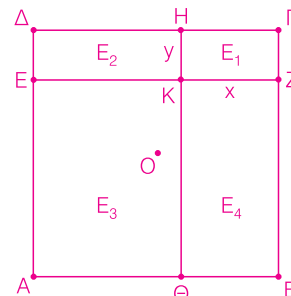


**ΝΕΑ ΘΕΜΑΤΑ (μέχρι τις 4/5/2023)**

**389 Θέμα 4 - 15052**

Στο διπλανό σχήμα το τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  έχει πλευρά ίση με 6 και οι ευθείες  $EZ$  και  $H\Theta$  είναι παράλληλες στις πλευρές του. Αν  $KZ = x$  και  $KH = y$ ,  $x, y \in (0, 6)$ , τότε:



- α. Να υπολογίσετε τα  $E_1, E_2, E_3, E_4$  με τη βοήθεια των  $x, y$ .
- β. Να βρείτε τα εμβαδά  $E_1, E_2, E_3, E_4$  των τεσσάρων ορθογώνιων του σχήματος όταν  $x = 4$  και  $y = 2$ .
- γ. Αν επιπλέον ισχύει  $E_1 + E_3 = E_2 + E_4$ , να αποδείξετε ότι:
  - i.  $xy + 9 = 3(x + y)$
  - ii. Τουλάχιστον ένα από τα τμήματα  $EZ$  και  $H\Theta$  διέρχεται από το κέντρο  $O$  του τετραγώνου.

**390 Θέμα 2 - 15054**

Εστω  $\alpha, \beta, \gamma$  πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει  $\alpha < 0 < \beta < \gamma$ .

- α. Να αιτιολογήσετε γιατί ο αριθμός  $A = \alpha(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)\beta$  είναι θετικός.
- β. Να αποδείξετε ότι  $\alpha + |\alpha - \beta| + |\gamma - \beta| - \gamma = 0$ .

**391 Θέμα 2 - 14071**

α. Η αλγεβρική παράσταση  $K$ , που εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων του αριθμού  $x$  από τους αριθμούς 2 και  $-1$ , πάνω στον άξονα είναι:

**A.**  $K = |x + 1| + |x - 2|$     **B.**  $K = |x - 1| + |x + 2|$     **Γ.**  $K = (|x| - 1) + (|x| - 2)$

Να γράψετε στο τετράδιό σας τη σωστή παράσταση και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

- β. Αν είναι  $K = |x + 1| + |x - 2|$  τότε:
  - i. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $K$  όταν  $x = \frac{3}{2}$ .
  - ii. Αν  $x > 2$  να γράψετε χωρίς απόλυτο την παράσταση  $K$  και να αποδείξετε ότι  $K > 3$ .

**392 Θέμα 2 - 14849**

- α. Να αποδείξετε ότι  $2 < \sqrt{5}$ .
- β. Να αποδείξετε ότι  $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$ .
- γ. Να αποδείξετε ότι  $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2$ .

**393 Θέμα 2 - 15051**

- α. Να αποδείξετε ότι  $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$  και να υπολογίσετε το ανάπτυγμα  $(2 + \sqrt{5})^2$ .
- β. Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών  $9 - 4\sqrt{5}$  και  $9 + 4\sqrt{5}$ .

**394 Θέμα 2 - 34872**

Δίνεται η εξίσωση  $kx + 3 = 2x$ , με παράμετρο  $k \in \mathbb{R}$ .

- α. Να λύσετε την εξίσωση για  $k = 1$  και για  $k = 3$ .
- β. Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση είναι αδύνατη για  $k = 2$ .

**395 Θέμα 2 - 36896**

Δίνεται η εξίσωση:  $(\lambda^2 - 1)x = \lambda^2 - 1$ , με παράμετρο  $\lambda \in \mathbb{R}$  (1).

**α.** Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές πραγματικές τιμές για το  $\lambda$ , να γράψετε τρεις εξισώσεις.

**β. i.** Να βρείτε την τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση.

**ii.** Να βρείτε την τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4.

**396 Θέμα 2 - 36890**

**α.** Να λύσετε την εξίσωση  $|x - 2| = 3$

**β.** Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του **α.** ερωτήματος.

**397 Θέμα 2 - 34920**

Δίνεται το τριώνυμο  $2x^2 + x - 1$ , (1).

