

Αναστάσιος Χ. Μπάρλας

# Γεωμετρία

Α΄ ΕΠΑ.Λ.

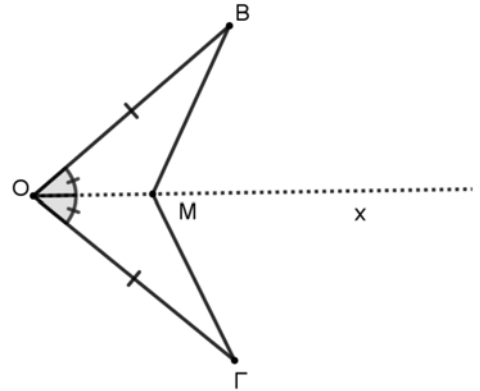
Τράπεζα  
Θεμάτων  
2023

**ΘΕΜΑΤΑ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΘΕΜΑΤΩΝ**

**6. Στοιχεία και είδη τριγώνων – Κριτήρια ισότητας τριγώνων**

**1 Θέμα 2 - 13682**

Στο παρακάτω σχήμα, το M είναι ένα τυχαίο σημείο της ημιευθείας Ox και B, Γ είναι σημεία τέτοια, ώστε  $\widehat{B\hat{O}x} = \widehat{\Gamma\hat{O}x}$  και  $OB = OG$ .

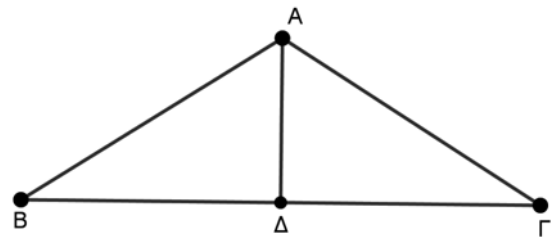


- α. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα OBM και OGM και να δικαιολογήσετε ότι είναι ίσα.
- β. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις με τις άλλες ίσες γωνίες που προκύπτουν ως άμεσα συμπεράσματα της ισότητας των δυο τριγώνων OBM και OGM.
  - 1. Η γωνία  $\widehat{O\hat{B}M}$  του τριγώνου OBM είναι ίση με την γωνία ..... του τριγώνου OGM.
  - 2. Η γωνία ..... του τριγώνου OBM είναι ίση με την γωνία  $\widehat{\Gamma\hat{M}O}$  του τριγώνου OGM.
- γ. Είναι οι γωνίες  $\widehat{B\hat{M}x}$  και  $\widehat{\Gamma\hat{M}x}$  ίσες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**2 Θέμα 2 - 12535**

Στο ισοσκελές τρίγωνο ABΓ, με  $AB = AG$  η γωνία της κορυφής του A είναι ίση με  $120^\circ$ .

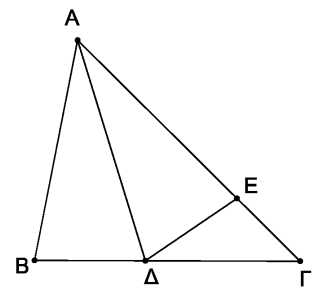
Αν η ΑΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου τότε:



- α. να υπολογίσετε πόσες μοίρες είναι η γωνία ΒΑΔ.
- β. να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ είναι ίσα.

**3 Θέμα 2 - 13436**

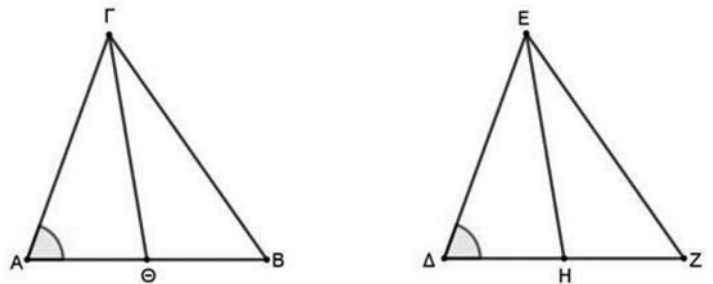
Δίνεται τρίγωνο ABΓ με  $AB = 5$  και  $AG = 7$  και η διχοτόμος του ΑΔ. Στην πλευρά ΑΓ παίρνουμε σημείο E, ώστε  $GE = 2$ .



- α. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΕ.
- β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΔ είναι ίσα.

**4 Θέμα 2 - 12454**

Δίνονται δύο ίσα τρίγωνα ABΓ και ΔZE για τα οποία ισχύει  $AB = ΔZ = 4$ ,  $AG = ΔE$  και  $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$ . Έστω Θ το μέσο της AB και Η το μέσο της ΔZ.

