## 91 – 20271

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 3x^3 - x^2 - \lambda x + 2$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ , του οποίου το υπόλοιπο της διαίρεσης με το  $x - 1$  είναι 3.

α) να βρείτε την τιμή του  $\lambda$ .

(Μονάδες 7)

β) για  $\lambda = 1$

i. να κάνετε τη διαίρεση  $P(x) : (x - 1)$  και να αποδείξετε ότι

$$P(x) = (x - 1)(3x^2 + 2x + 1) + 3.$$

(Μονάδες 8)

ii. να λύσετε την ανίσωση  $P(x) < 3$ .

(Μονάδες 10)

## 92 – 20270

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + \lambda x - 2$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ , το οποίο έχει παράγοντα το  $x + 1$ .

α) Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$ .

(Μονάδες 8)

β) Για  $\lambda = 3$

i. να αποδείξετε ότι το  $P(x)$  έχει παράγοντα και το  $x - 2$  και ότι

$$P(x) = (x - 2)(x + 1)(x - 1)^2.$$

(Μονάδες 10)

ii. να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$ .

(Μονάδες 7)

93 – 20269

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 - 3x + \alpha$ , όπου  $\alpha \in \mathbb{R}$ , το οποίο έχει ρίζα το 1.

α) Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ .

(Μονάδες 5)

β) Για  $\alpha = 2$

i. να κάνετε τη διαίρεση  $P(x) : (x-1)$  και να δείξετε ότι  $P(x) = (x-1)(x^2 + x - 2)$ .

(Μονάδες 10)

ii. να λύσετε την ανίσωση  $P(x) < 0$ .

(Μονάδες 10)

#### 4.4 Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε Πολυωνυμικές

94 – 21907

ΘΕΜΑ 4

Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = x^3 \text{ και } g(x) = 4x \text{ με } x \in \mathbb{R}.$$

α) Από τη γραφική παράσταση της  $f$ , να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι περιττή και γνησίως μονότονη. Ποιο το είδος της μονοτονίας της;

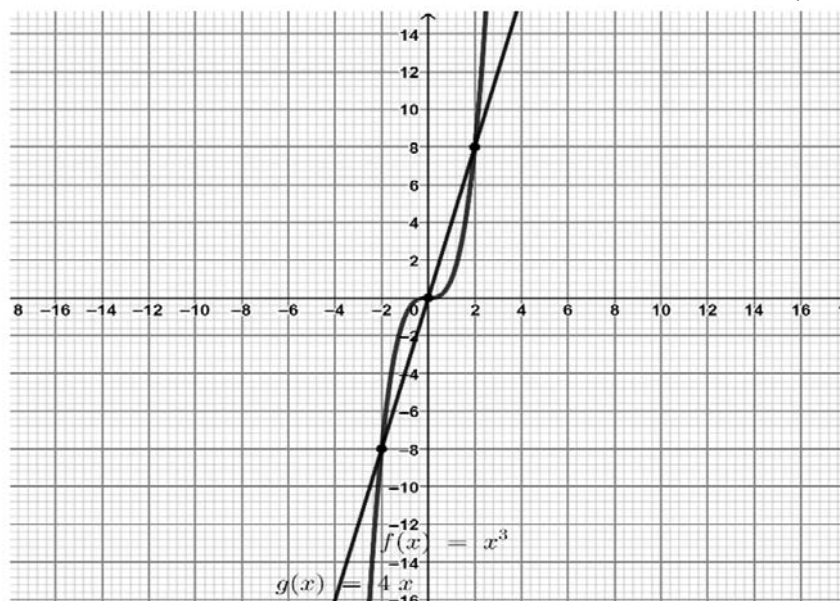
(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε γραφικά ή αλγεβρικά την εξίσωση  $f(x) = g(x)$ .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 7)