**α.** Αν  $x_1, x_2$  είναι ρίζες του τριωνύμου (1), να βρείτε την τιμή των παραστάσεων  $x_1 + x_2$ ,

$$x_1 x_2 \text{ και } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}.$$

**β.** Αν  $\frac{1}{x_1} = -1$  και  $\frac{1}{x_2} = 2$ , να βρείτε μια εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού που να έχει ρίζες τις  $\frac{1}{x_1}$  και  $\frac{1}{x_2}$ .

**398 Θέμα 4 - 36651**

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$  με παράμετρο  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**α.** Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης όταν  $\lambda = -2$  και όταν  $\lambda = 3$ .

**β. i.** Να αποδείξετε ότι αν  $\lambda = 5$ , τότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα.

**ii.** Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλη τιμή του  $\lambda$ , ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα.

**γ.** Αν ισχύει  $|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5$ ,  $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 5\}$  να αποδείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

**399 Θέμα 4 - 34390**

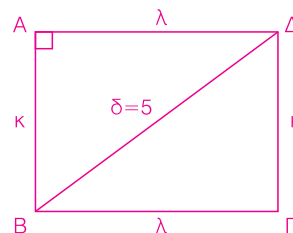
Δίνεται ορθογώνιο με διαστάσεις  $\kappa$  και  $\lambda$  του οποίου η περίμετρος είναι  $\Pi = 14$  cm και μια διαγώνιος  $\delta = 5$  cm.

**α. i.** Με χρήση της ταυτότητας  $(\kappa + \lambda)^2 = \kappa^2 + 2\kappa\lambda + \lambda^2$ , να δείξετε ότι για το εμβαδόν  $E$  του ορθογωνίου ισχύει  $E = 12$  cm<sup>2</sup>.

**ii.** Να αιτιολογήσετε γιατί οι τις διαστάσεις  $\kappa$  και  $\lambda$  του ορθογωνίου είναι ρίζες της εξίσωσης  $x^2 - 7x + 12 = 0$ .

**iii.** Να βρείτε τις διαστάσεις  $\kappa$  και  $\lambda$  του ορθογωνίου.

**β.** Να δείξετε ότι ένα ορθογώνιο με περίμετρο  $\Pi = 14$  cm πρέπει να έχει εμβαδόν  $E \leq \frac{49}{4}$ .

**400 Θέμα 2 - 36893**

**α.** Να λύσετε την ανίσωση:  $|2x - 1| \leq 7$ .

**β.** Να λύσετε την ανίσωση:  $|x - 1| > 2$ .

**γ.** Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων **α.** και **β.** και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος.

**401 Θέμα 2 - 36888**

- α.** Να λύσετε την ανίσωση  $3x - 1 < x + 9$ .
- β.** Να λύσετε την ανίσωση  $2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2}$ .
- γ.** Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων **α.** και **β.** και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος.

**402 Θέμα 2 - 36895**

- α.** Να λύσετε την εξίσωση:  $|2x + 4| = 10$ .
- β.** Να λύσετε την ανίσωση:  $|x - 5| > 1$ .
- γ.** Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του **α.** ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του **β.** ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**403 Θέμα 2 - 34919**

- α.** Να λύσετε την ανίσωση  $x^2 - 10x + 21 < 0$  (1).
- β.** Αν η ανίσωση (1) έχει λύσεις τους αριθμούς  $x$  για τους οποίους ισχύει  $3 < x < 7$  και ο αριθμός  $x$  είναι λύση της παραπάνω ανίσωσης, να δείξετε ότι η παράσταση  $A = |x - 3| + |x - 7|$  είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του  $x$ .

**404 Θέμα 2 - 36892**

- α.** Να λύσετε την εξίσωση:  $\frac{|x|}{3} - \frac{|x| + 4}{5} = \frac{2}{3}$ .
- β.** Να λύσετε την ανίσωση:  $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$ .
- γ.** Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του **α.** ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του **β.** ερωτήματος;

**405 Θέμα 4 - 14123**

Δίνεται το τριώνυμο  $f(x) = x^2 - ax - (a + 1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , με παράμετρο  $a \in \mathbb{R}$ .

