

ΝΕΑ ΘΕΜΑΤΑ (μέχρι τις 4/5/2023)

148 Θέμα 2 - 21227

α. Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 5x - y = 5 \\ -5x + y = 2 \end{cases}$$

β. Να σχεδιάσετε τις ευθείες $(\epsilon_1): 5x - y = 5$ και $(\epsilon_2): -5x + y = 2$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το αποτέλεσμα του **α.** ερωτήματος.

149 Θέμα 2 - 18431

Δίνεται το σύστημα
$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 6x + ky = 8 \end{cases}$$
 με αγνώστους x, y και k παράμετρος.

α. Να λύσετε το σύστημα όταν $k = 2$.

β. Να λύσετε το σύστημα όταν $k = 1$.

150 Θέμα 2 - 15787

Προκειμένου να ελεγχθεί μηχανισμός εκτόξευσης πυραύλων δημιουργήσαμε το διπλανό σχήμα στο οποίο φαίνεται η απόσταση του πυραύλου από το έδαφος σε συνάρτηση με τον χρόνο.



α. Να βρείτε:

- i.** Τον συνολικό χρόνο κίνησης του πυραύλου.
- ii.** Το μέγιστο ύψος που έφτασε ο πύραυλος και ποια χρονική στιγμή συνέβη αυτό.

β. Σε επανάληψη του ελέγχου η εκτόξευση πραγματοποιείται από ύψος 1Km .

- i.** Να μεταφέρεται στη κόλλα σας την αποτύπωση της πρώτης εκτόξευσης και να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την δεύτερη.
- ii.** Το νέο μέγιστο ύψος που έφτασε ο πύραυλος και ποια χρονική στιγμή συνέβη αυτό.

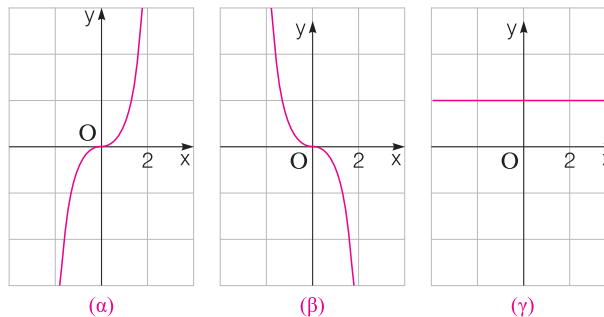
151 Θέμα 2 - 21164

Δίνεται το σημείο $A(-2, 8)$ το οποίο ανήκει στη γραφική παράσταση μίας περιττής και γνησίως μονότονης συνάρτησης f .

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες ενός ακόμα σημείου, το οποίο να ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

β. Να βρείτε αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

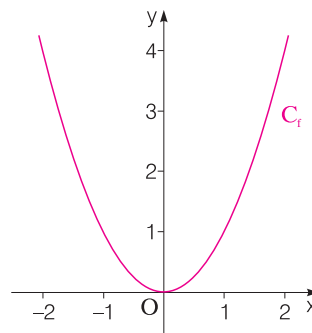
γ. Αν μία από τις διπλανές γραφικές παραστάσεις αντιστοιχεί στη συνάρτηση f να αιτιολογήσετε ποια μπορεί να είναι:



152 Θέμα 2 - 21673

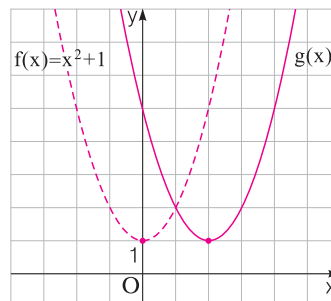
Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $\varphi(x)$ της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από την C_f αν την μετατοπίσουμε μία μονάδα, προς τα πάνω.
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)$.
- Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της $\varphi(x)$.

**153 Θέμα 2 - 20671**

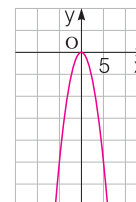
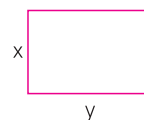
Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 1$ και η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $g(x)$ με $x \in \mathbb{R}$.

- Είναι η f άρτια ή περιττή συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 - Έχει η f μέγιστη τιμή ή ελάχιστη; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- Με ποια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f προέκυψε η γραφική παράσταση της g ;
 - Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g .

**154 Θέμα 4 - 20715**

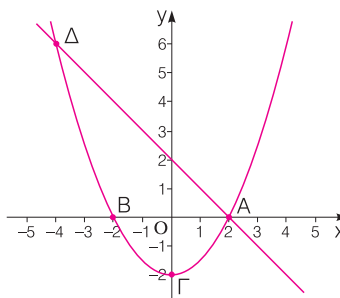
Με συρματόπλεγμα μήκους 20 m θέλουμε να περιφράξουμε οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις x και y , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

- Να εκφράσετε την πλευρά y ως συνάρτηση της πλευράς x και να βρείτε τις δυνατές τιμές της πλευράς x .
- Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x δίνεται από τη συνάρτηση $E(x) = -(x-5)^2 + 25$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της στο πλαίσιο του προβλήματος.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -x^2$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Μετατοπίζοντάς τη κατάλληλα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $E(x)$ και με βάση αυτή, να βρείτε το x έτσι ώστε το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου να γίνεται μέγιστο.
- Για την τιμή του x που βρήκατε στο ερώτημα γ , να βρείτε την πλευρά y και να προσδιορίσετε το είδος του ορθογωνίου.



155 Θέμα 4 - 14294

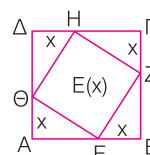
Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας παραβολής $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ και της ευθείας $g(x) = -x + 2$.



- α. Δεδομένου ότι η παραβολή διέρχεται από τα σημεία A, B, Γ , να βρείτε τις τιμές των a, β, γ .
- β. Αν $a = \frac{1}{2}, \beta = 0$ και $\gamma = -2$, να βρείτε αλγεβρικά τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας και της παραβολής.
- γ. Αν μετατοπίσουμε την παραβολή κατά 4,5 μονάδες προς τα πάνω, να δείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

156 Θέμα 4 - 20713

Στο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2 cm, παίρνουμε τα εσωτερικά σημεία E, Z, H, Θ των πλευρών $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$, αντίστοιχα, ώστε $EB = Z\Gamma = H\Delta = \Theta A = x$ και σχηματίζεται το τετράγωνο $EZH\Theta$.



- α. Να εκφράσετε την πλευρά EZ ως συνάρτηση του x και να βρείτε τις δυνατές τιμές του x .
- β. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου $EZH\Theta$ συναρτήσει της πλευράς x δίνεται από τη συνάρτηση $E(x) = 2(x - 1)^2 + 2$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της στο πλαίσιο του προβλήματος.
- γ. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2x^2$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Μετατοπίζοντάς την κατάλληλα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $E(x)$ και με βάση αυτή, να βρείτε το x έτσι ώστε το εμβαδόν $E(x)$ του $EZH\Theta$ να γίνεται ελάχιστο.
- δ. Τι συμπέρασμα προκύπτει για τα σημεία E, Z, H, Θ στην περίπτωση που το εμβαδόν του $EZH\Theta$ γίνεται ελάχιστο.



157 Θέμα 2 - 21161

Σε έναν κύκλο ακτίνας ρ θεωρούμε ένα τόξο AB με μήκος ίσο με 2ρ .

- α. Να βρείτε πόσα ακτίνια είναι η αντίστοιχη στο τόξο AB , επίκεντρη γωνία ω .
- β. Αν $\omega = 2$ ακτίνια, να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία ω .

158 Θέμα 2 - 18868

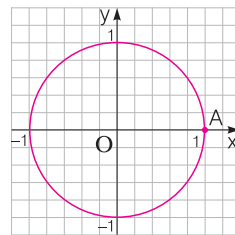
- α. Να αποδείξετε ότι $\epsilon\phi 500^\circ = \epsilon\phi 140^\circ$.
- β. i. Να βρείτε το πρόσημο του τριγωνομετρικού αριθμού $\epsilon\phi 500^\circ$.
- ii. Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $A = \epsilon\phi 500^\circ \cdot \eta\mu 250^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 300^\circ$.

159 Θέμα 2 - 17793

Στον τριγωνομετρικό κύκλο έχει σημειωθεί το σημείο Α.

α. Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας και να τοποθετήσετε κατά προσέγγιση στον τριγωνομετρικό κύκλο σημεία Β, Γ, Δ ώστε να δημιουργηθούν τόξα $\widehat{AB} = 1 \text{ rad}$, $\widehat{AG} = 2 \text{ rad}$ και $\widehat{AD} = 4 \text{ rad}$.

β. Για κάθε ένα τόξο του **α.** ερωτήματος να αποφανθείτε αν το συνημίτονο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας είναι θετικός ή αρνητικός αριθμός. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



160 Θέμα 2 - 20817

Δίνεται γωνία ω , με $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$, για την οποία ισχύει $\text{συν}\omega = -\frac{4}{5}$.

α. Να δείξετε ότι $\eta\mu\omega = -\frac{3}{5}$.

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{\eta\mu\omega + \text{συν}\omega}{1 + \epsilon\phi\omega}$.