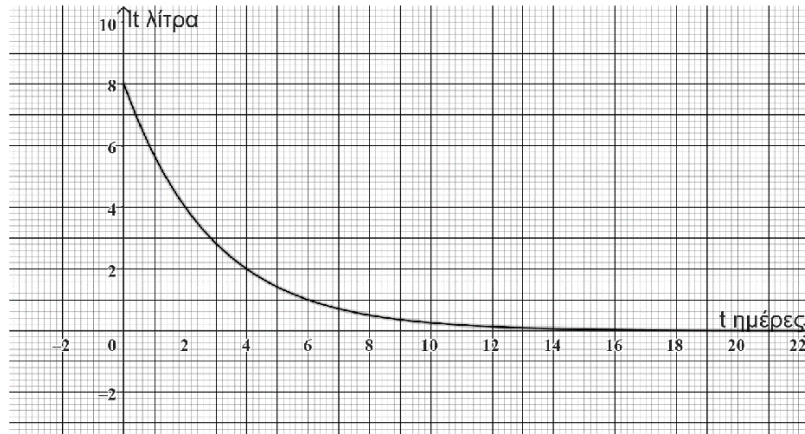


## 5.1 Εκθετική Συνάρτηση

95 – 36817

## ΘΕΜΑ 2

Ένα δοχείο περιέχει υγρό το οποίο εξατμίζεται. Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η ποσότητα  $Q$ , σε λίτρα, του υγρού που έχει απομείνει στο δοχείο μετά από  $t$  ημέρες.



Η ποσότητα του υγρού στο δοχείο μειώνεται εκθετικά και μετά από  $t$  ημέρες δίνεται από τη σχέση  $Q(t) = Q_0 2^{-\frac{t}{c}}$ , με  $c$  σταθερά και  $c \in \mathbb{R}$ , όπου  $Q_0$  η αρχική ποσότητα του υγρού.

Με βάση το διάγραμμα:

α) να βρείτε την αρχική ποσότητα  $Q_0$  του υγρού,

(Μονάδες 5)

β) να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Χρόνος $t$ σε ημέρες	0	2	4	6
Ποσότητα $Q(t)$ του υγρού σε λίτρα.				

(Μονάδες 10)

γ) να βρείτε το χρόνο που χρειάζεται για να εξατμιστεί η μισή ποσότητα του υγρού που υπήρχε τη χρονική στιγμή  $t = 0$  στο δοχείο.

(Μονάδες 10)

96 – 36750

## ΘΕΜΑ 2

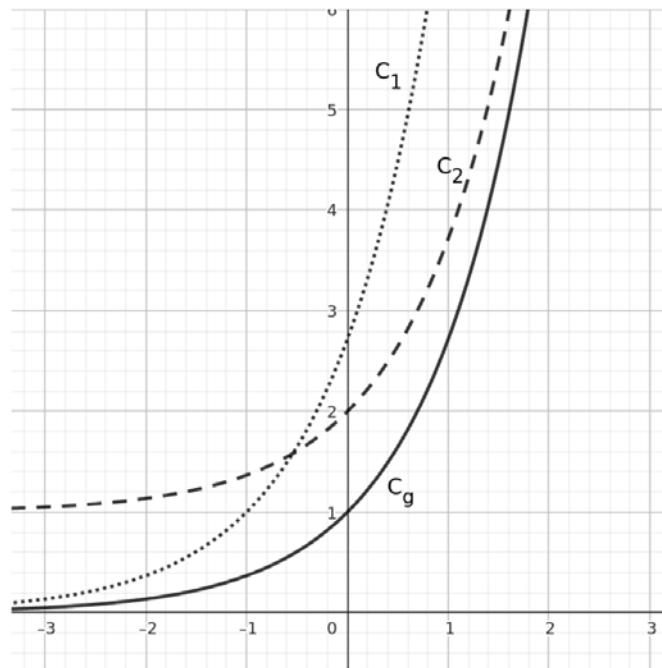
Δίνεται ότι η συνάρτηση  $f(x) = e^{x+1}$ .

α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς  $f(-1), f(0)$ .

(Μονάδες 12)

β) Αν η συνάρτηση  $g(x) = e^x$  έχει γραφική παράσταση όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, να επιλέξετε ποια από τις γραφικές παραστάσεις  $C_1, C_2$  αποτελεί τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 13)



97 – 21416

## ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = 2^x \text{ και } g(x) = 2 \cdot 2^x.$$

α) Να βρείτε τις τιμές  $f(0)$  και  $g(0)$ .