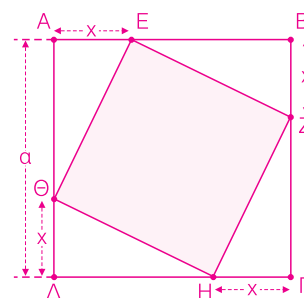
- α.** Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου  $a$  να βρείτε το πλήθος των ριζών του τριωνύμου.
- β.** Αν είναι  $a > -2$ , τότε:
  - i.** Να αποδείξετε ότι οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί  $-1$  και  $a + 1$ .
  - ii.** Να βρείτε την τιμή του  $a$  για την οποία το μήκος του διαστήματος λύσεων της ανίσωσης  $x^2 - ax - (a + 1) \leq 0$  είναι ίσο με 2024.
  - iii.** Να βρείτε το πρόσημο του  $f\left(\frac{a}{2}\right)$ .

**406 Θέμα 4 - 13368**

Στο διπλανό σχήμα οι κορυφές του τετραγώνου  $EZH\Theta$  βρίσκονται πάνω στις πλευρές του τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$ .

- α.** Αν η πλευρά του τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$  είναι  $a$  και η απόσταση των κορυφών του  $EZH\Theta$  από τις αντίστοιχες κορυφές του  $AB\Gamma\Delta$  είναι  $x$ , όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι το εμβαδό του  $EZH\Theta$  δίνεται από τη σχέση:

$$(EZH\Theta) = x^2 + (a - x)^2 \text{ με } 0 \leq x \leq a.$$



- β.** Να δείξετε ότι το εμβαδόν του  $EZH\Theta$  δεν μπορεί να είναι μικρότερο από το μισό του εμβαδού  $AB\Gamma\Delta$ .
- γ.** Να βρείτε την πλευρά  $a$  του τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$  αν για  $x=1$ , το εμβαδόν του  $EZH\Theta$  είναι τα δύο τρίτα του εμβαδού του  $AB\Gamma\Delta$ , δηλαδή:  $(EZH\Theta) = \frac{2}{3}(AB\Gamma\Delta)$ .

(Δίνεται  $\sqrt{3} \approx 1,73$ )

#### 407 Θέμα 4 - 14963

Δίνεται η εξίσωση  $|x-4| - |x-2| = 2$ .

- α.** Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της παραπάνω εξίσωσης.
- β.** Να αιτιολογήσετε γεωμετρικά ότι οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που ανήκουν στο  $(-\infty, 2]$  και μόνο αυτοί.
- γ.** Αν για τον πραγματικό αριθμό  $x$  ισχύει ότι  $|x-4| - |x-2| = 2$ , τότε να δείξετε ότι  $x^2 - 6x + 8 \geq 0$ .

#### 408 Θέμα 2 - 34877

**α.** Να λύσετε την εξίσωση  $x^2 - 2x - 3 = 0$  (1).

**β.** Αν  $x_1, x_2$  με  $x_1 < x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί  $x_1, 1, x_2$  με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

#### 409 Θέμα 2 - 34871

**α.** Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό  $x$ , ώστε οι αριθμοί  $x+2, x+1, 3x+2$ , με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

**β.** Για  $x = -1$ , να βρείτε τη διαφορά  $\omega$  της παραπάνω αριθμητικής προόδου.

#### 410 Θέμα 4 - 14962

Έστω μία αριθμητική πρόοδος  $(\alpha_n)$  με διαφορά  $\omega = 3$ . Αν είναι γνωστό ότι στο διάστημα  $\Delta = [2, 8]$  υπάρχουν ακριβώς 3 διαδοχικοί όροι της αριθμητικής προόδου  $(\alpha_n)$ .

**α.** Να εξετάσετε αν ο αριθμός μηδέν είναι όρος της  $(\alpha_n)$ .

**β.** Να βρείτε τους 3 διαδοχικούς όρους της  $(\alpha_n)$  που υπάρχουν στο  $\Delta = [2, 8]$ .

**γ.** Αν  $\alpha_6 = 14$ ,

**i.** να βρείτε τον  $\alpha_1$ ,

**ii.** να βρείτε το ελάχιστο πλήθος πρώτων όρων της  $(\alpha_n)$  που πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμα να είναι μεγαλύτερο του 186.