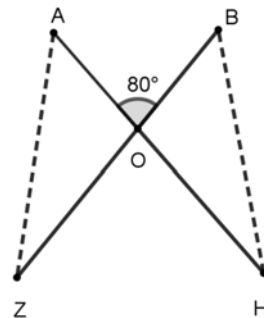


- α. Να υπολογίσετε το μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΘ και ΔΗ.
- β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΓΘ και ΔΕΗ είναι ίσα.

### 5 Θέμα 2 - 13445

Στο παρακάτω σχήμα, τα τμήματα  $AH$  και  $BZ$  είναι ίσα και τέμνονται σε σημείο  $O$  έτσι ώστε η γωνία  $AOB$  να είναι ίση με  $80^\circ$ . Έστω ότι είναι  $AH = BZ = 5$  και  $OH = OZ = 3$ .

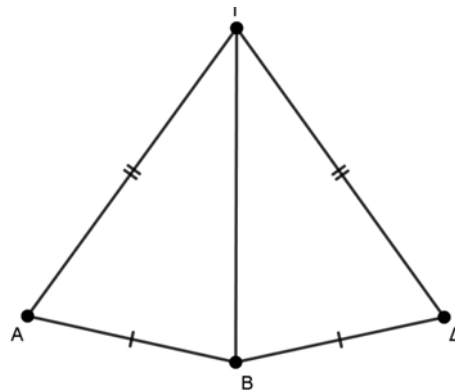
- α. Να αποδείξετε ότι  $\widehat{A\hat{O}Z} = \widehat{B\hat{O}H} = 100^\circ$ .
- β. Είναι τα τρίγωνα  $AOZ$  και  $BOH$  ίσα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



### 6 Θέμα 2 - 12538

Στο παρακάτω σχήμα ισχύουν  $AB = BD$ ,  $AG = GD$  και η  $\widehat{B\hat{A}G} = 75^\circ$ .

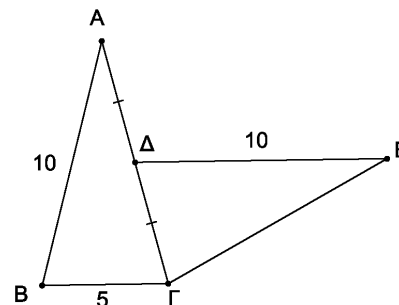
- α. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα  $ABG$  και  $B\Delta G$ .
- β. Να υπολογίσετε τη γωνία  $B\Delta G$  αιτιολογώντας την απάντησή σας.



### 7 Θέμα 2 - 13527

Δίνονται τα ισοσκελή τρίγωνα  $ABG$  και  $\Gamma\Delta E$  με  $AB = AG$  και  $E\Delta = E\Gamma$ . Αν  $B\Gamma = 5$ ,  $AB = E\Delta = 10$  και  $\Delta$  είναι το μέσο της  $AG$ , να αποδείξετε ότι:

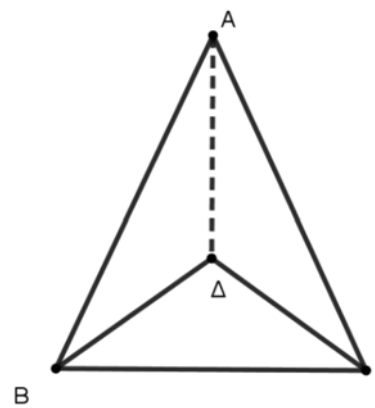
- α.  $B\Gamma = \Delta\Gamma$ .
- β. Τα τρίγωνα  $ABG$  και  $\Gamma\Delta E$  είναι ίσα.
- γ.  $\widehat{A} = \widehat{E}$ .



### 8 Θέμα 2 - 13681

Στο σχήμα που ακολουθεί, τα τρίγωνα  $BA\Gamma$  και  $B\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελή με βάση την πλευρά  $B\Gamma$ .