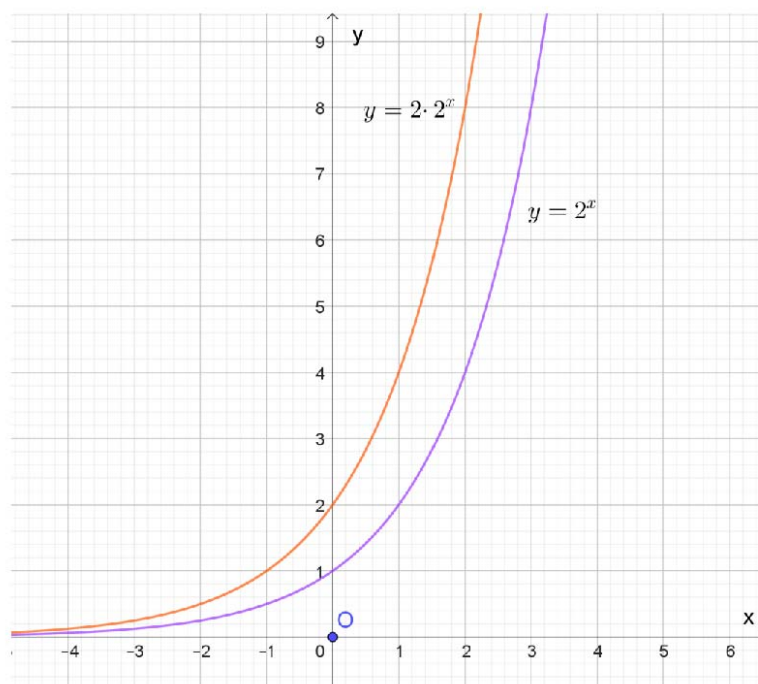
(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής των δύο συναρτήσεων με τους άξονες  $x'$  και  $y'$ .

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι  $g(x) = f(x + 1)$  και στην συνέχεια να βρείτε με ποια οριζόντια μετατόπιση η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  θα συμπίσει με την γραφική παράσταση της  $g$ .

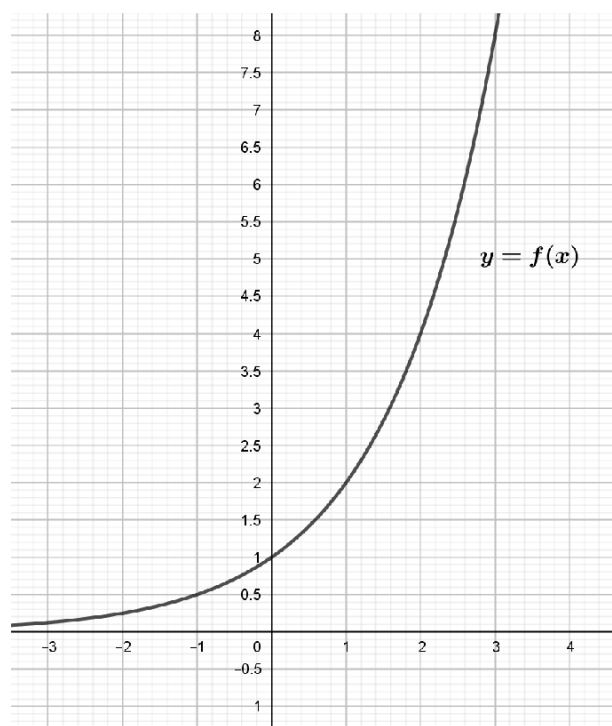
(Μονάδες 7)



98 - 35620

## ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας εκθετικής συνάρτησης  $f$ , με πεδίο ορισμού το σύνολο  $\mathbb{R}$ .



α) Με βάση την γραφική της παράσταση, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης  $f$ .

$x$	-1	0	1	2	3
$f(x)$					

(Μονάδες 10)

β) Αν  $f(x) = 2^x$ ,

i. Να βρείτε το  $f(8)$ .

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε το  $f(-2)$ .