(Δίνεται  $\sqrt{4489} = 67$ )

#### 411 Θέμα 2 - 34874

**α.** Να λύσετε την εξίσωση  $2x^2 - 5x + 2 = 0$  (1).

**β.** Αν  $x_1, x_2$  με  $x_1 < x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί  $x_1, 1, x_2$  με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

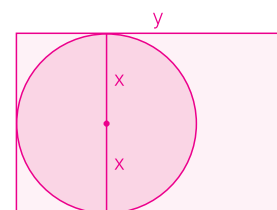
#### 412 Θέμα 4 - 14655

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A = 90^\circ$ ) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη  $x$  και  $y$  τέτοια, ώστε  $x + y = 10$ .

- α.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν  $E$  του ορθογωνίου τριγώνου ως συνάρτηση του  $x$  δίνεται από τον τύπο  $E(x) = \frac{1}{2}(10x - x^2)$  με  $x \in (0, 10)$ .
- β. i.** Να αποδείξετε ότι  $E(x) \leq \frac{25}{2}$  για κάθε  $x \in (0, 10)$ .
- ii.** Για ποια τιμή του  $x$  το εμβαδόν γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με  $\frac{25}{2}$ ;
- γ.** Αν  $x = 5$ , ποιο συμπέρασμα προκύπτει για το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του;

**413 Θέμα 4 - 14122**

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο με μήκος  $y$  cm και περίμετρο 10 cm. Μέσα σε αυτό δίνεται κύκλος με ακτίνα  $x$  cm, ο οποίος εφάπτεται στις τρεις πλευρές του ορθογωνίου.



- α. i.** Να αποδείξετε ότι η σχέση που εκφράζει το μήκος  $y$  (σε cm) του ορθογωνίου ως συνάρτηση της ακτίνας  $x$  του κύκλου είναι:

$$y = 5 - 2x, \quad x \in \left(0, \frac{5}{2}\right).$$

- ii.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου (σε  $\text{cm}^2$ ) δίνεται από τη σχέση

$$E_{\text{ορθ}} = 10x - 4x^2, \quad x \in \left(0, \frac{5}{2}\right).$$

- β.** Να αποδείξετε ότι το μέρος του εμβαδού του ορθογωνίου (σε  $\text{cm}^2$ ) που βρίσκεται έξω από τον κύκλο δίνεται από τη σχέση:

$$E = 10x - (\pi + 4)x^2, \quad x \in \left(0, \frac{5}{2}\right).$$

- γ.** Αν το εμβαδό  $E$  του ορθογωνίου που βρίσκεται έξω από τον κύκλο είναι ίσο με  $(6 - \pi)\text{cm}^2$  και ο  $x$  είναι ένας ρητός αριθμός, τότε να βρείτε:

- i.** την ακτίνα  $x$  του κύκλου, **ii.** τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

**414 Θέμα 2 - 36885**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$ .

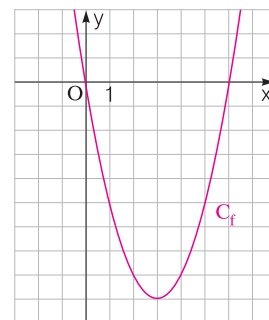
- α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .
- β. i.** Να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες ισχύει  $f(x) = 0$ .
- ii.** Να βρείτε τις τιμές  $f(0)$  και  $f(3)$ .
- γ.** Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της  $f$  με τους άξονες.

**415 Θέμα 2 - 15000**

Δίνεται η γραφική παράσταση  $C_f$  μιας συνάρτησης  $f$  που είναι ορισμένη σε όλο το  $\mathbb{R}$ , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Με τη βοήθεια του σχήματος:

- Να βρείτε τις τιμές της  $f$  για  $x=0, 1, 3, 5$ .
- Να λύσετε γραφικά την εξίσωση  $f(x)=0$ .
- Να λύσετε γραφικά την ανίσωση  $f(x)<0$ .

**416 Θέμα 2 - 36889**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=x^2+2x-15$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- Να υπολογίσετε το άθροισμα  $f(-5)+f(0)+f(3)$ .
- Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της  $f$  με τους άξονες.