161 Θέμα 2 - 18829

Έστω θ μία γωνία για την οποία ισχύει $\text{συν}\theta = -\frac{2}{3}$ και $\theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

α. Να βρείτε το $\eta\mu\theta$.

β. Αν $\eta\mu\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \text{συν}(\pi - \theta)\text{συν}(-\theta) - \eta\mu(\pi - \theta)\eta\mu(-\theta).$$

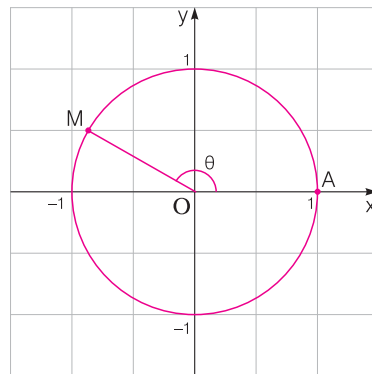
162 Θέμα 2 - 15060

Στον τριγωνομετρικό κύκλο του σχήματος θεωρούμε το σημείο $M\left(x, \frac{1}{2}\right)$ και τη γωνία θ με $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ η οποία έχει αρχική πλευρά την OA και τελική την OM.

α. Να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει $\eta\mu\theta = \frac{1}{2}$.

β. Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας θ .

γ. Να βρείτε τη γωνία θ .



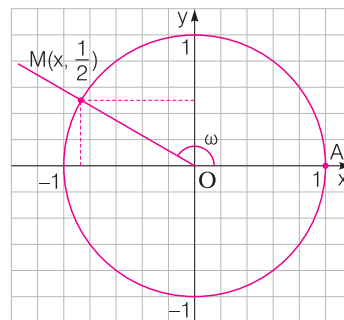
163 Θέμα 2 - 16000

α. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία θ ώστε $\eta\mu\theta = \frac{1}{2}$ και $\text{συν}\theta = \frac{1}{2}$.

β. Έστω θ μία γωνία με $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ για την οποία ισχύει $\text{συν}\theta = \frac{1}{2}$. Να βρείτε το $\eta\mu\theta$.

164 Θέμα 2 - 20824

Στο διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται γωνία $\widehat{AOx} = \omega$, $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ και το σημείο $M\left(x, \frac{1}{2}\right)$.



α. Να βρείτε το $\eta\omega$. Με ποιον τριγωνομετρικό αριθμό της γωνίας ω ισούται η τετμημένη x του σημείου M ;

β. Να δείξετε ότι $\sigma\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

165 Θέμα 2 - 20761

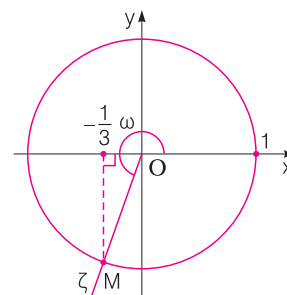
Δίνεται γωνία ω η οποία είναι ίση με -1125° .

α. Να αποδείξετε ότι η γωνία ω ισούται με $\frac{-25\pi}{4}$ ακτίνια (rad).

β. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

166 Θέμα 2 - 20942

Στο διπλανό σχήμα δίνεται γωνία $\widehat{xOz} = \omega$ με $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$.



α. Να αιτιολογήσετε ότι $\sigma\omega = -\frac{1}{3}$.

β. Να υπολογίσετε το ημίτονο και την εφαπτομένη της γωνίας ω .

γ. Να υπολογίσετε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας $\pi - \omega$.

167 Θέμα 2 - 15999

Δίνεται η παράσταση $A = 2\sigma\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \eta\mu(-\theta)$.

α. Να αποδείξετε ότι $A = \eta\mu\theta$.

β. Να βρείτε την τιμή της παράστασης A , όταν $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ και $\sigma\theta = \frac{12}{13}$.

168 Θέμα 2 - 21237

Δίνεται ότι $\eta\mu\theta = \frac{\eta\mu\frac{2\pi}{3} - \sigma\sigma\frac{\pi}{3}}{\sigma\sigma^2\frac{\pi}{4}}$.

α. Να δείξετε ότι:

i. $\eta\mu\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

ii. $\eta\mu\theta = \sqrt{3} - 1$.

β. Αν για την γωνία θ έχουμε $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, να βρείτε το $\sigma\theta$.

169 Θέμα 2 - 22002

Δίνεται ότι $\eta\mu 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Να βρείτε τους ακόλουθους τριγωνομετρικούς αριθμούς, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

- α.** $\sigma\upsilon\nu 72^\circ$
β. $\sigma\upsilon\nu 108^\circ$
γ. $\eta\mu 162^\circ$.

170 Θέμα 4 - 18231

Έστω $f: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση C_f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

- α.** Να βρείτε τη μονοτονία και τη μέγιστη τιμή της.
β. Να συγκρίνετε τους αριθμούς

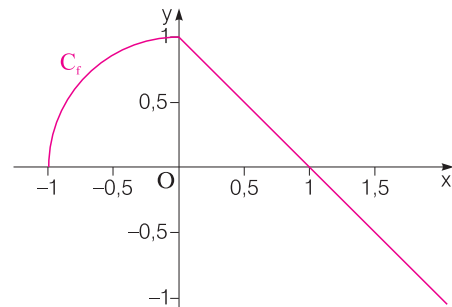
$$f\left(-\frac{3}{5}\right), f\left(-\frac{5}{9}\right).$$

- γ.** Αν ο τύπος της συνάρτησης είναι

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x, & x > 0 \end{cases},$$

να βρείτε τους αριθμούς $f(\sigma\upsilon\nu 120^\circ)$, $f(\eta\mu 120^\circ)$.

- δ.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x-2)$, $x \geq 1$.

**171 Θέμα 2 - 20807**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\pi+x) + \eta\mu(-x)$, $x \in \mathbb{R}$.

- α.** Να αποδείξετε ότι $f(x) = -2\eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε την περίοδο αυτής.
β. i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
f(x) = -2ημx					

- ii.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $0 \leq x \leq 2\pi$.

172 Θέμα 2 - 20660

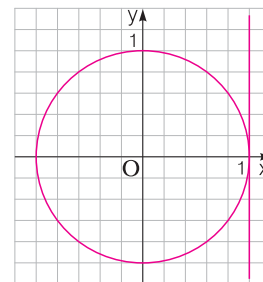
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\pi-x) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

- α.** Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2\eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
β. i. Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f .
ii. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f για $0 \leq x \leq 2\pi$.

173 Θέμα 2 - 16131

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \epsilon\phi x$, $x \in \mathbb{R} - \{k\pi + \frac{\pi}{2}\}$, όπου $k \in \mathbb{Z}$.

- α. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$.
- β. Να μεταφέρετε στο γραπτό σας το διπλανό σχήμα, στο οποίο να παραστήσετε τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης.



174 Θέμα 2 - 21235

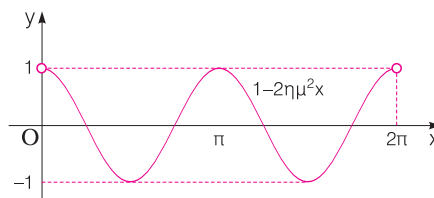
Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\eta\mu(180^\circ - 20^\circ) \cdot \sigma\upsilon\nu(-3x)}{\sigma\upsilon\nu(90^\circ - 20^\circ)}$.

- α. Να δείξετε ότι $A = \sigma\upsilon\nu 3x$.
- β. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή και την περίοδο της συνάρτησης $f(x) = \sigma\upsilon\nu 3x$.

175 Θέμα 2 - 20867

Δίνεται η παράσταση $A = \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x$.

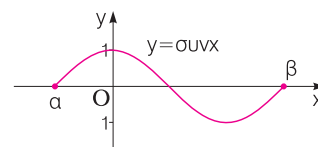
- α. Να βρείτε την τιμή της παράστασης A για $x = 0$.
- β. Να δείξετε ότι $A = 1 - 2\eta\mu^2 x$.
- γ. Με τη χρήση της διπλανής γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τύπο $1 - 2\eta\mu^2 x$ και του ερωτήματος β., να λύσετε την εξίσωση $A = 1$, για $0 < x < 2\pi$.



176 Θέμα 2 - 22007

Στο σχήμα φαίνεται απόσπασμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\sigma\upsilon\nu x$.

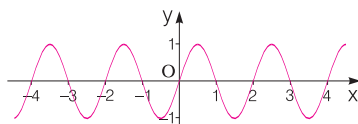
- α. Να βρείτε τα α και β .
- β. Προς ποια κατεύθυνση και κατά πόσο πρέπει να μετατοπιστεί η παραπάνω καμπύλη ώστε να συμπέσει με τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\eta\mu x$;



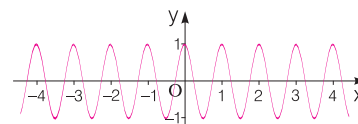
177 Θέμα 2 - 22003

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \eta\mu(2\pi x)$.