(Μονάδες 8)

99 – 36823

ΘΕΜΑ 4

Μέσα σε έναν ανθρώπινο οργανισμό υπάρχει ένας πληθυσμός από το βακτήριο *Escherichia coli*, το οποίο κάτω από ευνοϊκές συνθήκες, διπλασιάζεται κάθε 20 λεπτά. Γνωρίζουμε ότι το πλήθος αυτών των βακτηρίων, ως συνάρτηση του χρόνου  $t$  σε ώρες, δίνεται από τη συνάρτηση  $P(t) = 2 \cdot 8^t$ , όπου  $t \geq 0$ .

α) Πόσα βακτήρια υπάρχουν αρχικά στον οργανισμό;

(Μονάδες 7)

β) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας, σωστά συμπληρωμένο τον παρακάτω πίνακα:

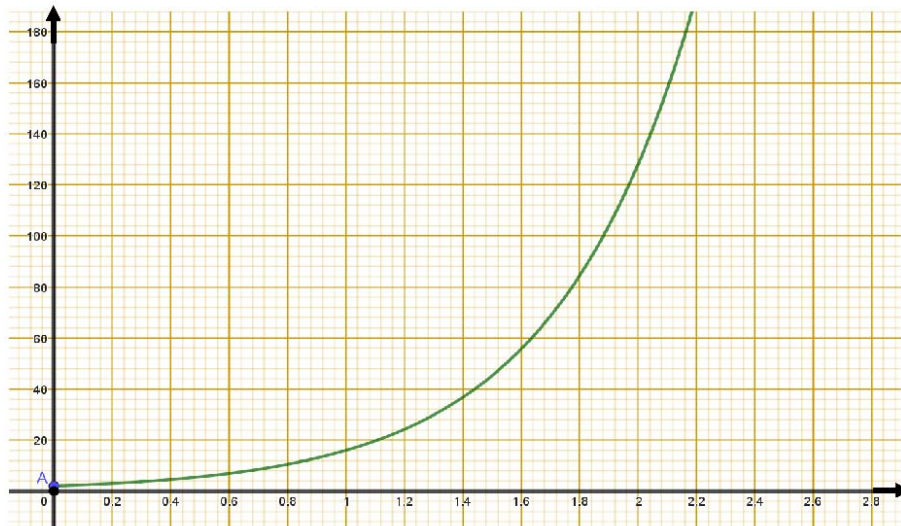
$t$	$\frac{1}{3}$	1	2	3	4
$P(t)$					

(Μονάδες 10)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $P(t)$ . Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, να εκτιμήσετε τον χρόνο που θα υπάρχουν:

(i) 100 βακτήρια. (Μονάδες 4)

(ii) 160 βακτήρια. (Μονάδες 4)



100 – 35545

## ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε το παρακάτω σύστημα

$$(\Sigma): \begin{cases} 2\omega + 3\phi = 17 \\ 4\omega - 3\phi = 7 \end{cases}$$

(Μονάδες 10)

β) Αν η λύση του συστήματος  $(\Sigma)$  είναι  $(\omega, \phi) = (4, 3)$  και  $2^x = \omega, 3^y = \phi$ , να βρείτε τους αριθμούς  $x$  και  $y$ .

(Μονάδες 15)

101 – 35544

## ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την εξίσωση  $\omega^3 - 3\omega^2 + 2\omega = 0$  (1).

(Μονάδες 10)

β) Αν οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι  $\omega_1 = 0, \omega_2 = 1, \omega_3 = 2$ , να βρείτε (αν υπάρχει)τον αριθμό  $x$  σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i.  $e^x = \omega_1$ ,

ii.  $e^x = \omega_2$ ,

iii.  $e^x = \omega_3$ .

(Μονάδες 15)

## 5.2 Λογάριθμοι

102 – 36821

## ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι  $\log 1000 = 3$ .

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $\Sigma = 3 \cdot \log 5 + \log 72 - \log 9$ .

(Μονάδες 15)



103 – 36367

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο αριθμός  $A = 10^{\log 5} - e^{\ln 3}$ . Να αποδείξετε ότι

α)  $A = 2$ .

(Μονάδες 13)

β)  $0 < \ln A < 1$ .

(Μονάδες 12)

Δίνεται ότι  $e \approx 2.71$

104 – 36366

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο αριθμός  $A = \ln e + \ln e^2$ . Να αποδείξετε ότι

α)  $A = 3$ .

(Μονάδες 13)

β)  $\ln A > 1$ .

