Αναστάσιος Χ. Μπάρλας

Άλγεβρα

Α΄ ΕΠΑ.Λ.

Τράπεζα Θεμάτων 2023

Μπάρλας ΕΚΔΟΣΕΙΣ

2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ

1 – 13394 – Θέμα 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha\beta=1$.

(Μονάδες 13)

β) Αξιοποιώντας το συμπέρασμα του προηγούμενου ερωτήματος, να αποδείξετε ότι

$$(\alpha\beta-2)^6+(\alpha\beta+1)^2=5.$$

(Μονάδες 12)

2 – 14644 – Θέμα 2

Για τους αριθμούς $2\alpha+1$ και $\beta+1$, ισχύει ότι $(2\alpha+1)(\beta+1)=1$, να δείξετε ότι:

α) $2\alpha+\beta+2\alpha\beta=0$,

(Μονάδες 11)

β) οι αριθμοί $x=\alpha(2+\beta)$ και $y=\beta(\alpha+1)$ είναι αντίθετοι.

(Μονάδες 14)

3 – 14646 – Θέμα 2

α) Να αποδείξετε ότι $(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2$.

(Μονάδες 12)

β) Αν $(\alpha+\beta)^2=4\alpha\beta$ να δείξετε ότι $\alpha=\beta$.

(Μονάδες 13)

4 – 14350 – Θέμα 4

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=3x-2y-2$ και $\beta=y-1-2x$ και η παράσταση $A=\frac{x^2+2x-xy-2y}{3x+6}$.

α) Να βρείτε τις πραγματικές τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A.

(Μονάδες 5)

β) Αν οι αριθμοί α και β είναι αντίθετοι τότε:

i. Να δείξετε ότι $x-y=3$.

(Μονάδες 10)

ii. Να δείξετε ότι η παράσταση $A=1$

(Μονάδες 10)

5 – 14462 – Θέμα 4

Έστω α, β θετικοί πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha^2+\beta^2-2(\alpha+\beta)=-2\alpha\beta$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(\alpha+\beta)^2=2(\alpha+\beta)$

ii. $\alpha+\beta=2$

(Μονάδες 8+6=14)

β) Να αποδείξετε ότι $(2\alpha+\beta-2)(\alpha+2\beta-2)=\alpha\beta$

(Μονάδες 11)

6 – 14631 – Θέμα 4

Έστω α, β, γ θετικοί πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει

$$\alpha+\gamma=10 \text{ και } (\beta-\gamma)\alpha=\alpha^2-\beta\gamma.$$

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=\alpha\gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}\right)$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta$.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι $(2\alpha-\beta+\gamma)(2\beta-\alpha+\gamma)=100$.

(Μονάδες 10)

2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

7 – 14309 – Θέμα 2

Θεωρούμε τον πραγματικό αριθμό y για τον οποίο ισχύει η ανισότητα $2<y<3$.

α) Να αποδείξετε ότι $4<2y<6$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή κάθε μιας από τις παρακάτω παραστάσεις

i. $2y+3$.

(Μονάδες 9)

ii. $2y-5$.

(Μονάδες 9)

8 – 14405 – Θέμα 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν $\alpha<\beta$ και $\beta<\gamma$ να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha-\gamma<0$.

(Μονάδες 12)

β) $(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)>0$.

(Μονάδες 13)

9 – 14776 – Θέμα 2

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $\alpha>1$, $\beta<1$.

α) Να δείξετε ότι $(\alpha-1)(\beta-1)<0$.

(Μονάδες 15)

β) Με χρήση του α) ή με οποιονδήποτε τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι $\alpha\beta+1<\alpha+\beta$.

(Μονάδες 10)

10 – 14823 – Θέμα 2

Αν $2\leq x\leq 3$ και $1\leq y\leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x+y$

(Μονάδες 12)

β) $2x-y$

(Μονάδες 13)

2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

11 – 13450 – Θέμα 2

α) Να ελέγξετε αν ο αριθμός 6 είναι λύση της εξίσωσης $|x-9|=3$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $|x-9|=3$.

(Μονάδες 15)

12 – 14400 – Θέμα 2

Δίνεται η παράσταση $A = |x - 3|$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης Α σε κάθε μια από τις τρεις επόμενες περιπτώσεις:

i) $x = 4$

(Μονάδες 4)

ii) $x = 3$

(Μονάδες 4)

iii) $x = 2$.

(Μονάδες 4)

β) Αν $x < 3$ να γράψετε την τιμή της παράστασης Α χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

(Μονάδες 13)

13 – 14777 – Θέμα 2

Δίνεται ο πραγματικός αριθμός α για τον οποίο ισχύει ότι $1<\alpha<3$.

α) Να δείξετε ότι $|\alpha-1|=\alpha-1$ και $|\alpha-3|=3-\alpha$.

(Μονάδες 15)

α) Να δείξετε ότι $|\alpha-1|+|\alpha-3|=2$.

(Μονάδες 10)

14 – 14918 – Θέμα 2

Να δείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό β με $\beta \neq 0$ ισχύει:

α)

$$\frac{|\beta|}{\beta} = \begin{cases} 1 \; \alpha\nu \; \beta > 0 \\ -1 \; \alpha\nu \; \beta < 0 \end{cases}$$

(Μονάδες 12)

β)

$$\left|\frac{|\beta|}{\beta} - 1\right| + \left|\frac{|\beta|}{\beta} + 1\right| = 2.$$

(Μονάδες 13)

15 – 14298 – Θέμα 4

Για τον πραγματικό αριθμό α , δίνεται ότι $\alpha < -2$.

α) Να αποδείξετε ότι $2\alpha + 4 < 0$. (Μονάδες 8)

β) Να γράψετε την παράσταση $A = |2\alpha + 4| + 3|3\alpha + 6|$ χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $A > -11$.

(Μονάδες 9)

16 – 14825 – Θέμα 4

α) Να αποδείξετε ότι $|y - 3| < 1 \Leftrightarrow 2 < y < 4$.

(Μονάδες 7)

β) Αν x, y είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $|y - 3| < 1$ τότε να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται:

i. Η τιμή της περιμέτρου Π του ορθογωνίου .

(Μονάδες 10)

ii. Η τιμή του εμβαδού Ε του ορθογωνίου.

(Μονάδες 8)

17 – 14873 – Θέμα 4

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $2 \le \alpha \le 3$ και $-2 \le \beta \le -1$.

α) Να δείξετε ότι : $\alpha - 3 \le 0$ και $\beta + 2 \ge 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι : $3 \le \alpha - \beta \le 5$.

(Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι $|\alpha - \beta| + |\alpha - 3| + |\beta + 2| = 5$.

(Μονάδες 9)

18 – 14892 – Θέμα 4

Για τους μη μηδενικούς αριθμούς α, β ισχύει ότι: $\frac{\alpha}{|\alpha|} + \frac{|\beta|}{\beta} = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι οι α και β είναι ετερόσημοι.

(Μονάδες 13)

β) Αν, επιπλέον $\frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} = 1$,

να δείξετε ότι $\beta < 0 < \alpha$.

(Μονάδες 12)

2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

19 – 14715 – Θέμα 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = 1 - \sqrt{2}$ και $\beta = 2 + \sqrt{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 3$ και $\alpha\beta = -\sqrt{2}$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $(\alpha - 1)^2 + (\beta - 2)^2 = 4$.

(Μονάδες 13)

20 – 14775 – Θέμα 2

α) Να αποδείξετε ότι $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$.

(Μονάδες 13)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α), να δείξετε ότι:

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{2}.$$

(Μονάδες 12)

21 – 14299 – Θέμα 4

α)

i. Να υπολογίσετε τη δύναμη $2^{\frac{6}{3}}$.

(Μονάδες 5)

ii. Να αιτιολογήσετε την ισότητα $\left(\sqrt{2}\right)^6 = 8$.

(Μονάδες 3)

iii. Να υπολογίσετε τη δύναμη $\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}\right)^6$.

(Μονάδες 10)

3.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

22 – 13398 – Θέμα 2

Δίνεται η εξίσωση $|x - 5| = 6$ (Ι)

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός – 1 είναι λύση της (Ι).

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης (Ι).

(Μονάδες 15)

23 – 13478 – Θέμα 2

Έστω α πραγματικός αριθμός για τον οποίο ισχύει $\alpha^2 = 4(\alpha - 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $(\alpha - 2)^2 = 0$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τον αριθμό α.

(Μονάδες 12)

24 – 14196 – Θέμα 2

Για τους πραγματικούς αριθμούς α και βισχύει:

$$\frac{\alpha}{3}=\frac{\beta+1}{6}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $2\alpha=\beta+1$.

(Μονάδες 12)

β) Αν $\beta=-3$ να βρείτε τον α.

(Μονάδες 13)

25 – 14376 – Θέμα 2

Δίνονται οι παραστάσεις $A=\frac{3x-1}{5}$ και $B=\frac{1-2x}{3}$

α) Να λύσετε την εξίσωση $A=0$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία οι αριθμητικές τιμές των παραστάσεων A και B είναι αντίθετες.