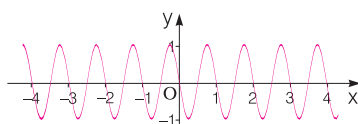
- α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο $T = 1$.
- β. Να υπολογίσετε το $f(0)$ και το $f(\frac{1}{4})$.
- γ. Μία από τις διπλανές τέσσερις καμπύλες αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Ποια είναι αυτή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



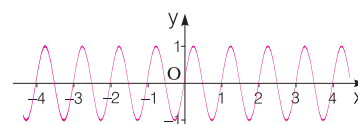
i.



ii.



iii.



iv.

178 Θέμα 4 - 18234

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x - 1$, $x \in [0, 2\pi]$.

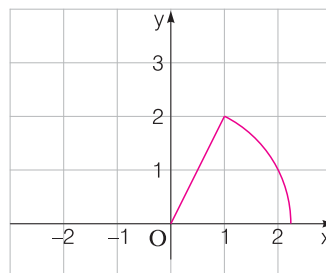
- α.** Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της. Για ποιες τιμές του x προκύπτουν αυτές;
β. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
γ. Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.
δ. Αν για κάποιο αριθμό α με $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $f(\alpha) = f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

179 Θέμα 4 - 15689

Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$.

Στο διπλανό σχήμα δίνεται, για τις μη αρνητικές τιμές του x , η γραφική της παράσταση. Αν είναι γνωστό ότι η f είναι άρτια, τότε:

- α.** Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση για τις αρνητικές τιμές του x .
β. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της, την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της. Για ποιες τιμές του x προκύπτουν οι ακρότατες τιμές της;
γ. Έστω θ ένας αριθμός με $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Να συγκρίνεται τους αριθμούς:
i. $\eta\mu\theta$ και $\sigma\upsilon\eta\theta$. **ii.** $f(\eta\mu\theta)$ και $f(\sigma\upsilon\eta\theta)$.

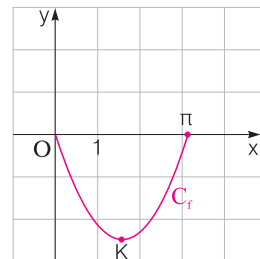
**180 Θέμα 4 - 15095**

Οι εξισώσεις των γραμμών που αποτελούν την περίμετρο μιας επίπεδης μεμβράνης όπως φαίνεται κάτω από ένα μικροσκόπιο, είναι:

$$x = 0, y = x^2 - \pi x, y = \frac{1}{2} + \eta\mu x \text{ και } x = 3.$$

Η μεμβράνη πρόκειται να καλυφθεί με ένα γυάλινο ορθογώνιο πλακίδιο.

- α. i.** Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - \pi x$, $x \in [0, \pi]$ είναι το τμήμα της παραβολής που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, η οποία παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $K\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi^2}{4}\right)$. Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{2} + \eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.



- ii.** Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε τα ακρότατα των δύο συναρτήσεων και τα διαστήματα μονοτονίας τους.
β. Να βρείτε την μέγιστη κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.
γ. Να βρείτε τις ελάχιστες διαστάσεις του ορθογώνιου πλακιδίου.

181 Θέμα 4 - 20870

Το βάθος y , σε μέτρα, του νερού σε ένα λιμάνι επηρεάζεται από το φαινόμενο της παλίρροιας κατά τη διάρκεια μιας ημέρας (εντός 24 ωρών). Το πρώτο (μετά τα μεσάνυχτα) μέγιστο βάθος είναι 5,8 μέτρα και συμβαίνει στις 3:00 π.μ. Το πρώτο ελάχιστο βάθος είναι 2,6 μέτρα και συμβαίνει στις 9:00 π.μ. Το βάθος y δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου t (σε ώρες) από τη σχέση: $y = \alpha \eta\mu(\omega t) + \beta$, με $\alpha, \omega, \beta > 0$ και $0 \leq t \leq 24$.

α. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α , ω και β .

β. Αν $\alpha = 1,6$, $\omega = \frac{\pi}{6}$ και $\beta = 4,2$.

i. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $y = 1,6 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 4,2$, με $0 \leq t \leq 24$.

ii. Ποιο θα είναι το βάθος του νερού στις 12 το μεσημέρι;

iii. Ένα μεγάλο πλοίο χρειάζεται τουλάχιστον 4,2 μέτρα βάθος νερού για να δέσει στο λιμάνι. Στη διάρκεια ποιου χρονικού διαστήματος από τις 12 το μεσημέρι και μετά θα μπορεί να δέσει με ασφάλεια;

182 Θέμα 2 - 1629

Δίνεται γωνία ω , με $0 \leq \omega < 2\pi$ που ικανοποιεί τις σχέσεις: $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{1}{2}$ και $\eta\mu\omega > 0$.

α. Να σχεδιάσετε τη γωνία ω πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο και να βρείτε το μέτρο της.

β. Να βρείτε όλες τις γωνίες φ με $\varphi \in \mathbb{R}$, που ικανοποιούν τη σχέση $\sigma\upsilon\nu\varphi = -\frac{1}{2}$.

183 Θέμα 2 - 21995

Πόσες και ποιες λύσεις έχει η εξίσωση $\eta\mu x = a$ στο διάστημα $[-2\pi, 2\pi]$ όταν:

α. $a = 1$.

β. $a = -2$.

Να αιτιολογήσετε γραφικά, ή όπως αλλιώς θέλετε, την απάντησή σας σε κάθε ένα από τα παραπάνω ερωτήματα.

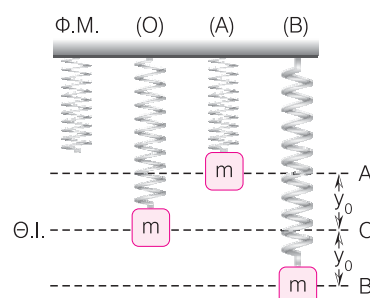
184 Θέμα 4 - 14975

Ένα ελατήριο με φυσικό μήκος (Φ.Μ.) κρέμεται από το ταβάνι. Τοποθετείται στο ελατήριο ένα σώμα μάζας m και ισορροπεί στη θέση O (Θ.Ι. – Θέση Ισορροπίας), απέχοντας από το πάτωμα απόσταση ίση με 1 μέτρο.

Το σώμα ανεβοκατεβαίνει, ξεκινώντας από τη θέση O , εκτελώντας ταλάντωση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων A και B , οι οποίες απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση ίση με $2y_0$.

Η απόσταση του σώματος (σε μέτρα) από το πάτωμα, ως συνάρτηση του χρόνου (σε δευτερόλεπτα) είναι:

$$y(t) = 1 + 0,2 \cdot \eta\mu \frac{\pi}{2} t .$$



- α.** Να βρείτε το y_0 και στη συνέχεια την απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων Α και Β της ταλάντωσης.
- β.** Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.
- γ.** Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $t \in [0, 4]$.
- δ.** Να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές, η απόσταση του σώματος από το πάτωμα θα είναι ίση με 1,1 μέτρα, για $t \in [0, 2]$.

185 Θέμα 4 - 20747

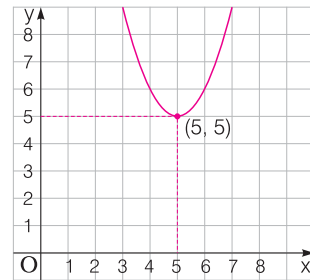
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 + \sqrt{3} \varepsilon\varphi\omega \cdot \eta\mu\chi$, $x \in \mathbb{R}$. Αν για τη γωνία ω ισχύει η σχέση $-2\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu\omega = -1$, $\omega \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, τότε:

α. i. Να αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

ii. Για $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

β. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x^2 - 10x + 30$, $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση στο διπλανό σχήμα.

- i.** Να βρείτε, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης g .
- ii.** Να εξετάσετε αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g έχουν κοινά σημεία. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



186 Θέμα 4 - 21244

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha+1}{2} \sigma\upsilon\nu(\beta x)$, με $\alpha, \beta > 0$, η οποία έχει ελάχιστο -2 και περίοδο $\frac{\pi}{2}$.

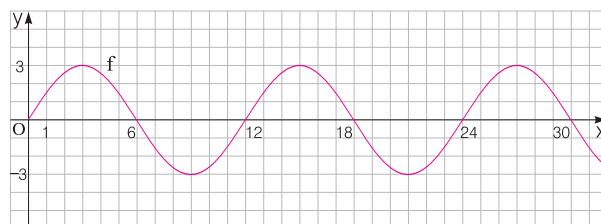
α. Να δείξετε ότι $\alpha = 3$ και $\beta = 4$.

β. Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \varepsilon\varphi(\pi - x) \cdot \eta\mu(2\pi + x)}{\sigma\upsilon\nu(3\pi - x) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$. Να δείξετε ότι $A = -1$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2A$, στο διάστημα $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

187 Θέμα 4 - 20712

Σε μία θαλάσσια περιοχή, λόγω της παλίρροιας, η στάθμη των υδάτων αυξομειώνεται. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης f , που δίνει σε μέτρα το ύψος της στάθμης των υδάτων συναρτήσει του χρόνου t σε ώρες. Να βρείτε:



- α.** Την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην υψηλότερη στάθμη (πλημμυρίδα) και τη χαμηλότερη στάθμη (άμπωτη).
- β.** Την περίοδο του φαινομένου της παλίρροιας.
- γ.** Τον τύπο της συνάρτησης f .
- δ.** Ποιες ώρες, στη διάρκεια μιας ημέρας, η στάθμη των υδάτων είναι $\frac{3}{2}$ μέτρα.