(Μονάδες 12)

Δίνεται ότι  $e \approx 2.71$ .

105 – 36365

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο αριθμός  $A = \log 10 + \log 100 + \log 10^6$ . Να αποδείξετε ότι

α)  $A = 9$ .

(Μονάδες 13)

β)  $0 < \log A < 1$ .

(Μονάδες 12)

106 – 36362

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση  $A = \log 4 + 2\log 5$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $A = 2$ .

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή του  $\log \frac{A}{2}$

(Μονάδες 12)

107 – 36361

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση  $A = \ln e^2 - \ln \sqrt{e}$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $A = \frac{3}{2}$ .

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή του  $\ln\left(\frac{2}{3} \cdot A\right)$

(Μονάδες 12)

108 – 35981

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι  $\log 27 + \log 3 = \log 81$ .

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι  $\log 27 + \log 3 = 4 \log 3$ .

(Μονάδες 13)

109 – 35547

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι  $\log 10 - \log 2 = \log 5$ .

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι  $\log 8 + \log 2 = 4 \log 2$ .

(Μονάδες 13)

110 – 21545

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι  $\log 0,01 = -2$

(Μονάδες 09)

β) Να αποδείξετε ότι  $\log_2 3 + 2 \log_2 4 - \log_2 12 = -\log 0,01$

(Μονάδες 16)

111 – 21285

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση  $A = 2 \log 4 + 4 \log 5$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $A = 4$ .

(Μονάδες 13)

β) Για ποια τιμή του αριθμού  $x \neq 0$  ισχύει  $\ln x^2 = \frac{A}{2}$

(Μονάδες 12)

## 112 – 21704

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ότι μία προσεγγιστική τιμή για τον δεκαδικό λογάριθμο  $\log 2$  είναι το 0,30. Να εφαρμόσετε τις ιδιότητες των λογαρίθμων:  $\log \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log \theta_1 - \log \theta_2$  και  $\log \theta^k = k \log \theta$  για να βρείτε μία προσεγγιστική τιμή για τους δεκαδικούς λογάριθμους:

α)  $\log 4$

(Μονάδες 12)

β)  $\log 5$

(Μονάδες 13)

## 113 – 20997

## ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τον αριθμό  $p = \log 4 + 2 \cdot \log 5$ .

α) Να αποδείξετε  $\log 4 = 2 \log 2$  και στη συνέχεια ότι  $p = 2$ .

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τον θετικό αριθμό  $x$  ώστε  $\ln x = p$ .

(Μονάδες 10)

## 114 – 17598

## ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί  $\alpha = \log 2$  και  $\beta = \log 5$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\alpha + \beta = 1$ .

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης  $\ln(\alpha + \beta)$ .

(Μονάδες 12)

## 115 – 35543

## ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε το σύστημα:

$$(\Sigma): \begin{cases} 2\omega + 3\phi = 17 \\ 4\omega - 3\phi = 7 \end{cases}$$

(Μονάδες 10)

β) Αν η λύση του συστήματος  $(\Sigma)$  είναι  $(\omega, \phi) = (4, 3)$  και  $\ln x = \omega, \ln y = \phi$ , να βρείτε τους αριθμούς  $x$  και  $y$ .

(Μονάδες 15)

116 – 21638

## ΘΕΜΑ 4

Ο αριθμός των διαφορετικών ειδών των έμβιων όντων που υπάρχουν στις Μεγάλες Λίμνες της Β. Αμερικής, δίνεται προσεγγιστικά από τη συνάρτηση  $P(t) = \frac{450}{1+8 \cdot e^{-0,016t}}$  μετά  $t$  χρόνια από το έτος 1900. Θεωρούμε ότι η μεταβλητή  $t$  παίρνει μη αρνητικές πραγματικές τιμές.