(Μονάδες 13)

26 – 14755 – Θέμα 2

Δίνεται η παράσταση: $\mathrm{A}=\frac{x^2-1}{x-1}, x\neq 1$.

α) Να δείξετε ότι $\mathrm{A}=x+1, x\neq 1$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A για $x=3^0-1$.

(Μονάδες 9)

γ) Μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

27 – 14766 – Θέμα 2

α) Να γράψετε με τη μορφή εξίσωσης την εξής πρόταση: «Η απόσταση των αριθμών x και -9 πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 17».

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε αλγεβρικά ή γεωμετρικά με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών, όλους τους αριθμούς x που ικανοποιούν την παραπάνω πρόταση.

(Μονάδες 13)

28 – 13405 – Θέμα 2

α) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $|x+8|=10$ επαληθεύεται για x=2, x=0 και x=-10

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $|x+8|=10$

(Μονάδες 12)

29 – 13455 – Θέμα 2

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=|x+1|$ για $x=-2$ και για $x=1$.

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $|x+1|=2$.

(Μονάδες 12)

30 – 13476 – Θέμα 2

Δίνεται $-1 \le x \le 2$.

α) Να γράψετε την παράσταση A=$|x+1|-|x-2|$ απαλείφοντας κατάλληλα τις απόλυτες τιμές.

(Μονάδες 13)

β) Αν A= 2x+3 να λύσετε την εξίσωση A=0.

(Μονάδες 12)

31 – 14296 – Θέμα 2

α) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $|x+2|=7$ επαληθεύεται για $x=1$, $x=2$ και $x=-3$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $|x+2|=7$.

(Μονάδες 13)

32 – 14308 – Θέμα 2

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\mathrm{B}=|x-2|$

i. για $x=0$.

(Μανάδες 5)

ii. για $x=-4$.

(Μανάδες 5)

iii. για $x=5$.

(Μανάδες 5)

β) Να λύσετε την εξίσωση $|x-2|=3$.

(Μανάδες 10)

33 – 14330 – Θέμα 2

α) Να λύσετε την εξίσωση: $x-5=10$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $|x-5|=10$.

(Μονάδες 15)

34 – 14305 – Θέμα 4

Δίνονται οι παραστάσεις $\mathrm{A}=\mathrm{x}^2+6\mathrm{x}+9$ και $\mathrm{B}=(4\mathrm{y}-2)^2$, με $\mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathrm{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\mathrm{x}\in\mathrm{R}$ ισχύει $\mathrm{A}=(x+3)^2$.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να δείξετε ότι $\mathrm{A}+\mathrm{B}\ge 0$ για κάθε $\mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathrm{R}$.

(Μονάδες 9)

ii. Για ποιες τιμές των $\mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathrm{R}$ ισχύει $\mathrm{A}+\mathrm{B}=0$;

(Μονάδες 8)

35 – 14901 – Θέμα 4

Δίνεται η εξίσωση $|x-3|=|x-5|(1)$, όπου x πραγματικός αριθμός

α) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά στον άξονα των πραγματικών αριθμών τις $|x-3|,|x-5|$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, στον άξονα των πραγματικών αριθμών, οι οποίοι έχουν την ιδιότητα να ισαπέχουν από τους 3 και 5.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση (1) αλγεβρικά.

(Μονάδες 9)

36 – 14891 – Θέμα 4

Μια ομάδα παίζει 20 αγώνες πρωταθλήματος κάθε χρόνο. Για κάθε νίκη παίρνει 3 βαθμούς και για κάθε ήττα 1 βαθμό.

α) Αν κατά τη διάρκεια της χρονιάς πραγματοποίησε x νίκες, τότε:

i. Να εκφράσετε σε σχέση με το x, πόσες είναι οι ήττες που είχε η ομάδα.

(Μονάδες 5)

ii. Να δείξετε ότι η τελική βαθμολογία A της ομάδας δίνεται από τη σχέση $A = 2x + 20$.

(Μονάδες 10)

β) Αν η τελική βαθμολογία της ομάδας ήταν 50 βαθμοί να βρείτε πόσες νίκες και πόσες ήττες είχε η ομάδα.

(Μονάδες 10)

37 – 14737 – Θέμα 4

Δίνεται η παράσταση Κ= |x-2|+1.

α) Να γράψετε την παράσταση Κ χωρίς απόλυτη τιμή.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, οι οποίοι έχουν απόσταση από το 2 ίση με 4.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης Κ για τους αριθμούς x του ερωτήματος β.

(Μονάδες 6)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του x, ώστε Κ=0,99.

(Μονάδες 6)

3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

38 – 14297 – Θέμα 2

α) Να εξετάσετε ποιος από τους αριθμούς: $8, -4$ και -8 είναι λύση της εξίσωσης $x^2=16$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $x^2=16$.

(Μονάδες 13)

39 – 14460 – Θέμα 2

Δίνονται οι αριθμοί $x_1 = 2+\sqrt{3}$ και $x_2 = 2-\sqrt{3}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και να αποδείξετε ότι για το γινόμενο $P = x_1 x_2$ ισχύει $P = 1$.

(Μονάδες 14)

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς x_1 και x_2.

(Μονάδες 11)

40 – 14647 – Θέμα 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $\omega^2 - 4\omega + 3 = 0$.

(Μονάδες 13)

β) Αν οι λύσεις του ερωτήματος α) είναι $\omega_1 = 1$ και $\omega_2 = 3$, να εξετάσετε για ποια από αυτές τις τιμές του ω, η εξίσωση $(\omega^2 - 4\omega + 3)x = \omega - 1$, είναι αδύνατη.

(Μονάδες 12)

41 – 13411 – Θέμα 2

Δίνεται η εξίσωση $x^2+4x+4=0 \quad (1)$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα $\Delta = 0$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση (1).

(Μονάδες 13)

42 – 13451 – Θέμα 2

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 5x + 4 = 0$ (1).

α) Να ελέγξετε αν ο αριθμός 4 επαληθεύει την εξίσωση (1).

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την εξίσωση (1).

(Μονάδες 17)

43 – 13505 – Θέμα 2

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 3x + 2 = 0$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - 3x + 2$ είναι $\Delta = 1$.

(Μονάδες 8)

β) Πόσες ρίζες έχει η εξίσωση;

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση.

(Μονάδες 9)

44 – 14381 – Θέμα 2

Μια εξίσωση δευτέρου βαθμού έχει δυο ρίζες, τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 1$.

α)

i. Να γράψετε το άθροισμα S των ριζών της εξίσωσης.

(Μονάδες 5)

ii. Να γράψετε το γινόμενο P των ριζών της εξίσωσης.

(Μονάδες 5)

β) Να γράψετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που έχει ρίζες τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 1$.

(Μονάδες 15)

45 – 14539 – Θέμα 2

Δίνεται η εξίσωση $x^2-7x+6=0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 επαληθεύει την εξίσωση (1).

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση (1).

(Μονάδες 15)

46 – 14824 – Θέμα 2

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 3x - 4 = 0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες, υπολογίζοντας την διακρίνουσά της.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση (1).

(Μονάδες 15)

47 – 14542 – Θέμα 4

α) Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $3x-3=0$.

(Μονάδες 6)

ii) $x^2-4x+4=0$.

(Μονάδες 6)

β) Να λύσετε την εξίσωση $(3x-3)(x-2)^2=0$.

(Μονάδες 13)

48 – 14192 – Θέμα 4

Δίνεται το τριώνυμο $3x^2 - x - 5$ με $x \in R$.

α) Να αποδείξτε ότι το τριώνυμο αυτό έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις ρίζες του παραπάνω τριωνύμου.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίστε το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών αυτών.

(Μονάδες 8)

49 – 14717 – Θέμα 4

α) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha+\beta=\frac{5}{2}$ και $\alpha\beta=1$.

i. Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τους αριθμούς α, β.

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε να ισχύει $\alpha+\beta=1$ και $\alpha\beta=\frac{5}{2}$.

(Μονάδες 12)

50 – 15097 – Θέμα 4

Δίνονται οι αριθμοί $\kappa = 2 - \sqrt{2}$ και $\lambda = 3 - \sqrt{2}$.

α) Να δείξετε ότι :

i. $\kappa + \lambda = 5 - \sqrt{8}$.

(Μονάδες 6)

ii. $\kappa \cdot \lambda = 8 - 5\sqrt{2}$.

(Μονάδες 6)

β) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - (5-\sqrt{8})x + 8 - 5\sqrt{2} = 0$.

(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι $(5-\sqrt{8})^2 - 4\left(8-5\sqrt{2}\right) > 0$.

(Μονάδες 7)

51 – 14769 – Θέμα 4

Σε ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου η πρόσοψη (η πλευρά προς το δρόμο) είναι κατά $5m$ μεγαλύτερη από το βάθος (πλάτος) του. Αν το βάθος του οικοπέδου είναι x μέτρα, τότε:

α) Να εκφράσετε σε σχέση με το x, την περίμετρο και το εμβαδόν του οικοπέδου.