188 Θέμα 4 - 20645

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $g(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α.** Να περιγράψετε με ποιο τρόπο από τη γραφική παράσταση της g προκύπτει η γραφική παράσταση της f .
- β.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
- γ.** Να βρείτε τις τιμές $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f(\pi)$.
- δ.** Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{2}f(x) + 1 = 0$.

189 Θέμα 4 - 15821

- α.** Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x τέτοια ώστε $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x = 0$.
- β.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x = 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\epsilon\phi x = \sqrt{3}$ και κατόπιν να τη λύσετε στο διάστημα $[0, 2\pi]$.
- γ.** Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{3} \cdot \eta\mu x$ και $g(x) = 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ στο ίδιο σύστημα αξόνων στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το συμπέρασμα του ερωτήματος **β**.
- δ.** Αξιοποιώντας το ερώτημα **γ**, να λύσετε γραφικά την ανίσωση $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x < 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

190 Θέμα 2 - 20640

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 8x^2 + 7x - 1$.

- α.** Να αποδείξετε ότι έχει ρίζα τον αριθμό 1.
- β.** Έστω $Q(x)$ πολυώνυμο το οποίο δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.
- i.** Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $R_1(x) = P(x) + Q(x)$ δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.
- ii.** Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $R_2(x) = P(x) \cdot Q(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 1.

191 Θέμα 2 - 21998

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (x - 2) \cdot (x^6 + 1)$.

- α.** Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- β.** Να βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$.

192 Θέμα 2 - 15643

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$.

- α. i.** Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 3$.
- ii.** Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης $P(x) : (x - 3)$.
- β.** Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x - 3)(2x - 1)$.

193 Θέμα 2 - 20941

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 3$.

- α.** Να δείξετε ότι το -2 δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου.
- β.** Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x + 2)$.
- γ.** Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x + 2)$.

194 Θέμα 2 - 21997

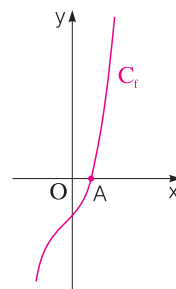
Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

- α.** Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- β.** Ποιο είναι το πηλίκο $\pi(x)$ και το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ που προκύπτει από την διαίρεση $P(x) : (x - 2)$;

195 Θέμα 2 - 20856

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- α.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.
- β.** Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
- i.** Να δικαιολογήσετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ρίζα.
- ii.** Να αποδείξετε ότι η ρίζα αυτή βρίσκεται στο διάστημα $(0, 1)$.

**196 Θέμα 2 - 15989**

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 4$.

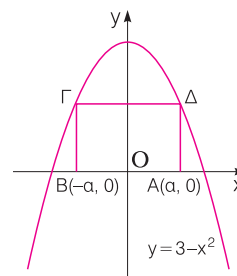
- α.** Δίνεται ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει μοναδική ακέραια ρίζα. Να προσδιορίσετε τη μοναδική ακέραια ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.
- β.** Να βρείτε όλες τις ρίζες του $P(x)$ και να το γράψετε ως γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων.

197 Θέμα 4 - 18221

Στο διπλανό σχήμα, δίνεται η παραβολή $y = 3 - x^2$ και τα σημεία της Γ, Δ .

. Δίνεται ακόμα ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $\alpha \in (0, \sqrt{3})$.

- α.** Αν E είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, τότε:
- i.** Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in (0, \sqrt{3})$ είναι $E = f(\alpha) = -2\alpha^3 + 6\alpha$ τετραγωνικές μονάδες.
- ii.** Να βρεθεί το εμβαδό E στη θέση $\alpha = 1$.
- β.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδό E δεν μπορεί να ξεπεράσει τις 4 τετραγωνικές μονάδες.
- γ.** Να βρεθεί η θέση του α , ώστε το εμβαδό E να πάρει τη μέγιστη τιμή του.



198 Θέμα 4 - 20752

Δύο συμμαθητές ο Αλέξανδρος και ο Φίλιππος που κάθονται στο ίδιο θρανίο σχεδιάζουν τον τριγωνομετρικό κύκλο σε μιλιμετρέ χαρτί και στη συνέχεια προσπαθώντας να υπολογίσουν τις συντεταγμένες ενός δοσμένου σημείου M αυτού του κύκλου διαφωνούν στην απάντησή τους. Ο Αλέξανδρος εκτιμά ότι οι συντεταγμένες του σημείου M είναι $M(0,8, 0,6)$ ενώ ο Φίλιππος εκτιμά ότι οι συντεταγμένες του είναι $M(1, 1)$.

- α.** Ποιος από τους δύο έχει σίγουρα άδικο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
β. Αν υποθέσουμε ότι το σημείο του οποίου υπολογίστηκαν σωστά οι συντεταγμένες του είναι το $M(0,8, 0,6)$.
i. Να αιτιολογήσετε ότι $\eta\mu\omega = 0,6$ και $\sigma\upsilon\upsilon\omega = 0,8$.
ii. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \eta\mu(\pi - \omega) - 2\sigma\upsilon\upsilon\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) + \epsilon\phi(-\omega) + \sigma\phi(\pi + \omega).$$

- γ.** Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = 5\sigma\upsilon\upsilon\omega \cdot x^3 - 10\eta\mu\omega \cdot x^2 + 5x - 3$, $x \in \mathbb{R}$ όπου ω η γωνία που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

199 Θέμα 4 - 20943

Δίνεται γωνία x με $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ και οι παραστάσεις:

$$A = \eta\mu^2(\pi - x) + \eta\mu^2(\pi + x) + \sigma\upsilon\upsilon^2(-x),$$

$$B = \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\upsilon x} + \frac{1 + \sigma\upsilon\upsilon x}{\eta\mu x}.$$

- α.** Να αποδείξετε ότι $A = \eta\mu^2 x + 1$.
β. Να απλοποιήσετε την παράσταση B .
γ. Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x για την οποία οι παραστάσεις A και B να είναι ίσες.

200 Θέμα 4 - 21240

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x - 2$.

- α.** Να βρείτε τις ρίζες του πολυωνύμου.
β. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.
γ. Να λύσετε την ανίσωση $3\left(\frac{5}{x^2 + 1}\right)^3 + 4\left(\frac{5}{x^2 + 1}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{x^2 + 1}\right) - 2 > 0$.

201 Θέμα 4 - 21155

Στον πίνακα μιας σχολικής τάξης είναι γραμμένο το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, όπου οι συντελεστές a, b, c είναι μη μηδενικοί ακέραιοι αριθμοί. Δύο μαθητές, ο A και ο B , παίζουν ένα παιχνίδι, επιλέγοντας τιμές για τους συντελεστές ως εξής: πρώτα ο A επιλέγει τιμή για κάποιον συντελεστή, μετά ο B επιλέγει τιμή για έναν από τους δύο εναπομείναντες συντελεστές και

τέλος ο Α επιλέγει τιμή για τον συντελεστή που έμεινε. Προσπαθούν να επιλέξουν τους a, b, c ώστε το $P(x)$ να ικανοποιεί κάποια συγκεκριμένη συνθήκη.

- α.** Έστω ότι ο μαθητής Α επιλέγει $a=2$, μετά ο Β επιλέγει $b=1$ και τέλος ο Α επιλέγει πάλι $c=2$. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ θα έχει τότε ως μοναδική ρίζα τον αριθμό -2 .
- β.** Ο μαθητής Α επιλέγει $a=-1$. Να αποδείξετε ότι ανεξάρτητα πως θα παίξει ο μαθητής Β, ο Α μπορεί μετά να επιλέξει συντελεστή έτσι ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x-1$.
- γ.** Ο μαθητής Α επιλέγει $c=1$. Να αποδείξετε ότι ανεξάρτητα πως θα παίξει ο μαθητής Β, ο Α μπορεί μετά να επιλέξει συντελεστή έτσι ώστε το $P(x)$ να έχει σίγουρα ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.
- δ.** Ο μαθητής Α επιλέγει $c=2022$. Να αποδείξετε ότι όπως και να επιλεγούν μετά οι συντελεστές a και b είναι αδύνατον το $P(x)$ να έχει ως ρίζα τον αριθμό 13 .

202 Θέμα 4 - 22013

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 1$.

α. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

β. Να βρείτε δύο αριθμούς α, β τέτοιους ώστε:

$$x^4 + 1 = (x^2 + \alpha x + 1) \cdot (x^2 + \beta x + 1).$$

γ. Θεωρούμε την ακόλουθη πρόταση: «Κάθε πολυώνυμο που μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο πολυωνύμων μικρότερου μη μηδενικού βαθμού, έχει πραγματικές ρίζες». Είναι η πρόταση αυτή Σωστή ή Λάθος; Αν η πρόταση είναι σωστή, να δώσετε απόδειξη. Αν η πρόταση είναι λάθος, να δώσετε αντιπαράδειγμα.