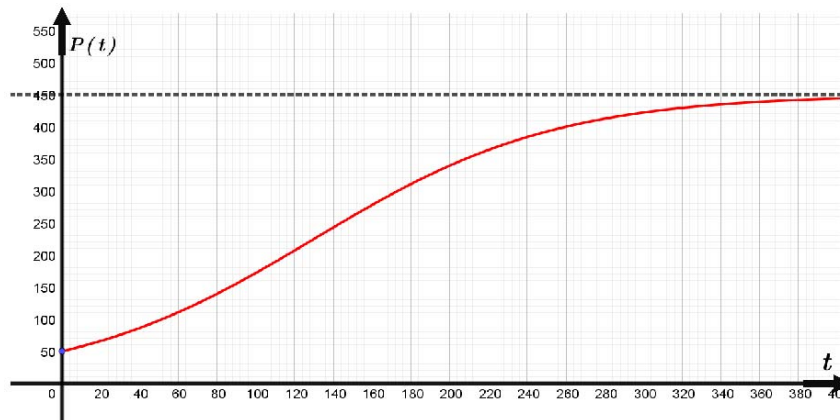
α) Να βρείτε πόσα είδη έμβιων όντων υπήρχαν το έτος 1900.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε, προσεγγιστικά, ποιο έτος θα υπάρχουν περίπου 225 διαφορετικά είδη.

(Μονάδες 10)

γ) Στο παρακάτω σχήμα υπάρχει η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $P(t)$ . Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τη μονοτονία της  $P(t)$ . Από ποια τιμή θα είναι πάντα μικρότερες οι τιμές  $P(t)$ ;



(Μονάδες 7)

Δίνεται ότι  $\ln 8 \cong 2,08$ .

117 - 20999

## ΘΕΜΑ 4

Ένα προσεγγιστικό μαθηματικό μοντέλο για το πλήθος των ανθρώπων σε μια μαθητική κοινότητα που έχουν ακούσει μια συγκεκριμένη φήμη, περιγράφεται από την ισότητα

$N = P \cdot (1 - e^{-0,15k})$ , όπου  $P$  ο συνολικός πληθυσμός της κοινότητας και  $k$  είναι ο αριθμός των ημερών που έχουν περάσει από τότε που ξεκίνησε η φήμη. Υποθέτουμε ότι ο συνολικός πληθυσμός της κοινότητας είναι 1000 άνθρωποι.

α) Να βρείτε πόσα μέλη της μαθητικής κοινότητας θα έχουν ακούσει τη φήμη μετά από 20 ημέρες.

(Μονάδες 9)

β) Πόσες ημέρες θα περάσουν ώστε να έχουν ακούσει τη φήμη 450 άνθρωποι από τους 1000;

(Μονάδες 10)

γ) Είναι δυνατόν να ακούσουν τη φήμη όλα τα μέλη της κοινότητας; Εξηγήστε.

(Μονάδες 6)

Δίνονται:  $e^3 \cong 20$  και  $\ln(0,55) \cong -0,6$ .

## 5.3 Λογαριθμική Συνάρτηση

118 – 36382

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \log(x - 2)$ .α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τις τιμές της  $f$  για  $x = 3$ ,  $x = 12$  και  $x = 102$ .

(Μονάδες 13)

119 – 35619

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \log(x - 1)$ .α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι  $f(2) + f(11) = 1$ .

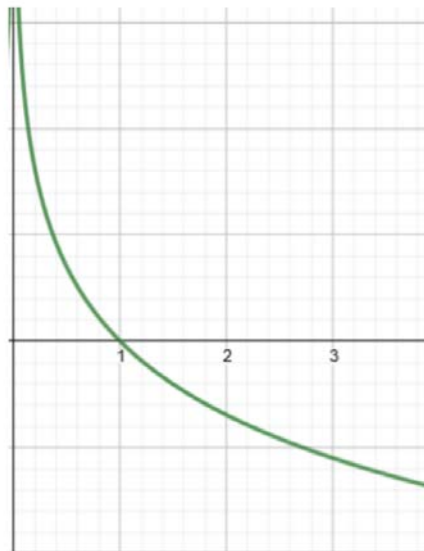
(Μονάδες 15)

120 – 15592

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η άρτια συνάρτηση  $f(x) = \ln \frac{1}{|x|}$ ,  $x \neq 0$ .α) Να αποδείξετε ότι  $f(-1) = f(1) = 0$  και  $f(-2) = f(2)$ .

(Μονάδες 12)

β) Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  για  $x > 0$ .Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x)$ , για  $x < 0$ .

(Μονάδες 13)

121 – 36697

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = \ln(x+3)$ .