(Μονάδες 10)

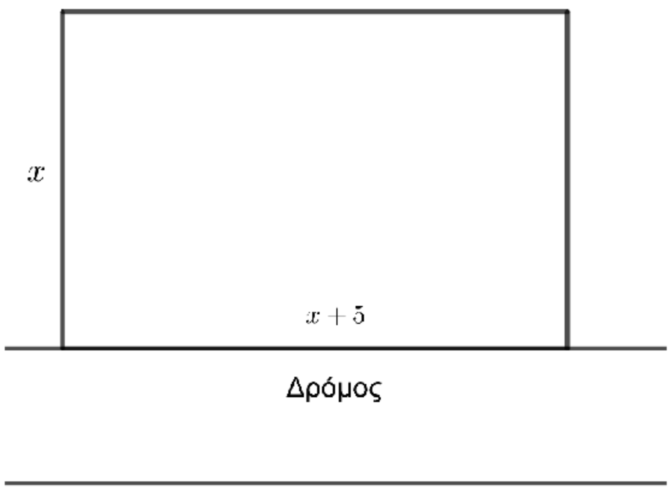
β) Αν η περίμετρος Π και το εμβαδόν E δίνονται από τις σχέσεις $\Pi = 4x + 10\,m$ και $E = x(x+5)\,m^2$ αντίστοιχα, να υπολογίσετε τις διαστάσεις του οικοπέδου όταν:

i. Η περίμετρός του είναι $70m$.

(Μονάδες 6)

ii. Το εμβαδόν είναι $150m^2$.

(Μονάδες 9)



4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

52 – 14316 – Θέμα 2

Δίνεται η παράσταση $A=(x+1)^2-(x-1)^2$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $A=4x$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση A είναι μεγαλύτερη από το $\frac{1}{4}$.

(Μονάδες 13)

53 – 14557 – Θέμα 2

Δίνεται η ανίσωση $3x - 7 \geq 5x + 11$ (I).

α) Να λύσετε την ανίσωση (I).

(Μονάδες 15)

β) Να γράψετε τις λύσεις της (I) με τη μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 10)

54 – 14828 – Θέμα 2

α) Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x, ισχύει:

$$(x+3)^2-(x+1)^2=4(x+2).$$

(Μονάδες 13)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α), να λύσετε την ανίσωση $(x+3)^2-(x+1)^2>0$.

(Μονάδες 12)

55 – 14850 – Θέμα 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x|\leq 4$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x-7 \geq -4(x-2)$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των δύο παραπάνω ανισώσεων.

(Μονάδες 7)

56 – 15053 – Θέμα 2

Δίνεται η εξίσωση $|2x-5|=1$.

α) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί 1 και 2 είναι λύσεις της.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε αν οι λύσεις της εξίσωσης είναι και λύσεις της ανίσωσης $|x|<3$.

(Μονάδες 7)

57 – 14871 – Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ $με\ x \neq 2$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = x + 2$ $με\ x \neq 2$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 4$.

(Μονάδες 13)

58 – 14317 – Θέμα 2

Δίνονται οι ανισώσεις:

$$2(x-1) < x+4 \text{ και } 2-(5-x) > 0$$

α) Να τις λύσετε.

(Μονάδες 16)

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τους ακέραιους αριθμούς που είναι λύσεις και των δυο ανισώσεων.

(Μονάδες 9)

59 – 14921 – Θέμα 2

Δινονται οι ανισωσεις: $x-1>1$ (1) και

$2x-3<5$ (2)

α) Να λύσετε την ανίσωση (1).

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση (2).

(Μονάδες 8)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρείτε τις κοινές τους λύσεις.

(Μονάδες 9)

60 – 14487 – Θέμα 4

Δίνεται η παράσταση $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται παράσταση A.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι A=-5.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{5}{\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}} - \frac{5}{\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1}$.

(Μονάδες 10)

61 – 13402 – Θέμα 4

Δίνονται οι ανισώσεις $|x| \leq 9$ (I) και $7x - 8 \geq -3(x - 4)$ (II).

α) Να λυθεί η ανίσωση (I).

(Μονάδες 7)

β) Να λυθεί η ανίσωση (II).

(Μονάδες 10)

γ) Να παραστήστε τις λύσεις των ανισώσεων (I) και (II) στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρείτε τις κοινές τους λύσεις.

(Μονάδες 8)

62 – 14874 – Θέμα 4

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύουν

$$d(x,1) \leq 2 \qquad (1)$$

$$d(x,4) \geq 3 \qquad (2).$$

α) Να λύσετε την ανίσωση (1) αλγεβρικά και την ανίσωση (2) γεωμετρικά με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 10)

β) Να παραστήσετε στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) και να βρείτε τις κοινές τους λύσεις.

(Μονάδες 5)

γ) Για κάθε $x \in [-1,1]$,

i. να αιτιολογήσετε γεωμετρικά ότι $|x-1|+|x+1|=2$.

(Μονάδες 5)

ii. να δείξετε αλγεβρικά ότι $|x-1|+|x+1|=2$.

(Μονάδες 5)

63 – 14875 – Θέμα 4

Για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύουν αντίστοιχα

$$d(x,2) \leq 1 \qquad (1)$$

$$d(y,4) \leq 3 \qquad (2).$$

α) Να λύσετε την ανίσωση (1) αλγεβρικά και την ανίσωση (2) γεωμετρικά με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών .

(Μονάδες 10)

β) Αν $1 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 7$ να δείξετε ότι:

i. η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις x, y είναι τουλάχιστον 4 και το πολύ 20.

(Μονάδες 7)

ii. $|x-y| \leq 8$.

(Μονάδες 8)

64 – 13414 – Θέμα 4

α) Να λύσετε την ανίσωση $|3x-6|<15$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|x-6|\geq 1$ και να γράψετε τις λύσεις της ανίσωσης αυτής σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 12)

γ) Να παραστήσετε (σχεδιάζοντας) τις λύσεις των δύο ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) σε έναν άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρείτε τις κοινές τους λύσεις.

(Μονάδες 5)

65 – 13506 – Θέμα 4

Δίνονται οι ανισώσεις: $3(x-1)>x+3$ (1) και

$|x|\leq 4$ (2)

α) Να λύσετε την ανίσωση (1).

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση (2).

(Μονάδες 9)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρείτε τις κοινές τους λύσεις.

(Μονάδες 8)

66 – 14401 – Θέμα 4

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-2|<1$.

(Μονάδες 9)

β) Αν $|x-2|<1$ να δείξετε ότι $3<2x+1<7$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν $1<x<3$ να απλοποιήσετε την παράσταση $A=|x-1|+|x-3|$

(Μονάδες 8)

67 – 13457 – Θέμα 4

Δίνονται οι ανισώσεις:

$|x|<4$ (1)

και

$4(x-1)>6x-8$ (2).

α) Να λύσετε την ανίσωση (1).

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την ανίσωση (2).

(Μονάδες 10)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρείτε τις κοινές τους λύσεις.

(Μονάδες 5)

68 – 14540 – Θέμα 4

Θεωρούμε πραγματικούς τους πραγματικούς αριθμούς x, y για τους οποίους ισχύουν οι ανισότητες $0<x<2$ και $0<y<3$.

α) Να αποδείξετε ότι $0<x+y<5$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε μεταξύ ποιων πραγματικών αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμίας από τις παρακάτω παραστάσεις:

i) $-3y$

(Μονάδες 7)

ii) $x-2y$

(Μονάδες 8)

69 – 14541 – Θέμα 4

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x|\geq 4$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $3(|x|+2)+1<22$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β).

(Μονάδες 8)

70 – 14541 – Θέμα 4

Δίνεται η εξίσωση $|x-3|=|x-5|$.

α) Να τοποθετήσετε στον παρακάτω άξονα των πραγματικών αριθμών ένα σημείο Μ που να αντιστοιχεί στη λύση της παραπάνω εξίσωσης, αιτιολογώντας γεωμετρικά την απάντησή σας.

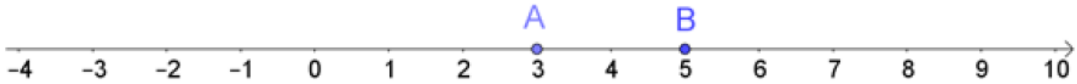
(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε αλγεβρικά την παραπάνω εξίσωση.

(Μονάδες 9)

γ) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης $|x-3|\geq|x-5|$ και να βρείτε τις λύσεις της.

(Μονάδες 8)



4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

71 – 14738 – Θέμα 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $|x| = 1 \quad (1)$.

(Μονάδες 12)

β) Να λυθεί η ανίσωση $|6x| \leq 6 \quad (2)$.

(Μονάδες 13)

72 – 13558 – Θέμα 2

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2-6x+4$.

α) Να δείξετε ότι οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί 1 και 2.

(Μονάδες 12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-6x+4$.

(Μονάδες 13)

73 – 14194 – Θέμα 2

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2+3x-4=0$ έχει ρίζες $x_1=-4$ και $x_2=1$.

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2+3x-4<0$.

(Μονάδες 12)

74 – 14663 – Θέμα 2

Δίνεται το τριώνυμο x^2-3x+2.

α) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι οι ρίζες του τριωνύμου x^2-3x+2 είναι οι αριθμοί 1 και 2 και να βρείτε το πρόσημό του.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $x^2-3x+2\leq 0$.

(Μονάδες 8)

75 – 14856 – Θέμα 2

α) Να γράψετε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού που έχει ρίζες το 2 και το 4.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης $x^2-6x+8\leq 0$.

(Μονάδες 13)

76 – 14778 – Θέμα 2

α) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου x^2-4x+3.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2-4x+3<0$.

(Μονάδες 15)

77 – 14736 – Θέμα 2

α) Να λυθεί η εξίσωση $x^2-3x+2=0 \quad (1)$.

(Μονάδες 12)

β) Να λυθεί η ανίσωση $x^2-3x\geq -2 \quad (2)$.

(Μονάδες 13)

78 – 13401 – Θέμα 4

α) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 - x - 12$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση $x^2 - x - 12 \leq 0$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης $x^2 - x - 12 \leq 0$.

(Μονάδες 6)

79 – 13477 – Θέμα 4

Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 3x + 2 > 0$.

(Μονάδες 10)

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\alpha_1 = -\frac{3}{2}$ και $\alpha_2 = \frac{3}{2}$ είναι λύσεις της ανίσωσης του β ερωτήματος.

(Μονάδες 8)

80 – 14671 – Θέμα 4

α) Να λύσετε την ανίσωση $4(x - 2) > 5(2x + 8)$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 9x < 0$.

(Μονάδες 12)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των παραπάνω ανισώσεων στον ίδιο άξονα πραγματικών αριθμών και να βρείτε τις κοινές τους λύσεις (αν υπάρχουν).

(Μονάδες 5)

81 – 13452 – Θέμα 4

Δίνονται οι ανισώσεις $3(2x + 1) + 6 < 21$ (1)

και $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ (2).

α) Να λύσετε την ανίσωση (1).

(Μονάδες 8)

β)

i. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 2x - 3 = 0$.

(Μονάδες 5)

ii. Να λύσετε την ανίσωση (2).

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 7)

82 – 13413 – Θέμα 4

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2-7x+6=0$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2-7x+6\leq 0$.Να γράψετε τις λύσεις της ανίσωσης αυτής σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 12)

γ) Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς που είναι λύσεις της ανίσωσης που λύσατε στο ερώτημα (β).

(Μονάδες 5)

83 – 13559 – Θέμα 4

Δίνεται το τριώνυμο $x^2-7x+12$.

α) Να δείξετε ότι το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες τους αριθμούς 3 και 4.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2-7x+12<0$.

(Μονάδες 10)

γ) Για τον πραγματικό αριθμό $\pi=3{,}1415...$ να δείξετε ότι ισχύει $\pi^2-7\pi+12<0$.

(Μονάδες 5)

84 – 14198 – Θέμα 4

α) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου x^2+x-12 (1).

(Μονάδες 8)

β) Αν οι ρίζες του τριωνύμου (1) είναι $x_1=3$ και $x_2=-4$, να λύσετε την ανίσωση $x^2+x-12<0$ και να γράψετε τις λύσεις της σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 12)

γ) Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς που είναι λύσεις της ανίσωσης του ερωτήματος β).

(Μονάδες 5)

85 – 14514 – Θέμα 4

α) Να λύσετε της εξίσωση $x^2-2x+7=0$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου x^2-2x+7 για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο οποιουδήποτε πραγματικού αριθμού αυξημένο κατά 7 είναι μεγαλύτερο του διπλασίου του.

(Μονάδες 7)

86 – 14404 – Θέμα 4

α) Αν $x^2-7x+10<0$, να αποδείξετε ότι $2<x<5$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $3x-2<x+4$.

(Μονάδες 9)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β) στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρείτε τις κοινές τους λύσεις.

(Μονάδες 8)

87 – 14488 – Θέμα 4

Έστω Ω το σύνολο που έχει ως στοιχεία τους αριθμούς που είναι οι ενδείξεις ενός ζαριού.

α) Να γράψετε με αναγραφή το σύνολο Ω.

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την ανίσωση $\mathrm{x}^2-\mathrm{x}-12<0 \quad (1)$.

(Μονάδες 10)

γ) Ποια από τα στοιχεία του συνόλου Ω ανήκουν στο σύνολο λύσεων της ανίσωσης (1);

(Μονάδες 8)

5.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

88 – 13399 – Θέμα 2

Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο 5, 9, 13, 17, …..

α) Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της αριθμητικής προόδου;

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τον $51^{\underline{o}}$ όρο της προόδου.

(Μονάδες 15)

89 – 14191 – Θέμα 2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με πρώτους όρους τους - 4, - 1, 2, 5, 8, ……

α) Να αποδείξτε ότι ο γενικός όρος αυτής της προόδου δίνεται από τη σχέση $\alpha_\nu=3\nu-7$, όπου $\nu=1,2,3,\ldots$.

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίστε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της προόδου.

(Μονάδες 12)

90 – 13412 – Θέμα 2

Θεωρούμε τους αριθμούς 2,4,6,… που συνεχίζονται, προσθέτοντας κάθε φορά το 2.

α) i) Ποιος είναι ο επόμενος αριθμός;

(Μονάδες 5)

ii) Να εξηγήσετε γιατί οι αριθμοί αυτοί, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια η διαφορά ω της προόδου αυτής;

(Μονάδες 10)

β) Ο αριθμός 2 είναι ο 1ος όρος της προόδου του προηγουμένου ερωτήματος. Να βρεθεί ο 8ος όρος της προόδου αυτής.

(Μονάδες 10)

91 – 14195 – Θέμα 2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_2 = 5$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha_{20} = 59$.

(Μονάδες 13)

92 – 14513 – Θέμα 2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_2 = 8$ και $\omega = 2$.

α) Να δείξετε ότι ο 1ος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 6$.

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε τον 7ο όρο α_7 της προόδου.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 7 όρων της προόδου (α_ν).

(Μονάδες 9)

93 – 14630 – Θέμα 2

Σε αριθμητική πρόοδο ισχύει $\alpha_3 = 18$ και $\alpha_4 = 26$.

α) Να αποδείξετε ότι για τη διαφορά ω της προόδου ισχύει $\omega = 8$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τους δυο πρώτους όρους της.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι $\alpha_{37} = 290$.

(Μονάδες 9)

94 – 14659 – Θέμα 2

Θεωρούμε τους αριθμούς $-12, -6, 0, \dots$ που συνεχίζονται προσθέτοντας κάθε φορά το 6.

α) i) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί αυτοί, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τους δύο επόμενους όρους της προόδου αυτής.

(Μονάδες 10)

β) Αν ο -12 είναι 1ος όρος της προόδου του προηγούμενου ερωτήματος, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 5 πρώτων όρων της (προόδου αυτής) είναι ίσο με 0.

(Μονάδες 10)

95 – 14735 – Θέμα 2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_1 = -4$ και $\omega = 7$.

α) Να αποδείξετε ότι ο 2ος όρος της προόδου είναι $\alpha_2 = 3$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τον 5ο όρο α_5 της προόδου.

(Μονάδες 13)

96 – 14965 – Θέμα 2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος: $4, 8, 12, \ldots$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 4$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τον εικοστό όρο της προόδου.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των είκοσι πρώτων όρων της προόδου.

(Μονάδες 9)

97 – 15167 – Θέμα 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $x(x^2 - 1) = 0$.

(Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης σε αύξουσα σειρά και να δείξετε ότι με αυτή τη σειρά αποτελούν διαδοχικούς αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 12)

98 – 14959 – Θέμα 2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με πρώτο όρο $\alpha_1 = 4$ και $\omega = 3$.

α) Να βρείτε το νιοστό όρο της αριθμητικής προόδου (α_ν).

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τον νιοστό όρο μιας νέας αριθμητικής προόδου (β_ν) με όρους τους περιττούς σε τάξη όρους της αριθμητικής προόδου (α_ν), δηλαδή τους $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7 \ldots$.

(Μονάδες 13)

99 – 13456 – Θέμα 4

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_3 = 10$ και $\alpha_5 = 18$

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι $\omega = 4$ και ότι ο πρώτος όρος της είναι $\alpha_1 = 2$.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι ίσο με 32.

(Μονάδες 12)

100 – 14310 – Θέμα 4

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2-9=0$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $2x\cdot(x^2-9)=0$.

(Μονάδες 10)

γ) Να διατάξετε τις ρίζες της εξίσωσης του β) ερωτήματος σε αύξουσα σειρά και να δείξετε ότι με αυτή τη σειρά αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 5)

101 – 13407 – Θέμα 4

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $a_1=1, a_3=7$ και διαφορά ω.

α) Να αποδείξετε ότι ω=3.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της αριθμητικής προόδου (α_ν) είναι ίσος με $\alpha_\nu=3\nu-2,\ \nu\in N$και να βρείτε τον 6ο όρο της προόδου.