203 Θέμα 4 - 20647

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = ax^3 + bx^2 - bx + 3$, $a, b \in \mathbb{R}$. Αν είναι γνωστό ότι έχει ρίζα τον αριθμό 2 , τότε:

α. Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον ένας συντελεστής του δεν είναι ακέραιος.

Αν επιπλέον $P(1) = 0$, τότε:

β. Να αποδείξετε ότι $a = -3$ και $b = -\frac{21}{2}$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$.

δ. Να λύσετε την εξίσωση $P(\sin x) = 0$.

204 Θέμα 4 - 17941

Δίνεται η εξίσωση $\sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} = a$, $a \in \mathbb{R}$. (1)

α. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ορίζεται η εξίσωση (1).

β. Να λύσετε την εξίσωση (1) για $a = 0$.

γ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{x+2}$ είναι άρτια.

δ. Να αποδείξετε ότι:

- i. Για $\alpha = 2\sqrt{2}$ η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα.
- ii. Για $\alpha \neq 2\sqrt{2}$ αν η εξίσωση (1) έχει ως ρίζα τον αριθμό $\rho \in [-2, 2]$, τότε θα έχει ως ρίζα και τον αριθμό $-\rho$.

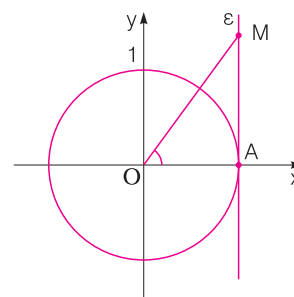
205 Θέμα 4 - 20731

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 6x^2 - 7$.

- α. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $x - 1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$.
- β. Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $P(x)$ σε πολυώνυμα πρώτου ή δευτέρου βαθμού.
- γ. i. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.
- ii. Αν οι αριθμοί -1 και 1 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$, να λύσετε την εξίσωση $(2\eta\mu x - 1)^4 + 6(2\eta\mu x - 1)^2 - 7 = 0$, για $x \in \mathbb{R}$.

206 Θέμα 4 - 20759

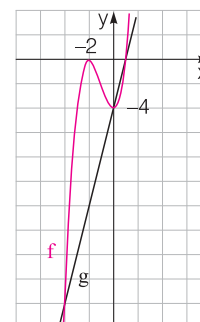
Το εμβαδόν του τριγώνου OAM που βλέπετε στο διπλανό σχήμα είναι $(OAM) = \frac{4}{6}$ τετραγωνικές μονάδες. Η ευθεία ε είναι εφαπτόμενη στον κύκλο στο σημείο A .



- α. Να αποδείξετε ότι για τη γωνία $\omega = \widehat{AOM}$ ισχύει $\varepsilon\phi\omega = \frac{4}{3}$, $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$.
- β. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\omega$, $\sigma\upsilon\nu\omega$, $\sigma\phi\omega$ της γωνίας $\omega = \widehat{AOM}$ αν ισχύει $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$.
- γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu^2 x - 5\eta\mu\omega \cdot \eta\mu x + 5\sigma\upsilon\nu\omega$ και του άξονα $x'x$, όπου $\omega = \widehat{AOM}$ η γωνία του προηγούμενου ερωτήματος και $x \in \mathbb{R}$.

207 Θέμα 4 - 18696

Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ και $g(x) = 4x - 4$ με $x \in \mathbb{R}$.

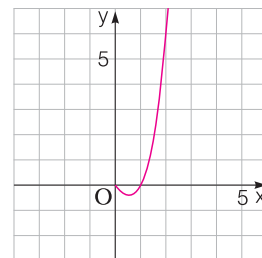


- α. Από τη γραφική παράσταση της f , να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.
- β. Να λύσετε γραφικά και αλγεβρικά την εξίσωση $f(x) = g(x)$.
- γ. Να βρείτε αλγεβρικά τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης g είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

208 Θέμα 4 - 18111

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & , \text{ όταν } x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x} & , \text{ όταν } x < 0 \end{cases}$ και $h(x) = x^3 - x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α. i.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι περιττή.
ii. Να συμπληρώσετε το διπλανό σχήμα ώστε να παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h .
iii. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε το παραπάνω σχήμα, να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h με τον άξονα $x'x$.
β. Αν $x \geq 0$ να αποδείξετε ότι: η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από την ευθεία $\varepsilon: y = x$ αν και μόνο αν η γραφική παράσταση της h βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.



209 Θέμα 2 - 21163

Δίνεται το σημείο $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$ το οποίο ανήκει στη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f .

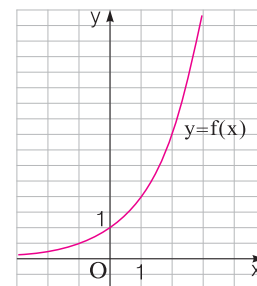
- α.** Αν η συνάρτηση f είναι εκθετική συνάρτηση a^x , $0 < a < 1$, να βρείτε το a .
β. Για $a = \frac{1}{2}$, να συγκρίνεται τους αριθμούς $a^{\sqrt{2}}$, $a^{\sqrt{3}}$.

210 Θέμα 2 - 21091

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας εκθετικής συνάρτησης f , με πεδίο ορισμού το σύνολο \mathbb{R} .

- α. i.** Με βάση την γραφική της παράσταση, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f .

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$					

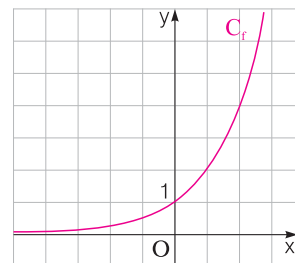


- ii.** Να βρείτε τον τύπο της εκθετικής συνάρτησης f .
β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 32$.

211 Θέμα 2 - 18866

Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α.** Να λύσετε την εξίσωση $2^x - 1 = 0$.
β. i. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της g με τους άξονες συντεταγμένων.

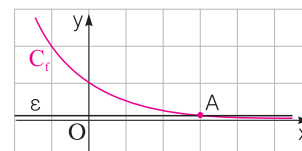


212 Θέμα 2 - 20855

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

α. Να λύσετε την εξίσωση $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{8}$.

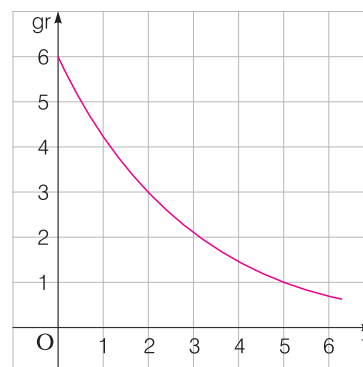
Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f και της ευθείας $\varepsilon: y = \frac{1}{8}$.



- β. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία ε .
- γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από την ευθεία ε .

213 Θέμα 2 - 21994

Η καμπύλη που φαίνεται στο διπλανό σύστημα αξόνων δείχνει την εκθετική απόσβεση ενός ραδιενεργού υλικού σε συνάρτηση με το χρόνο. Ειδικότερα, ο οριζόντιος άξονας δηλώνει τον χρόνο t σε ημέρες (π.χ. η 1^η ημέρα αντιστοιχεί στο χρονικό διάστημα από $t=0$ μέχρι $t=1$, η 2^η ημέρα στο χρονικό διάστημα από $t=1$ μέχρι $t=2$ κ.λπ.) και ο κατακόρυφος άξονας δηλώνει την ποσότητα του υλικού σε γραμμάρια (gr).

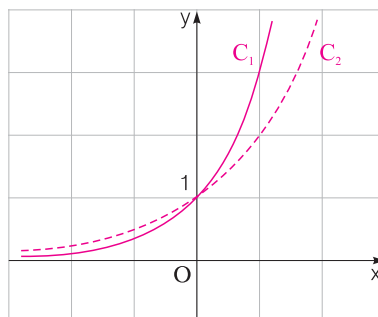


- α. Πόσα γραμμάρια ήταν η αρχική ($t=0$) ποσότητα ραδιενεργού υλικού;
- β. Πόση είναι η ημιζωή (ή χρόνος υποδιπλασιασμού) του ραδιενεργού υλικού;
- γ. Κατά τη διάρκεια ποιάς ημέρας θα έχει απομείνει ποσότητα ραδιενεργού υλικού μικρότερη από 1 gr;

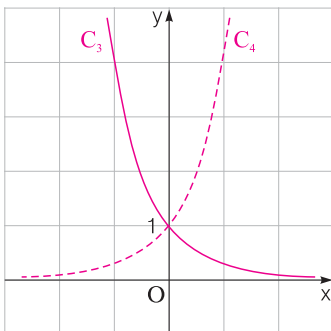
Σε όλα τα ερωτήματα, να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

214 Θέμα 2 - 21993

α. Ποια από τις δύο καμπύλες C_1 (συνεχής γραμμή) και C_2 (διακεκομμένη γραμμή) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2^x$ και ποια της συνάρτησης $g(x) = 3^x$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



- β. Ποια από τις δύο καμπύλες C_3 (συνεχής γραμμή) και C_4 (διακεκομμένη γραμμή) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = 4^x$ και ποια της συνάρτησης $\psi(x) = 4^{-x}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



215 Θέμα 4 - 20689

α. Να λυθεί η ανίσωση $\frac{x-2}{x+1} > 0$.