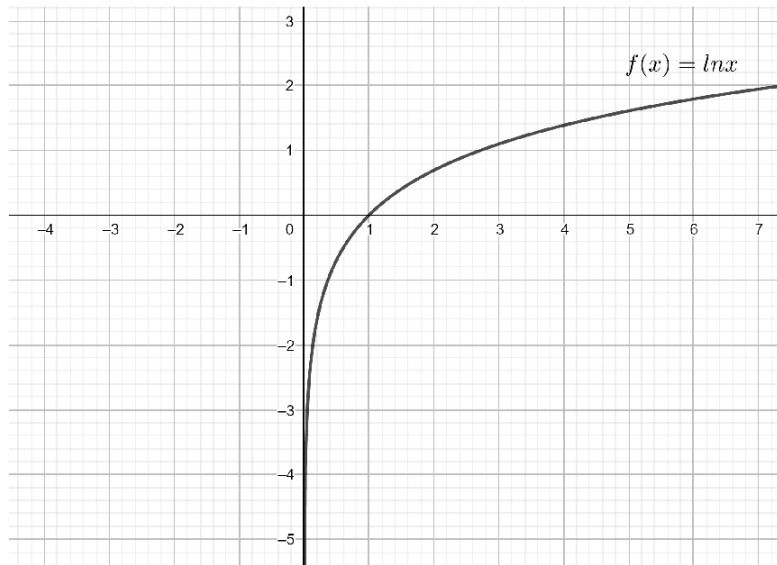
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $g$ .

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $g$  τέμνει τον άξονα  $xx'$  στο σημείο με τετμημένη  $-2$ .

(Μονάδες 8)

γ) Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση της  $f(x) = \ln x$ .



ι. Να βρείτε με ποια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της  $f$  θα προκύψει η γραφική παράσταση της  $g$ .

(Μονάδες 5)

ii. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $g$ .

(Μονάδες 4)

122 – 36377

ΘΕΜΑ 4

Να αιτιολογήσετε γιατί ισχύουν:

α)  $1 \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

(Μονάδες 8)

β)  $1 < 2 \cdot \eta\mu 1 < 2$ .

(Μονάδες 8)

β)  $0 < \ln(2 \cdot \eta\mu 1) < 1$ .

(Μονάδες 9)

123 – 36376

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln x + 1$ α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από το σημείο  $(1,1)$ .

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον άξονα  $x'$  στο σημείο με τετμημένη  $\frac{1}{e}$ .

(Μονάδες 8)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

(Μονάδες 9)

124 – 36375

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(x-1)$ α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον άξονα  $x'$  στο σημείο με τετμημένη 2.

(Μονάδες 8)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

(Μονάδες 9)

125 – 36374

ΘΕΜΑ 4

Να αιτιολογήσετε γιατί

α)  $6 \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ .

(Μονάδες 8)

β) ορίζεται ο αριθμός  $\ln(\sigma\nu\delta)$ .

(Μονάδες 8)

β)  $\ln(\sigma\nu\delta) < 0$ .

(Μονάδες 9)

126 – 36373

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται γωνία  $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ . Να αιτιολογήσετε γιατί

α) δεν ορίζεται η παράσταση  $\ln(\sigma\nu\theta)$  ενώ ορίζεται η παράσταση  $\ln(\eta\mu\theta)$ .

(Μονάδες 13)

β)  $\ln(\eta\mu\theta) < 0$ .

(Μονάδες 12)

127 – 36372

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = 3\eta\mu(2x) + \kappa$  στο  $[0, \pi]$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\kappa = -1$ .

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της  $f$ .

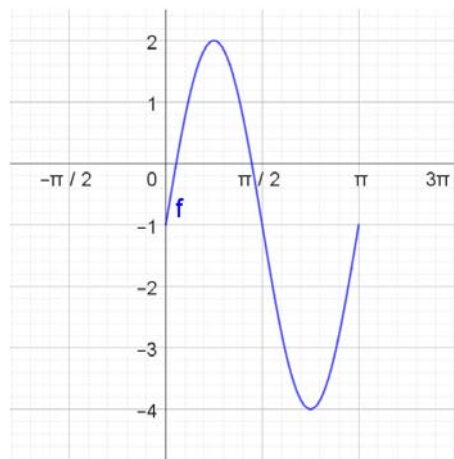
(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι  $0 < \ln 2 < 1$ .