(Μονάδες 12)

γ) Υπάρχει όρος της αριθμητικής προόδου (α_ν) που να ισούται με 21;

(Μονάδες 7)

102 – 14664 – Θέμα 4

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) της οποίας ο 1ος όρος είναι $\alpha_1=3$, ενώ ο 10ος όρος είναι $\alpha_{10}=21$.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου (α_ν).

(Μονάδες 8)

Για $\omega=2$

β) Να βρείτε το άθροισμα S_{10} των 10 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου (α_ν).

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε πόσους πρώτους όρους της αριθμητικής προόδου (α_ν) πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να ισούται με 168. (Δίνεται $\sqrt{676}=26$.)

(Μονάδες 9)

103 – 14648 – Θέμα 4

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με γενικό όρο $\alpha_\nu=4\nu-2$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τη διαφορά ω της προόδου.

(Μονάδες 9)

β) Αν $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 4$, να βρείτε τον πρώτο όρο της (α_ν) που είναι μεγαλύτερος του 120.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το άθροισμα S_{30} των 30 πρώτων όρων της προόδου (α_ν).

(Μονάδες 7)

104 – 13403 – Θέμα 4

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_4 = 7$ και $\alpha_5 = 9$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της αριθμητικής προόδου είναι $\omega = 2$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τον πρώτο όρο της αριθμητικής προόδου .

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των έξι πρώτων όρων της προόδου είναι ίσο 36.

(Μονάδες 10)

105 – 13453 – Θέμα 4

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) της οποίας ο 4ος όρος είναι ο α_4=10 και ο 5ος όρος είναι ο α_5 =7.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου (α_ν) είναι ω = −3 και να βρείτε τον 1ο όρο της προόδου α_1.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τον 8ο όρο της προόδου (α_ν).

(Μονάδες 10)

106 – 14311 – Θέμα 4

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των αριθμών 8 και 16 είναι ο 12.

(Μονάδες 7)

β) Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει ότι $\alpha_3 = 8$ και $\alpha_5 = 16$.

i. Να βρείτε τον 4ο όρο α_4 και τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου (α_ν).

(Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε τον 1ο όρο α_1 της αριθμητικής προόδου (α_ν).

(Μονάδες 8)

107 – 14757 – Θέμα 4

Ένα εργοστάσιο κατασκευής πολυτελών αυτοκινήτων κατασκευάζει ένα νέο μοντέλο. Στο τέλος του πρώτου μήνα είχαν κατασκευαστεί 5 τέτοια οχήματα, στο τέλος του δεύτερου μήνα 18, στο τέλος του τρίτου μήνα 31 κ.ο.κ.

α) Πόσα αυτοκίνητα θα είναι κατασκευασμένα στο τέλος του τέταρτου, του πέμπτου και του έκτου μήνα;

(Μονάδες 6)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί ο αριθμός των αυτοκινήτων που είναι κατασκευασμένα στο τέλος κάθε μήνα αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 6)

γ) Πόσα αυτοκίνητα κατασκευάστηκαν τον πρώτο χρόνο;

(Μονάδες 6)

δ) Μετά από πόσους μήνες θα έχει κατασκευαστεί το 250^{o} αυτοκίνητο;

(Μονάδες 7)

108 – 14923 – Θέμα 4

Ένας χώρος δεξίωσης γάμων διαφημίζεται ως εξής: το κόστος για 50 καλεσμένους είναι 6560 ευρώ, ενώ για 100 καλεσμένους είναι 11910 ευρώ. Υποθέτουμε ότι οι τιμές του κόστους για τους καλεσμένους είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_ν), δηλαδή το κόστος για έναν καλεσμένο είναι α_1, για δυο καλεσμένους είναι α_2,..., για πενήντα καλεσμένους α_{50},..., για εκατό καλεσμένους α_{100}, κοκ.

α) Να δείξετε ότι ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 1317$ και η διαφορά $\omega = 107$.

(Μονάδες 9)

β) Να δείξετε ότι το κόστος για ν καλεσμένους είναι $\alpha_\nu = 107\nu + 1210$.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το κόστος για 85 καλεσμένους.

(Μονάδες 7)

109 – 15064 – Θέμα 4

Οι φυσικοί αριθμοί 1, 2, 3, 4, ...σχηματίζουν μια αριθμητική πρόοδο.

α) Να γράψετε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της.

(Μονάδες 2)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των πρώτων ν φυσικών αριθμών δίνεται από τη σχέση:

$$S_\nu = \frac{1}{2}\nu(\nu+1).$$

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των φυσικών αριθμών από το 200 μέχρι το 400.

(Μονάδες 13)

110 – 14818 – Θέμα 4

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος: $4,8,12,\ldots$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 4$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της.

(Μονάδες 6)

γ)

i. Να δείξετε ότι το πλήθος ν των πρώτων όρων της παραπάνω προόδου που έχουν άθροισμα ίσο με 480 είναι λύση της εξίσωσης $\nu^2 + \nu - 240 = 0$.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε το πλήθος των πρώτων όρων της που έχουν άθροισμα τουλάχιστον 480.

(Δίνεται $\sqrt{961} = 31$)

(Μονάδες 7)

5.3 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

111 – 14304 – Θέμα 2

α) Να εξετάσετε αν οι πραγματικοί αριθμοί -3,9,-27 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι πραγματικοί αριθμοί 9, x, 81 να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 10)

112 – 13406 – Θέμα 2

α) Να εξετάσετε αν οι πραγματικοί αριθμοί 1, 2 , 4 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το x ώστε οι πραγματικοί αριθμοί 1, x ,4 να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 10)

113 – 14709 – Θέμα 2

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με πρώτους όρους τους 1, 3, 9,...

α) Να βρείτε τον τέταρτο όρο α_4 της προόδου (α_ν).

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των πέντε πρώτων όρων της (α_ν) είναι:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 121.$$

(Μονάδες 15)

114 – 14872 – Θέμα 2

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_2 = 8$ και $\lambda = 2$.

α) Να δείξετε ότι ο 1ος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 4$.

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε τον 7ο όρο α_7 της προόδου.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 7 όρων της προόδου (α_ν).

(Μονάδες 9)

115 – 14889 – Θέμα 2

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος: 4, 8, 16, 32, …. .

α) Να αιτιολογήσετε γιατί ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 2$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τον δέκατο όρο της προόδου.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της προόδου.

(Μονάδες 7)

116 – 15169 – Θέμα 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $(2x-1)(x-2)(x-1)=0$.

(Μονάδες 12)

β) Να τοποθετήσετε τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης σε αύξουσα σειρά και να δείξετε ότι με αυτή τη σειρά αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 13)

117 – 115168 – Θέμα 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $(x-1)(x^2-4)=0$.

(Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης σε αύξουσα σειρά και να δείξετε ότι με αυτή τη σειρά δεν αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 12)

118 – 15462 – Θέμα 2

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος $(\alpha_\nu): 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τον πέμπτο όρο της προόδου.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων πέντε όρων της προόδου.

(Μονάδες 9)

119 – 14558 – Θέμα 4

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός μέσος των αριθμών $\frac{8}{x}$ και $32x$ είναι ο αριθμός 16, όπου x τυχαίος πραγματικός αριθμός διαφορετικός από το μηδέν.

(Μονάδες 9)

β) Οι αριθμοί $\frac{8}{x}$, 16, $32x$, με αυτή τη σειρά, είναι οι τρεις πρώτοι όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν), με λόγο $\lambda = 4$.

(i) Να αποδείξετε ότι $x = 2$.

(Μονάδες 8)

(ii) Να αποδείξετε ότι ο ν - οστός όρος αυτής της προόδου είναι $\alpha_\nu = 2^{2\nu}$, όπου ν θετικός ακέραιος.

(Μονάδες 8)

120 – 14922 – Θέμα 4

Οι τρεις πρώτοι όροι μιας γεωμετρικής προόδου, με τη σειρά που δίνονται, είναι:

$$k-1, 6 \text{ και } 3k, \ k \in \mathbb{R} - \{0,1\}.$$

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του $k \in \mathbb{R} - \{0,1\}$.

(Μονάδες 8)

β) Για $k = 4$, να βρείτε

i. τον τέταρτο όρο της προόδου.

(Μονάδες 8)

ii. τον πρώτο όρο της προόδου που υπερβαίνει τον αριθμό $3 \cdot 2^8$.

(Μονάδες 9)

121 – 14199 – Θέμα 4

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_3 = -8$ και $\alpha_6 = -64$.

α) Να αποδείξετε ότι ο λόγος είναι $\lambda = 2$ και ο πρώτος όρος $\alpha_1 = -2$.

(Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι : $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = -62$.

(Μονάδες 10)

122 – 15065 – Θέμα 4

Μια αριθμητική πρόοδος (α_ν) έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = 0$ και διαφορά $\omega = 12$.

α) Να δείξετε ότι ο 17ος όρος της προόδου είναι $\alpha_{17} = 192$.

(Μονάδες 8)

β) Ο πρώτος όρος μιας γεωμετρικής προόδου (β_ν) είναι ίσος με 6 και ο έκτος όρος της ισούται με τον 17ο της παραπάνω αριθμητικής προόδου.

i. Να γράψετε μια εξίσωση με άγνωστο τον λόγο λ της προόδου χρησιμοποιώντας τις παραπάνω πληροφορίες.