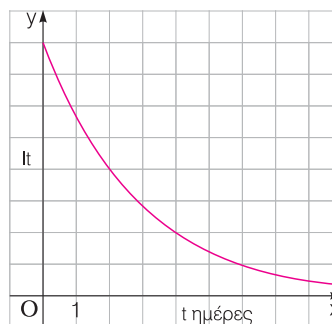
β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\alpha-2}{\alpha+1}\right)^x$, με $x \in \mathbb{R}$.

- Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι καλώς ορισμένη.
- Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα;
- Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τιμές του πραγματικού αριθμού α για τις οποίες η συνάρτηση f είναι σταθερή.

216 Θέμα 4 - 21854

Ένα δοχείο περιέχει υγρό το οποίο εξατμίζεται. Στο διπλανό διάγραμμα φαίνεται η ποσότητα Q , σε λίτρα, του υγρού που έχει απομείνει στο δοχείο μετά από t ημέρες.

Η ποσότητα του υγρού στο δοχείο μειώνεται εκθετικά και μετά από t ημέρες δίνεται από τη σχέση $Q(t) = Q_0 2^{-\frac{t}{c}}$, $c \in \mathbb{R}$, όπου Q_0 η αρχική ποσότητα του υγρού.



α. Με βάση το διάγραμμα:

- i. να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Χρόνος t σε ημέρες	0	2	4	6
Ποσότητα $Q(t)$ του υγρού σε λίτρα				

- να βρείτε την αρχική ποσότητα Q_0 του υγρού,
 - να βρείτε το χρόνο που χρειάζεται για να εξατμιστεί η μισή ποσότητα του υγρού που υπήρχε τη χρονική στιγμή $t=0$ στο δοχείο.
- β. Αν $Q_0 = 8$ και $Q(2) = 4$, να δείξετε ότι $c = 2$.

- γ. Αν $Q(t) = 8 \cdot 2^{-\frac{t}{2}}$, να δείξετε ότι χρειάζεται να περάσουν δύο ημέρες για να εξατμιστεί η μισή ποσότητα $Q(t)$ του υγρού που υπάρχει στο δοχείο οποιαδήποτε χρονική στιγμή t .

217 Θέμα 4 - 18693

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \left(\frac{2-\lambda}{4}\right)^x$.

- α. Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες η f είναι εκθετική συνάρτηση.
 β. Για ποιες τιμές του λ που βρήκατε στο ερώτημα α. η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα;
 γ. Για $\lambda = 0$:
 i. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
 ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x+1) = 6$.

218 Θέμα 4 - 20854

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια.
 β. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$ και να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της.
 γ. Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση f .
 δ. Αν $g(x) = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, τότε να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

219 Θέμα 4 - 20642

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία γνησίως μονότονη και περιττή συνάρτηση και $g(x) = e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$, τότε:

- α. Να βρείτε το $f(1)$ και να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
 β. Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$.
 γ. Να βρείτε το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης f και να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το O .
 δ. Έστω $f(x) = -2x^3$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης h της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από την C_f αν την μετατοπίσουμε 2 μονάδες αριστερά και μία μονάδα πάνω.

220 Θέμα 2 - 20663

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\log_2 8) \cdot x^3 + (4 \log_2 \sqrt{2}) \cdot x^2 - (4 \log_2 1) \cdot x + 1990$.

- α. Να αποδείξετε ότι $\log_2 8 + 2 \log_2 \sqrt{2} - \log_2 1 = 4$.
 β. Να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$.

221 Θέμα 2 - 19903

Αν $\alpha = \log 100 + \log 5 + \log 2 - \log 1$, τότε:

- α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3$.
 β. Να λύσετε την εξίσωση $9 \cdot 2^x = 4 \cdot \alpha^x$.

222 Θέμα 2 - 21858

Δίνεται η παράσταση $A = 2\log 5 + 2\log 2$.

α. Να αποδείξετε ότι $A = 2$.

β. Να βρεθεί η τιμή του λ για την οποία ισχύει ότι $e^\lambda = A$.

γ. Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα **β.**, να αποδείξετε ότι $\ln \lambda < 0$.

223 Θέμα 2 - 20711

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \log 3$ και $\beta = \log 4$.

α. Να αιτιολογήσετε γιατί $0 < \alpha < \beta$.

β. Να αποδείξετε ότι:

i. $\beta + \alpha > 1$.

ii. $\ln \frac{\alpha}{\beta} < 0$.

224 Θέμα 2 - 20710

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \log 20$ και $\beta = \log 50$. Να αποδείξετε ότι:

α. $\beta + \alpha = 3$.

β. $\ln(\beta + \alpha) > 1$.

γ. $10^\beta - 10^\alpha = 10 \cdot (\beta + \alpha)$.

Δίνεται ότι $e \approx 2,71$.

225 Θέμα 2 - 21676

Αν είναι γνωστό ότι $\ln 4 = 1,386$ και $\ln 5 = 1,609$ τότε:

α. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \ln \frac{e}{5} - \ln \frac{4}{e}$.

β. Με τη βοήθεια της ισότητας $80 = 5 \cdot 4^2$ να αποδείξετε ότι $\ln 80 = 4,381$.

226 Θέμα 4 - 20847

Αν I είναι η ένταση του ήχου (σε W/m^2 – Watt ανά τετραγωνικό μέτρο), τότε η αντίστοιχη ηχοστάθμη D (σε ντεσιμπέλ) δίνεται από τον τύπο:

$$D = 10 \cdot \log(10^{12} \cdot I)$$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα ηχοστάθμης.

Όριο ακοής	0 ντεσιμπέλ
Θρόισμα φύλλων	10 ντεσιμπέλ
Συνήθης ψίθυρος	20 ντεσιμπέλ
Αθόρυβο αυτοκίνητο	50 ντεσιμπέλ
Συνήθης ομιλία	65 ντεσιμπέλ
Κυκλοφοριακή κίνηση	80 ντεσιμπέλ
Αεροσυμπιεστής (κομπρεσέρ) σ απόσταση 3 μέτρων	90 ντεσιμπέλ
Όριο πόνου	120 ντεσιμπέλ
Αεριωθούμενο	140 ντεσιμπέλ

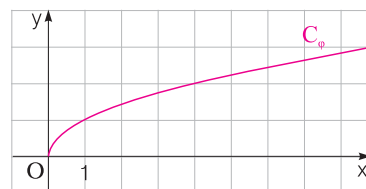
- α. Να βρείτε την ένταση του ήχου που δημιουργεί το θρόισμα των φύλλων.
- β. Αν η ένταση του ήχου σε μία ροκ συναυλία είναι 1 W/m^2 να ελέγξετε αν η ηχοστάθμη στην οποία εκτίθεται το κοινό αγγίζει το όριο του πόνου.
- γ. Αν διπλασιάσουμε την ένταση του ενισχυτή ενός στερεοφωνικού συστήματος, τότε να υπολογίσετε πόσα ντεσιμπέλ θα αυξηθεί η στάθμη του εξερχόμενου ήχου. (Δίνεται ότι $\log 2 \approx 0,3$).

227 Θέμα 4 - 18863

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{x}, \text{ με } x \geq 0, \quad f(x) = \sqrt{x-1}, \text{ με } x \geq 1 \text{ και } g(x) = \frac{x+1}{3}, \text{ με } x \in \mathbb{R}.$$

- α. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .
- β. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης φ .
 - i. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ , να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
 - ii. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, να σχεδιάσετε και την γραφική παράσταση της συνάρτησης g .
- γ. Με τη βοήθεια του σχήματος ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g .
- δ. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{\ln 10 - 1} > \frac{1 + \ln 10}{3}$.



228 Θέμα 4 - 18429

Η μονάδα μέτρησης της έντασης του ήχου είναι το ένα Watt ανά τετραγωνικό μέτρο (1 W/m^2). Στο ανθρώπινο αυτί, η ελάχιστη ένταση που γίνεται αντιληπτή είναι 10^{-12} w/m^2 . Για να μετρήσουμε την στάθμη της έντασης ενός ήχου, χρησιμοποιούμε την κλίμακα Decibel (Db). Το επίπεδο της στάθμης σε Db δίνεται από τη σχέση $D = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ όπου I_0 η ελάχιστη αντιληπτή ένταση και I η ένταση του ήχου.

- α. Να βρείτε το επίπεδο των Db που παράγει ένα μαχητικό αεροσκάφος, αν γνωρίζουμε ότι η ένταση του ήχου του είναι 100 w/m^2 .
- β. Να αποδείξετε ότι μία αύξηση του επιπέδου στάθμης οποιουδήποτε ήχου κατά 20 Db αντιστοιχεί σε ήχο έντασης 100 φορές μεγαλύτερης.
- γ. Το όριο του πόνου του ανθρώπινου αυτιού λόγω έντασης ήχου είναι 120 Db. Η έκθεση σε ήχους πάνω από 120 Db μπορεί να οδηγήσει σε προβλήματα ακοής ή κώφωση. Ποια είναι η αντίστοιχη ένταση ήχου στο όριο του πόνου για τον άνθρωπο;

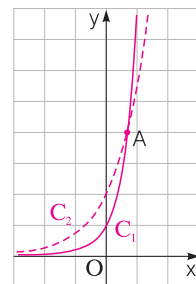
229 Θέμα 4 - 18110

- α. i.** Να λύσετε την εξίσωση $x(e^x - 1) = 0$.
- ii.** Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ το πρόσημο του γινομένου $x(e^x - 1)$.
- β.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x(e^x - 1)}$.
- i.** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii.** Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$, $f(\ln 2)$ και $f(-\ln 2)$.
- iii.** Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο παρακάτω ισχυρισμός: «η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x(e^x - 1)}$ είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της». Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

230 Θέμα 4 - 20845

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = e^{\kappa x}$, $\kappa \geq 0$.