(Μονάδες 6)

δ) Να αιτιολογήσετε γραφικά γιατί η εξίσωση  $f(x) = \ln 2$  έχει ακριβώς 2 ρίζες στο  $[0, \pi]$ .

(Μονάδες 7)





128 – 36371

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x$  και η ευθεία  $(\varepsilon): y = x$ . Έστω επίσης  $g$  συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση είναι συμμετρική της  $f$  ως προς την ευθεία  $(\varepsilon)$ .

α) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .

(Μονάδες 10)

β) Να γράψετε τον τύπο της  $g$  και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι σημείο  $(2, f(\ln 2))$  είναι πάνω στην ευθεία  $(\varepsilon)$ .

(Μονάδες 8)

129 – 20707

## ΘΕΜΑ 4

Η ευαισθησία ενός φωτογραφικού φιλμ μετριέται σε μονάδες ASA ή σε μονάδες DIN. Αν  $x$  μονάδες ASA συνδέονται με  $y$  μονάδες DIN με τον τύπο  $y = 1 + 10 \cdot \log x$ , τότε:

α) Να βρείτε πόσες μονάδες DIN είναι η ευαισθησία ενός φωτογραφικού φιλμ, αν γνωρίζουμε ότι η ευαισθησία αυτού του φιλμ σε μονάδες ASA, είναι 10.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε πόσες μονάδες DIN είναι η ευαισθησία ενός φωτογραφικού φιλμ, αν γνωρίζουμε ότι η ευαισθησία αυτού του φιλμ σε μονάδες ASA, είναι 200.

(Μονάδες 8)

γ) Να επιλύσετε τον παραπάνω τύπο ως προς  $x$ .

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε πόσες μονάδες ASA είναι η ευαισθησία ενός φωτογραφικού φιλμ, αν γνωρίζουμε ότι η ευαισθησία αυτού του φιλμ σε μονάδες DIN, είναι 13.

(Μονάδες 4)

Δίνεται ότι  $\log 2 = 0,3$  και  $10^6 \cong 15,85$ .

130 – 20708

## ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \log x, x > 0$  και  $g(x) = \log(10x - 20), x > 2$ .

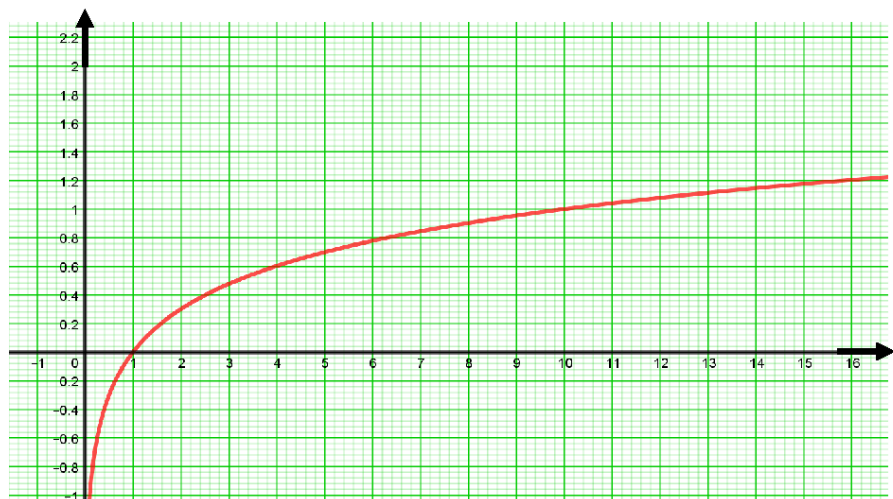
α) Να βρείτε τους αριθμούς  $g(2,1)$  και  $g(12)$ .

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι  $g(x) = 1 + f(x - 2)$ .

(Μονάδες 8)

γ) Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x)$ . Να μεταφέρετε το παρακάτω σχήμα στο γραπτό σας, το οποίο να συμπληρώσετε με την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x)$ .



(Μονάδες 7)