(Μονάδες 9)

ii. Να βρείτε τον λόγο λ της γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 8)

123 – 15059 – Θέμα 4

Έστω x, y, z πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\frac{x}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+1}{5}=\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}\ \text{ και }\ 3x-4y+5z=45,\ (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $x=3\lambda,\ y=4\lambda+1$ και $z=5\lambda-1$.

(Μονάδες 5)

ii. $\lambda=3$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y, z.

(Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί x, y, z που βρήκατε είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 7)

124 – 14893 – Θέμα 4

Μια μπάλα αφήνεται να πέσει στο έδαφος και μετά την πρώτη αναπήδηση φτάνει σε ύψος h μέτρων. Το μέγιστο ύψος που φτάνει η μπάλα μετά από κάθε αναπήδηση είναι το μισό του προηγούμενου.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί τα διαδοχικά ύψη που θα φτάσει ή μπάλα είναι όροι γεωμετρικής προόδου (α_ν) με πρώτο όρο $\alpha_1=h$ και λόγο $\lambda=\frac{1}{2}$ και να γράψετε τον γενικό της όρο.

(Μονάδες 13)

β) Αν μετά την δεύτερη αναπήδηση η μπάλα φτάσει σε ύψος δύο μέτρων (2m), να βρείτε το ύψος h της πρώτης αναπήδησης.

(Μονάδες 12)

6.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

125 – 13395 – Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε ποιος από τους αριθμούς $f(-2)$ και $f(1)$ είναι μεγαλύτερος.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=f(1)$.

(Μονάδες 13)

126 – 14658 – Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+4$.

α) Να βρείτε ποιος από τους αριθμούς f(-2) και f(1) είναι μεγαλύτερος.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=f(1)$.

(Μονάδες 13)

127 – 14700 – Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x<0 \\ x^2+2, & x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης $f(0)$ και $f(-1)$.

(Μονάδες 12)

β) Για $x<0$ να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \leq 2$.

(Μονάδες 13)

128 – 14193 – Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x+3, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $f(2)$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 7$ και να γράψετε τη λύση της σε διάστημα.

(Μονάδες 13)

129 – 14780 – Θέμα 2

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών μιας αντιστοίχισης $x \to y$ με το x να παίρνει μόνο τις τιμές: $-2,-1,0,\frac{1}{2},1$ και 3.

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
y	0	-4	-6	$-\frac{25}{4}$	-6	0

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η παραπάνω αντιστοίχιση $x \to y$ είναι συνάρτηση.

(Μονάδες 12)

β) Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

(Μονάδες 13)

130 – 14819 – Θέμα 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-x}{3x^2-x-2}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η συνάρτηση f.

(Μονάδες 6)

β) Να παραγοντοποιήσετε τον παρονομαστή της συνάρτησης f .

(Μονάδες 4)

γ) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f.

(Μονάδες 5)

δ) Να λύσετε την εξίσωση $|f(x)|=\frac{1}{4}$.

(Μονάδες 10)

131 – 14705 – Θέμα 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |2x - 5| + 4, x \in R$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(1), f(3)$ και $f\left(\frac{5}{2}\right)$.

(Μονάδες 9)

β) Να δικαιολογήσετε γιατί η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει λύση.

(Μονάδες 6)

γ) Έστω $x \geq \frac{5}{2}$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2x - 1$.

(Μονάδες 5)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x^2}{5} + x = f(x)$.

(Μονάδες 5)

132 – 14632 – Θέμα 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x-2| + x, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή της όταν $x = 2$ και όταν $x = -3$.

(Μονάδες 10)

β) Έστω $x > 2$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2(x-1)$

(Μονάδες 8)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = (x-2)(x-1)$.

(Μονάδες 7)

133 – 13397 – Θέμα 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x-3| + 4, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(2), f(3), f(4)$.

(Μονάδες 9)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση $f(x) = 3$ δεν έχει λύση.

(Μονάδες 6)

γ) Έστω $x \geq 3$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + 1$.

(Μονάδες 5)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x^2}{16} + x = f(x)$.

(Μονάδες 5)

134 – 14716 – Θέμα 4

Θεωρούμε το τριώνυμο x^2-5x+6 και τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^2-5x+6}$

α) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου και να το παραγοντοποιήσετε.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης και να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ο παραπάνω τύπος της συνάρτησης γράφεται $f(x)=\dfrac{x}{x-3}$

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=4$

(Μονάδες 6)

135 – 14816 – Θέμα 4

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=|x-2|+3$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f(2)$ και $f(-2)$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)=7$.

(Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει $x\in\mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση να πάρει την τιμή 2.

(Μονάδες 9)

136 – 14331 – Θέμα 4

α) Να αποδείξετε ότι $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$.

(Μονάδες 7)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 7)

ii) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x-2$,για κάθε x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 6)

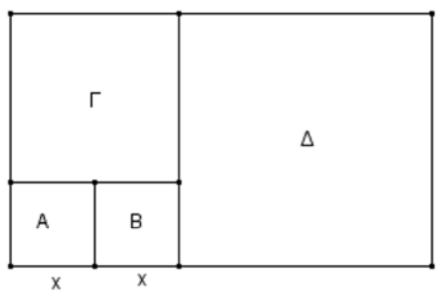
iii) Να βρείτε, αν υπάρχει, τιμή του πραγματικού αριθμού x, για την οποία $f(x)=-1$.

(Μονάδες 5)

137 – 14807 – Θέμα 4

Το διπλανό σχήμα αποτελείται από τέσσερα τετράγωνα Α, Β, Γ, Δ.

Αν καθένα από τα Α, Β έχει πλευρά ίση με x, $x>0$ τότε:



α) Να βρείτε την περίμετρο του σχήματος.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν του $E(x)$ ισχύει $E(x)=15x^2$

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του αριθμού x το εμβαδόν είναι μικρότερο από 240.

(Μονάδες 10)

6.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

138 – 13500 – Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 1$, με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f(0)$.

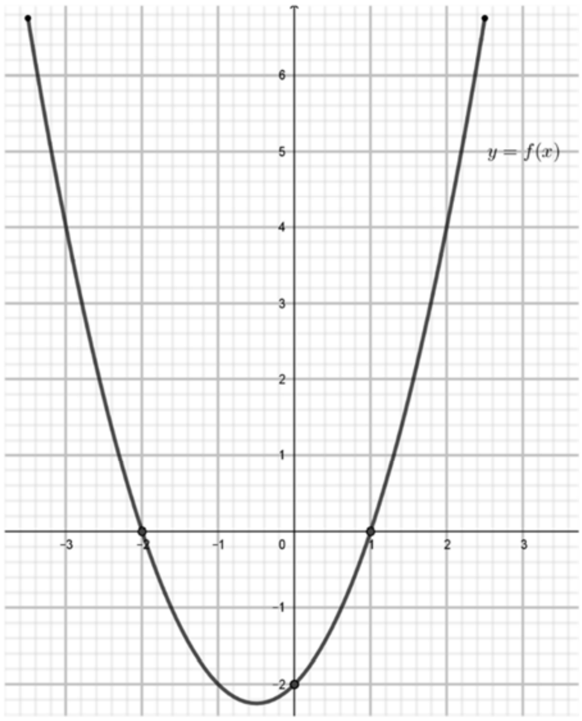
(Μονάδες 14)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί τα σημεία $A(2,7)$ και $B(0,-1)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f.

(Μονάδες 11)

139 – 14890 – Θέμα 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτηση f, με $-3,5 \le x \le 2,5$.



α)

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της παραπάνω γραφικής παράστασης με τους άξονες.

(Μονάδες 6)

ii. Για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση είναι κάτω από τον $x'x$ άξονα;

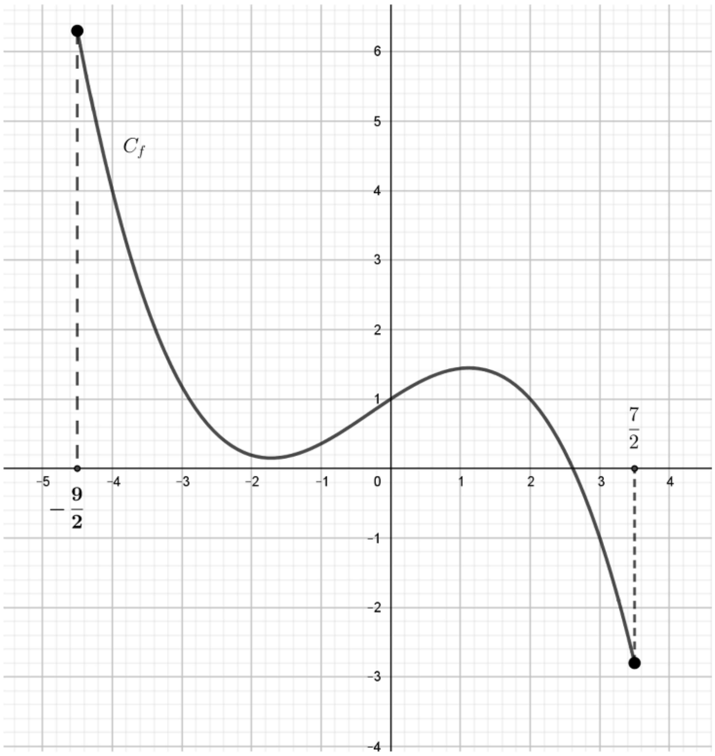
(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τα σημεία της παραπάνω γραφικής παράστασης που έχουν τεταγμένη $y = 4$.