- α.** Να αποδείξετε ότι: $f(1) - f(0) \geq f(0) - f(-1)$. Πότε ισχύει η ισότητα;
- β.** Να αποδείξετε ότι αν $\kappa > 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.
- γ. i.** Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει: $e^{2x} > 2e^x$.
- ii.** Χρησιμοποιώντας το διπλανό σχήμα, να αντιστοιχίσετε τις C_1 , C_2 με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\varphi(x) = 2e^x$ και $k(x) = e^{2x}$.
- Ποιες είναι οι συντεταγμένες του κοινού τους σημείου A ;

**231 Θέμα 4 - 20669**

- α.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .
- i.** Να αποδείξετε ότι $\sqrt{x^2 + 1} - x > 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$.
- ii.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
- β.** Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$, με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .
- i.** Να αποδείξετε ότι $g(-x) + g(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ii.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O .

232 Θέμα 4 - 20657

Σύμφωνα με τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, η θερμοκρασία θ , σε βαθμούς Κελσίου, ενός αντικείμενου μειώνεται με την πάροδο του χρόνου t , σε λεπτά, σύμφωνα με τη συνάρτηση $\theta(t) = T + (\theta_0 - T)e^{kt}$, όπου k μία σταθερά με $\kappa < 0$, θ_0 η αρχική θερμοκρασία του αντικείμενου, ενώ T είναι η σταθερή θερμοκρασία του περιβάλλοντος μέσα στο οποίο τοποθετείται το αντικείμενο, με $\theta_0 > T$.

Ένα αντικείμενο έχει θερμανθεί στους 100°C και στη συνέχεια αφήνεται να κρύνει σε ένα δωμάτιο με σταθερή θερμοκρασία 30°C .

Γνωρίζουμε ότι 5 λεπτά μετά την τοποθέτησή του αντικειμένου στο δωμάτιο, η θερμοκρασία του αντικειμένου είναι $80\text{ }^{\circ}\text{C}$.

α. Να αποδείξετε ότι $k = -0,0672$.

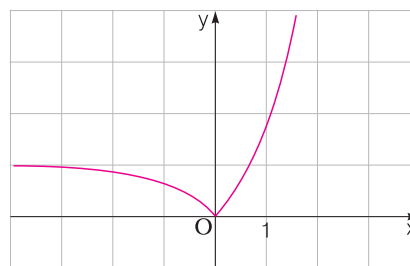
β. Να αποδείξετε ότι $\theta(t) = 30 + 70 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{t}{5}}$.

γ. Να βρείτε, με προσέγγιση εκατοστού, τη θερμοκρασία του αντικειμένου μετά από 1 ώρα και 40 λεπτά.

Δίνεται ότι $\ln\left(\frac{5}{7}\right) = -0,336$ (προσεγγιστικά) και $\left(\frac{5}{7}\right)^{10} \cong 0,034$.

233 Θέμα 4 - 18235

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = |e^x - 1|$, $x \in \mathbb{R}$.



α. Να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να περιγράψετε πως αυτή μπορεί να προκύψει από τη γνωστή γραφική παράσταση της $g(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

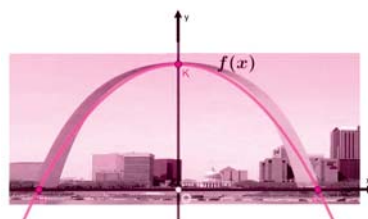
β. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να συμπεράνετε τη μονοτονία και την ελάχιστη τιμή της f .

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$.

δ. Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του α , το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής της παράστασης C_f με την ευθεία $y = \alpha$.

234 Θέμα 4 - 18437

Ένα από τα επιβλητικότερα μνημεία του κόσμου είναι η αψίδα Gateway Arch στην πόλη Saint-Louis των Η.Π.Α. Θεωρώντας κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, όπως στο διπλανό σχήμα, η πρόσοψη της αψίδας προσεγγίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:



$$f(x) = -192\left(\frac{x}{100} + e^{-\frac{x}{100}}\right) + 576,$$

με $f(x) \geq 0$, όπου οι αριθμοί x , $f(x)$ μετρούνται σε μέτρα (m).

(Η γραφική παράσταση μιας τέτοιας συνάρτησης λέγεται αλυσοειδής καμπύλη).

α. Να αποδείξετε ότι το μέγιστο ύψος OK της αψίδας είναι 192 m.

β. Να βρείτε την τετμημένη του σημείου A στο οποίο η καμπύλη τέμνει τον θετικό ημιάξονα

Οx. Δίνεται ότι $\ln\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) \cong 0,96$.

- γ. Αν γνωρίζουμε ότι τα σημεία A και B έχουν αντίθετες τετμημένες, να αποδείξετε ότι το πλάτος AB της απίδας είναι ίσο με το μέγιστο ύψος της OK .

235 Θέμα 4 - 18434

Ο Νόμος των Bouguert–Lambert στη φωτομετρία, λει ότι η ένταση I μιας ακτινοβολίας (ηλιακό φως, ακτίνες X , κ.λπ.) που εισχωρεί κατακόρυφα σε ένα διαφανές μέσο (νερό λιμνών, θαλάσσης, γυαλί κ.λπ.) μειώνεται εκθετικά, απορροφούμενη από το μέσο, συναρτήσει του βάθους (πάχους) h του μέσου, σύμφωνα με τη συνάρτηση $I = I_0 \cdot e^{-\lambda h}$, όπου $\lambda > 0$ σταθερά και I_0 η αρχική ένταση.

- α. Να εξετάσετε αν υπάρχει κάποιο βάθος h στο οποίο η ένταση της ακτινοβολίας να είναι μηδέν.
 β. Γνωρίζουμε ότι για καθαρό νερό θαλάσσης είναι $\lambda = 1,4\text{m}^{-1}$ (το m παριστάνει μέτρα) και ότι μια συγκεκριμένη μορφή φυτικής ζωής δεν μπορεί να υπάρξει, όταν η ένταση του ηλιακού φωτός γίνεται μικρότερη ή ίση από το $\frac{1}{4}$ της αρχικής έντασης. Να βρείτε για ποιες τιμές του βάθους h συμβαίνει αυτό. (Δίνεται $\ln 2 = 0,7$)
 γ. Σε κάποιο άλλο διαφανές μέσο, γνωρίζουμε ότι σε βάθος 10 m η ένταση μιας ακτινοβολίας μειώνεται στο μισό της έντασης της αρχικής ακτινοβολίας. Να αποδείξετε ότι στην συγκεκριμένη κατάσταση ισχύει $I = I_0 \cdot 2^{-\frac{h}{10}}$.

236 Θέμα 2 - 20692

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log x$, $x > 0$.

- α. Να υπολογίσετε τους αριθμούς $f(100)$, $f(\sqrt{10})$.
 β. Για $x > 1$, να επιλύσετε την εξίσωση $f(x+1) + f(x-1) = \log 10 - \log 5$.

237 Θέμα 2 - 20635

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1)$.

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
 β. Να εξετάσετε αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$.
 γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$.

238 Θέμα 2 - 20730

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1-x)$.

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
 β. Να λυθεί η εξίσωση $\ln(1-x) = \ln(x^2+1)$.

239 Θέμα 2 - 20729

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-1)$.

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
 β. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$.
 γ. Στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

240 Θέμα 2 - 20727

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \log x$ και $g(x) = \ln(x-1)$.

- α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .
- β. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
 - i. $\log x = 3$.
 - ii. $\ln(x-1) = 1$.

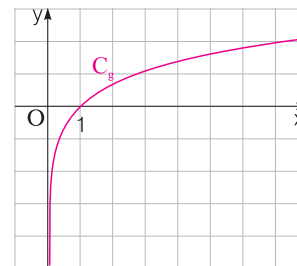
241 Θέμα 2 - 20725

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \log x$ και $g(x) = \log(x+2)$.

- α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .
- β. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
 - i. $f(x) = 2$.
 - ii. $g(x) = 2f(x)$.

242 Θέμα 2 - 20853

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-1)$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \ln x$, $x > 0$.



- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- β. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g , να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
- γ. Να βρείτε το διάστημα, στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

243 Θέμα 2 - 19908

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{1-x}{x}$.

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

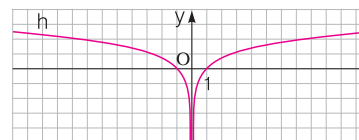
244 Θέμα 2 - 21956

Δίνεται η παράσταση $A = 2\log 5 + 3\log 2 - \log 20$.