**417 Θέμα 4 - 14786**

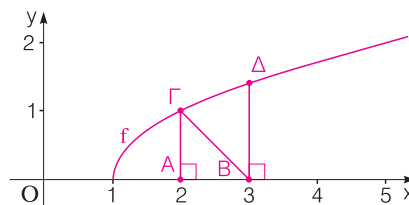
Δίνονται τα σημεία  $A(\lambda, 1)$  και  $B(2-\lambda^2, \mu)$ , με  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

- Αν τα σημεία  $A, B$  είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα  $x'x$ , να βρείτε τις τιμές των  $\lambda, \mu$ .
- Αν επιπλέον το σημείο  $A$  βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο του ορθοκανονικού συστήματος, να βρείτε την τιμή του  $\lambda$ .
- Για  $\lambda=-2$  και  $\mu=-1$ .
  - Να βρείτε την απόσταση των σημείων  $A, B$ .
  - Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $OAB$ , όπου  $O$  η αρχή των αξόνων.

**418 Θέμα 4 - 14771**

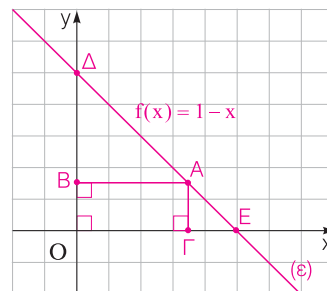
Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x)=\sqrt{x-a}$  όπου  $a \in \mathbb{R}$ .

- Με βάση το σχήμα, να δείξετε ότι  $a=1$ .
- Αν  $a=1$ , να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .
- Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων  $\Gamma$  και  $\Delta$  είναι  $(2, 1)$  και  $(3, \sqrt{2})$  αντίστοιχα.
  - Να βρείτε το μήκος του τμήματος  $B\Gamma$ .
  - Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $B\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελές.

**419 Θέμα 4 - 14744**

- Να αποδείξετε ότι  $x-x^2 \leq \frac{1}{4}$  για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$ . Πότε ισχύει το ίσον;

- Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιασθεί η γραφική παράσταση  $(\varepsilon)$  της συνάρτησης  $f(x)=1-x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , η οποία τέμνει τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  στα σημεία  $E$  και  $\Delta$  αντίστοιχα. Ένα μεταβλητό σημείο  $A$ , με τετμημένη  $a$ , κινείται επί της ευθείας  $(\varepsilon)$  και μεταξύ των σημείων  $\Delta$  και  $E$ . Φέρνουμε από το  $A$  καθέτους στους άξονες και έστω  $B$  και  $\Gamma$  τα σημεία τομής με  $y'y$  και  $x'x$  αντίστοιχα.



- i. Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΟΓ .
- ii. Να αποδείξετε ότι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του εμβαδού του μεταβλητού ορθογωνίου ΑΒΟΓ είναι  $\frac{1}{4}$  . Για ποια θέση του σημείου Α επιτυγχάνεται αυτή η τιμή;

**420 Θέμα 4 - 14763**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{3\sqrt{x^2 - 8x + \lambda}}{x - 4} + 2$  , για  $x \neq 4$  και  $\lambda \geq 16$  .

- α. Να βρείτε το  $\lambda \geq 16$  ώστε η γραφική παράσταση της  $f$  να διέρχεται από το σημείο της  $M(0, -1)$
- β. Αν  $\lambda = 16$  , τότε:
  - i. Να αποδείξετε ότι:  $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 4 \\ 5, & x > 4 \end{cases}$  .
  - ii. Να σχεδιάσετε σε σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της  $f$ .
  - ii. Για  $x < 4$  , να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  των οποίων η απόστασή τους από το σημείο  $A(-1, -1)$  είναι 10 μονάδες μήκους.

**421 Θέμα 4 - 16153**

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = 1 + \frac{4}{x^2}$  .

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- β. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  δεν τέμνει τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  .
- γ. Έστω  $a > 0$  η τετμημένη ενός τυχαίου σημείου  $M$  της γραφικής παράστασης της  $f$  . Αν ονομάσουμε  $E$  το εμβαδόν του ορθογωνίου ΟΓΜΔ του σχήματος, να αποδείξετε ότι
  - i.  $E = a + \frac{4}{a}$
  - ii.  $E \geq 4$  .