(Μονάδες 13)

140 – 15461 – Θέμα 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 4)

β)

i. Να βρείτε το $f(2)$ και το $f(3)$.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε την τιμή του x ώστε $f(x)=4$.

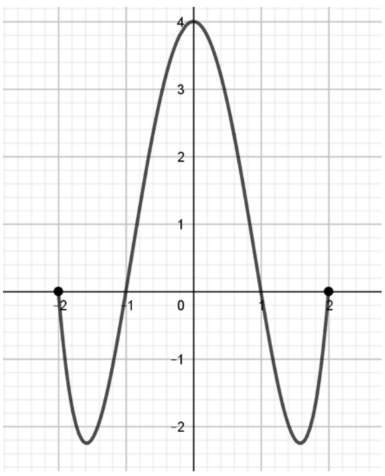
(Μονάδες 6)

γ) Υπάρχει σημείο στη γραφική παράσταση της f που να έχει τετμημένη 4; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

141 – 15424 – Θέμα 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ολόκληρη η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 4)

β) Πόσα σημεία της γραφικής παράστασης της f έχουν τεταγμένη -1; Να τα σημειώσετε στο παραπάνω σχήμα με ένα γράμμα.

(Μονάδες 7)

γ)

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

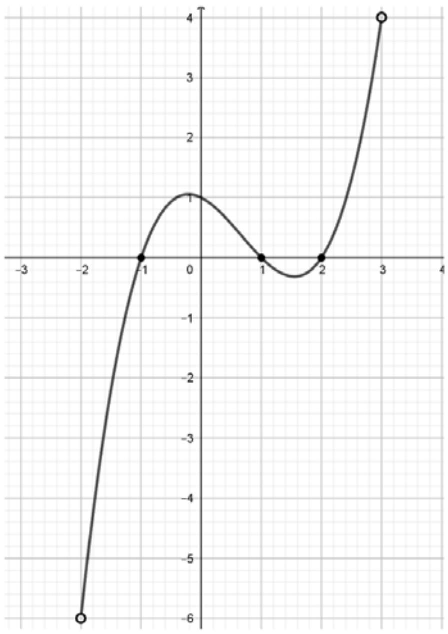
(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τον $x'x$ άξονα.

(Μονάδες 8)

142 – 14966 – Θέμα 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ολόκληρη η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g.



α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 4)

β) Πόσα σημεία της γραφικής παράστασης της g έχουν τεταγμένη 2; Να τα σημειώσετε στο παραπάνω σχήμα με ένα γράμμα.

(Μονάδες 7)

γ)

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της g είναι κάτω από τον $x'x$ άξονα.

(Μονάδες 8)

143 – 14768 – Θέμα 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4x - 20, x \in R$ και $g(x) = x^2 - 16, x \in R$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της g με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν μοναδικό κοινό σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες του.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε την τετμημένη ενός σημείου της γραφικής παράστασης της f, του οποίου η τεταγμένη είναι -24.

(Μονάδες 7)

144 – 13462 – Θέμα 4

α) Να λύσετε την εξίσωση $|x-1|=4\,(1)$

(Μονάδες 10)

β) Η εξίσωση $x^2 - Sx + P = 0$ έχει ίδιες ρίζες με την εξίσωση (1). Να βρείτε τα S και P.

(Μονάδες 7)

γ) Το σημείο Α(ρ, 5), όπου ρ ρίζα της εξίσωσης (1) ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο. Να βρείτε την τιμή του ρ.

(Μονάδες 8)

145 – 14318 – Θέμα 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x+\alpha}{x+3}, x \neq -3$ και α ένας πραγματικός αριθμός. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή $O(0, 0)$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$.

(Μονάδες 5)

Για τη συνέχεια θεωρήσετε ότι $\alpha = 0$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ευθεία $y = x$.

(Μονάδες 10)

146 – 13396 – Θέμα 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της Α.

(Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν τα σημεία Μ(3,3) και Ν(1, 1) ανήκουν στη γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 12)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \dfrac{1}{2}$.

(Μονάδες 8)

147 – 14817 – Θέμα 4

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$. Τέμνει η γραφική παράσταση της f τον $y'y$ άξονα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν στη γραφική παράσταση της f υπάρχει σημείο με τεταγμένη 1.

(Μονάδες 10)

148 – 15099 – Θέμα 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=|x-5|$ και η ευθεία $y=3$.

α) Με βάση το σχήμα, να βρείτε τις τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=3$.

(Μονάδες 6)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα α).

(Μονάδες 6)

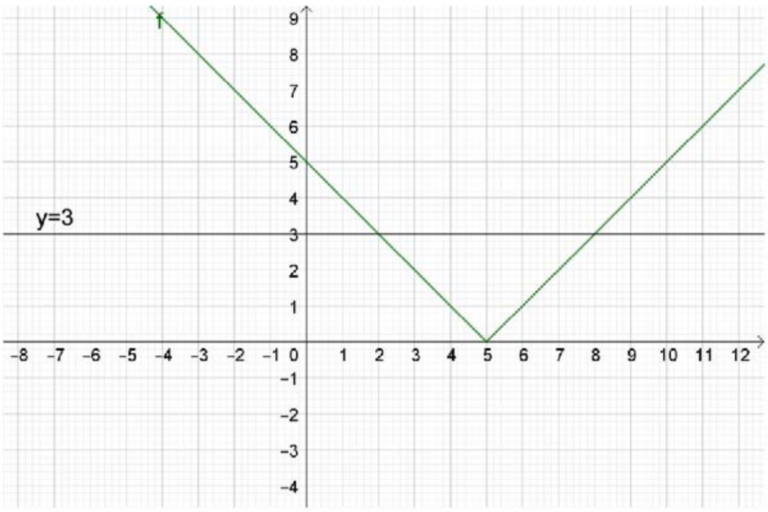
γ) Να λύσετε την ανίσωση $|x-5|<3$

i. γραφικά με βάση το σχήμα.

(Μονάδες 6)

ii. αλγεβρικά.

(Μονάδες 7)



149 – 14472 – Θέμα 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $f(-2)$.

(Μονάδες 5)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $M(-2,3)$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$.

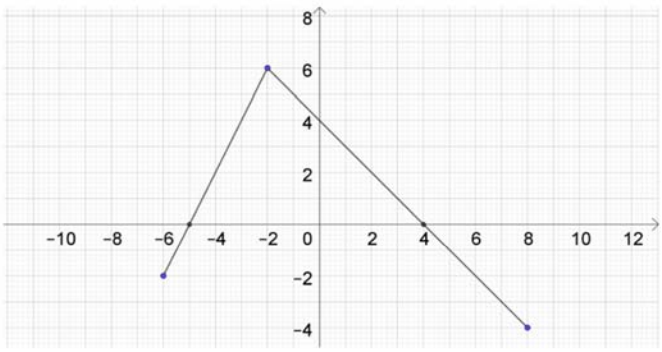
(Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$.

(Μονάδες 8)

150 – 14822 – Θέμα 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης

α) να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(Μονάδες 5)

β) να βρείτε τις τιμές $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$.

(Μονάδες 6)

γ) να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει ότι $f(x)=0$.

(Μονάδες 7)

δ) να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει ότι $f(x)<0$.

(Μονάδες 7)

6.3 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ f(x) = αx + β

151 – 14767 – Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x - 6, x \in R$.

α) Να βρείτε τους αριθμούς $f(0), f(3)$.

(Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης.

(Μονάδες 13)

152 – 14827 – Θέμα 2

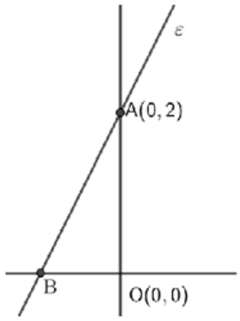
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας ευθείας ε με εξίσωση $y = 2x + \beta$.

α) Να αποδείξετε ότι $\beta = 2$.

(Μονάδες 11)

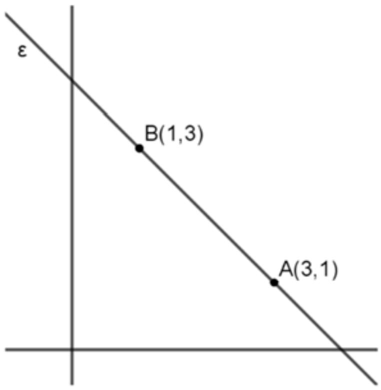
β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής B της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 14)



153 – 14643 – Θέμα 2

Η ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία $A(3,1)$ και $B(1,3)$



α) Να δείξετε ότι η ευθεία ε έχει κλίση $\alpha = -1$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας.