- α. Να αποδείξετε ότι $A = 1$.
- β. Να λυθεί η εξίσωση $\ln(e^x - 1) = A$.

245 Θέμα 2 - 15617

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{1}{|x|}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.



- α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = -\ln |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.
- β. i. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = \ln |x|$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

- ii. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και $g(x) = \ln x$, $x > 0$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο για $x = 1$.

246 Θέμα 2 - 21954

Δίνεται η παράσταση $A = \ln(\ln e) + \log(\log 10^{10})$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $\log 10^{10} = 10$.

ii. $A = 1$.

β. Να λυθεί η εξίσωση $\log(x^2 + 1) = A$.

247 Θέμα 2 - 20851

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = 2\log 6 - \log 12 \quad \text{και} \quad B = \log 5 + \log 2.$$

α. Να αποδείξετε ότι $A = \log 3$ και $B = 1$.

β. Να αποδείξετε ότι $A < B$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $\log x < 1$.

248 Θέμα 2 - 21174

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η εξίσωση:

$$\log(x+1) = -\log 2 - \log(1-x) \quad (1).$$

β. Να λύσετε την εξίσωση $\log(x+1) = \log\left(\frac{1}{2}\right) - \log(1-x)$.

249 Θέμα 2 - 21953

Δίνεται η παράσταση $A = e^{\ln 2} + 10^{2\log \sqrt{5}}$. Να αποδείξετε ότι:

α. $A = 7$.

β. $0 < \log A < 1$.

250 Θέμα 2 - 21952

Δίνεται η παράσταση $A = \ln \sqrt{e} + \log \sqrt[3]{100}$. Να αποδείξετε ότι:

α. $A = \frac{7}{6}$.

β. $0 < \ln A < 1$.

Δίνεται $e \approx 2,71$.

251 Θέμα 2 - 21675

Δίνεται η εξίσωση $\log(x^2 + 1) = 1 - \log 2$.

α. Να αποδείξετε ότι $1 - \log 2 = \log 5$.

β. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

252 Θέμα 4 - 18865

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln |x|$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β. Να προσδιορίσετε το είδος της συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f .

γ. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

δ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $E(x) = \frac{1}{2}(x-1)\ln x$, με $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ μπορεί να περιγράψει το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου $A(1, 0)$, $B(x, 0)$ και $\Gamma(x, \ln x)$.

253 Θέμα 4 - 20857

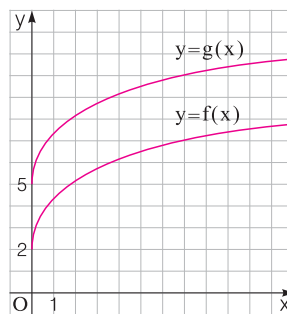
Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - \alpha x^2 + 7x - \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x - 3$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x + 1)$ είναι $v = -16$, τότε:

- α. Να υπολογισθούν οι τιμές των α, β .
Αν είναι $\alpha = 5, \beta = 3$.
- β. Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$.
- γ. Να λυθεί η ανίσωση $P(x) < 0$.
- δ. Αν $P(\ln \kappa) < 0$, τότε να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού κ .

254 Θέμα 4 - 25463

Ένας ερευνητής πραγματοποίησε μία στατιστική μελέτη για την μεταβολή του βάρους των Ελληνοπαίδων. Τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνονται στο διπλανό ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, όπου παριστάνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g . Στον οριζόντιο άξονα $x'x$ καταγράφεται η ηλικία σε μήνες και στον κατακόρυφο άξονα $y'y$ το βάρος σε κιλά. Η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει τις ελάχιστες φυσιολογικές τιμές και η γραφική παράσταση της g τις μέγιστες φυσιολογικές τιμές που μπορεί να έχει ένα παιδί κατά την διάρκεια του πρώτου έτους της ηλικίας του.



Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f έχει τύπο

$$f(x) = \alpha\sqrt{\ln(x+1)} + \ln(x+1) + \beta, \quad x \geq 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

και ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(0, 2)$ και $B(e^2 - 1, 2\sqrt{2} + 4)$ ενώ για την γραφική παράσταση της g , γνωρίζουμε ότι προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f μετατοπισμένη κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.

- α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 2$. Στην συνέχεια να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g .
- β. Να προσδιορίσετε γραφικά (κατά προσέγγιση) την ηλικία κατά την οποία η ελάχιστη φυσιολογική τιμή του βάρους ενός παιδιού είναι τα 5 κιλά. Στη συνέχεια, με αλγεβρικό τρόπο, να βρείτε με ακρίβεια την ηλικία.
- γ. Το βάρος ενός παιδιού στο τέλος του 12^{ου} μήνα βρέθηκε 13 κιλά. Πως θα το χαρακτηρίζατε: υπέρβαρο, φυσιολογικό ή λιποβαρές; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας με αλγεβρικό τρόπο.

255 Θέμα 4 - 15688

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A και το σημείο τομής της γραφικής της παράστασης με τον άξονα $x'x$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x - 1$.

γ. Να αποδείξετε ότι αν $a > 0$, τότε η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία $y = x + a$.

256 Θέμα 4 - 21680

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x$, $x > 0$ και η ευθεία $\varepsilon: y - 2x - 2$.

α. Να αποδείξετε ότι $f(2) + f(4) = \frac{1}{3}f(8)$.

β. Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι από τον άξονα $x'x$ και πάνω.

γ. Να βρείτε:

i. Τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία.

ii. Για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από την ευθεία.

257 Θέμα 4 - 15591

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\alpha}{\alpha+5}\right)^x$.

α. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι εκθετική και ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.

β. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

γ. Για τη μεγαλύτερη τιμή του $\alpha \in \mathbb{Z}$ για την οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα εκθετική με βάση ακέραιο αριθμό, να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) + f(x+1) = 14.$$

258 Θέμα 4 - 21950

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12}$.

α. Να αποδείξετε ότι το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $\frac{\omega^3 - 8}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0$ είναι το $(-6, 2) \cup (2, +\infty)$.

β. Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R} - \{\ln 2\}$.

γ. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f και του άξονα $x'x$.

259 Θέμα 4 - 21679

Ένα ζεστό ρόφημα τη στιγμή που σερβίρεται, σε θερμοκρασία του περιβάλλοντος που είναι $T_a = 25^\circ\text{C}$, έχει θερμοκρασία $T_0 = 73^\circ\text{C}$. Η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από t λεπτά δίνεται, σύμφωνα με το νόμο ψύξης του Νεύτωνα, από την συνάρτηση

$$T(t) = T_a + ce^{-kt}$$

όπου c, k κατάλληλες σταθερές και $t \in [0, 60]$. Αν είναι γνωστό ότι η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από 10 λεπτά είναι 61°C , τότε:

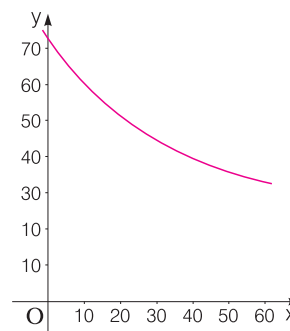
α. Να αποδείξετε ότι $c = 48$.

β. Να βρείτε την σταθερά κ . (Θεωρήστε $\ln 0,75 = -0,3$).

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $T(t)$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

γ. Να βρείτε την θερμοκρασία του ροφήματος 40 λεπτά μετά το σερβίρισμα. (Θεωρήστε $e^{-1,2} = 0,3$).

δ. Αν θεωρήσουμε ότι ο καταναλωτής έχει την αίσθηση του ζεστού όταν η θερμοκρασία του ροφήματος είναι μεγαλύτερη από 40°C , να αιτιολογήσετε, με βάση τη γραφική παράσταση και το αποτέλεσμα του ερωτήματος **γ.**, γιατί πριν περάσουν 40 λεπτά ο καταναλωτής του ροφήματος έχει την αίσθηση ότι το ρόφημα δεν είναι πλέον ζεστό.



260 Θέμα 4 - 21678

Ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού λέμε τον χρόνο που απαιτείται για να διαπιστωθεί η μισή από την αρχική του ποσότητα, οπότε να απομείνει το 50% από αυτή.

Αν Q_0 είναι η αρχική ποσότητα ενός ραδιενεργού υλικού, τότε η ποσότητα $Q(t)$ που απομένει t χρόνια μετά, δίνεται από τον τύπο $Q_t = Q_0 e^{ct}$, όπου c είναι μία σταθερά που εξαρτάται από το υλικό.

α. Να αποδείξετε ότι ο χρόνος ημιζωής t' δίνεται από τον τύπο $t' = -\frac{\ln 2}{c}$.

Το ραδιοϊσότοπο του άνθρακα, άνθρακας -14 έχει χρόνο ημιζωής 5730 χρόνια.

β. Να αποδείξετε ότι η ποσότητα του άνθρακα -14 που απομένει t χρόνια μετά, δίνεται από τον τύπο

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\ln 2}{5730} t}.$$

γ. Κατά την εξέταση ενός οστού που ανακάλυψαν οι παλαιοντολόγοι διαπιστώθηκε ότι έχει απομείνει σ' αυτό το 25% της ποσότητας του άνθρακα -14 που περιείχε αρχικά. Να βρείτε την ηλικία του οστού.