(Μονάδες 13)

154 – 14461 – Θέμα 2

Δίνεται η ευθεία $y = \frac{4}{3}x - 4$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της Α, Β με τους άξονες και να την σχεδιάσετε.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 12)

155 – 14197 – Θέμα 4

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = 2x + 4$.

α) Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω σημεία ανήκουν στην ευθεία ε:

$A(-1,2)$, $B(6,1)$, $\Gamma(1,6)$.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\Delta(-2,0)$.

(Μονάδες 7)

γ) Σχεδιάστε την ευθεία ε στο καρτεσιανό επίπεδο.

(Μονάδες 8)

156 – 14642 – Θέμα 4

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 - 2x$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής A και B της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f και η ευθεία $\varepsilon: y = -1$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $\Gamma(1, -1)$.

(Μονάδες 9)

γ) Να δείξετε ότι οι τετμημένες των σημείων A, Γ και B είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω.

(Μονάδες 8)

157 – 14657 – Θέμα 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)

ii. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = x + 2, x \in R - \{2\}$.

(Μονάδες 10)

158 – 14382 – Θέμα 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x - 3$ με $x \in \mathbb{R}$.

α)

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

(Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $(1,1)$.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f που έχει τεταγμένη 21.

(Μονάδες 9)

ii. Να παραστήσετε γραφικά την f.

(Μονάδες 4)

159 – 14821 – Θέμα 4

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα σημεία $M(3,6)$ και $O(0,0)$.

(Μονάδες 8)

β) Αν η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι η $y=2x$

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) και διέρχεται από το σημείο $K(0,4)$.

(Μονάδες 9)

ii. Να βρείτε το σημείο τομής της ευθείας (η) με τον άξονα xx'.

(Μονάδες 8)

160 – 14708 – Θέμα 4

Δίνεται ευθεία ε: y=αx+5. Αν η ευθεία δ : y=-3x-6 είναι παράλληλη στην (ε), τότε:

α)

i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας ε.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x΄x;

(Μονάδες 7)

β)

i. Να βρείτε σε ποια σημεία η ευθεία ε: y=-3x+5 τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y.

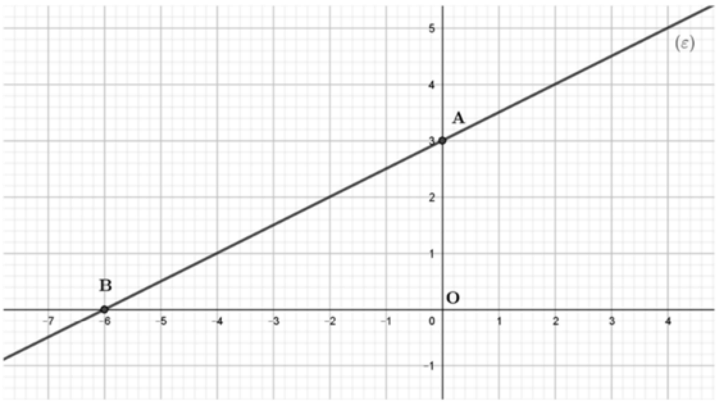
(Μονάδες 6)

iii. Να σχεδιάσετε την ευθεία.

(Μονάδες 6)

161 – 14779 – Θέμα 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση $y=\alpha x+\beta,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.



α) Να γράψετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α της ευθείας (ε) με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η κλίση της ευθείας (ε) ισούται με $\frac{1}{2}$.

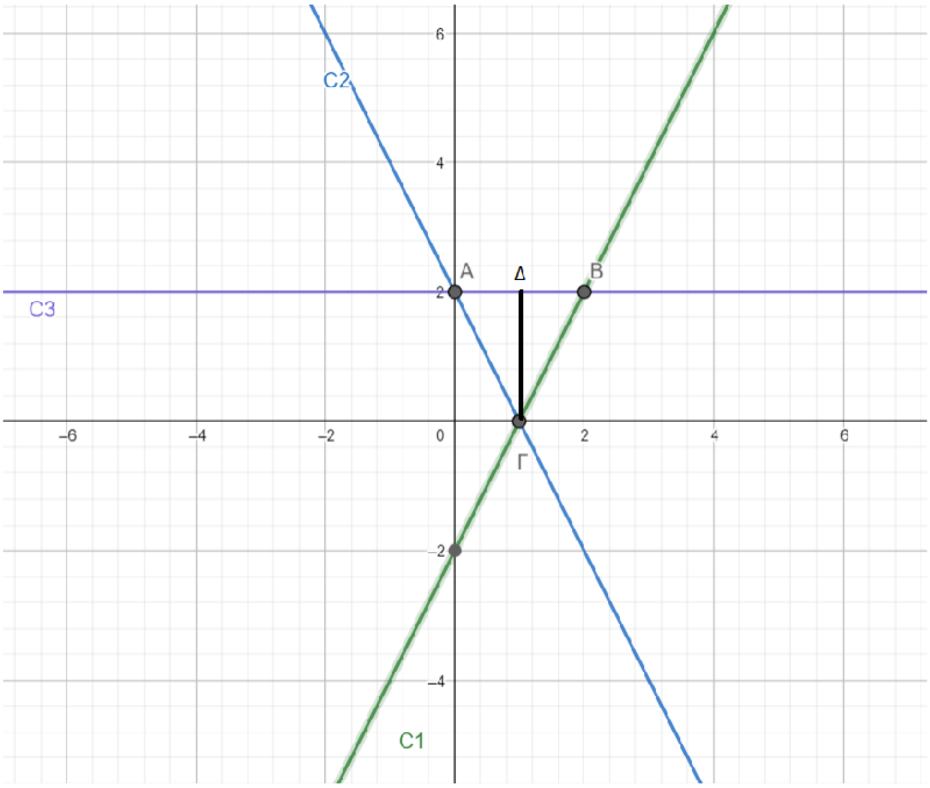
(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β και στη συνέχεια να γράψετε την εξίσωση της ευθείας (ε).

(Μονάδες 8)

162 – 15045 – Θέμα 4

Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1 , C_2 και C_3 αντίστοιχα, που αντιπροσωπεύουν τρεις δρόμους μιας πόλης, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Με τη βοήθεια του σχήματος να βρείτε:

α) Τα σημεία συνάντησης των τριών δρόμων Α,Β και Γ

(Μονάδες 6)

β)Την εξίσωση της ευθείας (δρόμου) C_3.

(Μονάδες 6)

γ) Την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα Α και Γ.

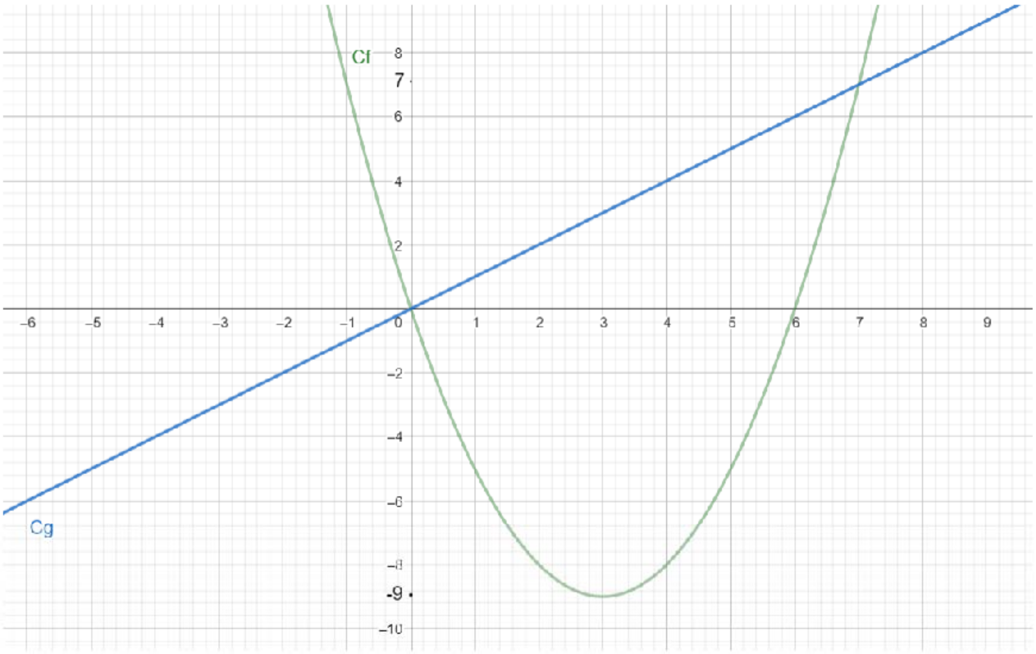
(Μονάδες 8)

δ) Το εμβαδόν του τριγωνικού κόμβου ΑΒΓ.

(Μονάδες 5)

163 – 14999 – Θέμα 4

Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και $g(x) = x$ αντίστοιχα, που είναι ορισμένες σε όλο το $\mathbb{R}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Με τη βοήθεια του σχήματος:

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των δύο συναρτήσεων f και g

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x) = 0$.

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) < g(x)$.

(Μονάδες 11)