- α. Στις παρακάτω προτάσεις να συμπληρώσετε τα κενά με τις ίσες πλευρές και τις ίσες γωνίες για τα δυο ισοσκελή τρίγωνα  $BA\Gamma$  και  $B\Delta\Gamma$ .
- Οι ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου  $BA\Gamma$  είναι οι ..... και .....
  - Οι ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου  $B\Delta\Gamma$  είναι οι ..... και .....
  - Στο ισοσκελές τρίγωνο  $B\Delta\Gamma$  η γωνία  $\widehat{B\hat{\Gamma}\Delta}$  είναι ίση με την γωνία .....
  - Στο ισοσκελές τρίγωνο  $BA\Gamma$  η γωνία  $\widehat{B\hat{\Gamma}A}$  είναι ίση με την γωνία .....
- β. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα  $A\Delta B$  και  $A\Delta\Gamma$  είναι ίσα.
- γ. Στον πίνακα που ακολουθεί, στη στήλη A δίνονται γωνίες του τριγώνου  $AB\Delta$ , ενώ στη στήλη B δίνονται γωνίες του τριγώνου  $A\Delta\Gamma$ .



Να αντιστοιχήσετε κάθε γωνία του τριγώνου  $A\Delta B$  με την αντίστοιχη ίση της γωνία του τριγώνου  $A\Delta\Gamma$  που προκύπτουν ως άμεσα συμπεράσματα από την ισότητα των τριγώνων  $A\Delta B$  και  $A\Delta\Gamma$  του β. ερωτήματος.

| Στήλη A                             | Στήλη B                                  |
|-------------------------------------|--|
| (γωνίες τριγώνου $A\Delta B$ )      | (γωνίες τριγώνου $A\Delta\Gamma$ )       |
| 1. γωνία $\widehat{A\hat{B}\Delta}$ | α. γωνία $\widehat{\Gamma\hat{A}\Delta}$ |
| 2. γωνία $\widehat{A\hat{\Delta}B}$ | β. γωνία $\widehat{A\hat{\Gamma}\Delta}$ |
| 3. γωνία $\widehat{B\hat{A}\Delta}$ | γ. γωνία $\widehat{A\hat{\Delta}\Gamma}$ |

**9 Θέμα 2 - 13683**

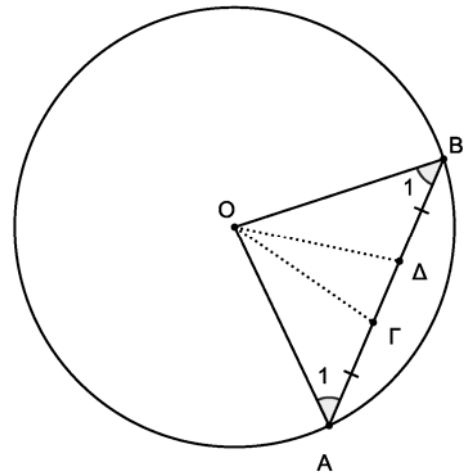
Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με βάση την πλευρά  $B\Gamma$ .

- α.** Να γράψετε τις ιδιότητες που αφορούν τις πλευρές και τις γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου  $AB\Gamma$ . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- β.** Από τις κορυφές  $B$  και  $\Gamma$  φέρνουμε τις διαμέσους  $BM$  και  $\Gamma N$  που αντιστοιχούν στις πλευρές του  $A\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα.
  - i.** Να συγκρίνετε τα τρίγωνα  $B\Gamma M$  και  $\Gamma B N$  και να αιτιολογήσετε γιατί είναι ίσα.
  - ii.** Να εξηγήσετε γιατί οι διάμεσοι  $BM$  και  $\Gamma N$  είναι ίσες.

**10 Θέμα 2 - 13685**

Θεωρούμε κύκλο κέντρου  $O$  και χορδή του  $AB$ . Πάνω στη χορδή  $AB$  παίρνουμε σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$  τέτοια, ώστε  $A\Gamma = B\Delta$ .

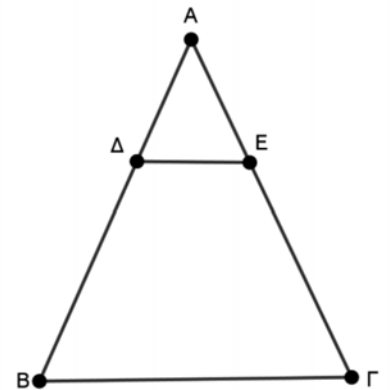
- α.** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AOB$  είναι ισοσκελές και ότι οι γωνίες του  $\hat{A}_1$  και  $\hat{B}_1$  είναι ίσες.
- β.** Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα  $OAG$  και  $OBD$  είναι ίσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- γ.** Είναι ίσα τα τμήματα  $OG$  και  $OD$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



**11 Θέμα 4 - 12512**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  και στις ίσες πλευρές του  $AB$ ,  $A\Gamma$  παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα  $A\Delta = \frac{1}{3}AB$  και  $A\epsilon = \frac{1}{3}A\Gamma$ .

- α.** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $A\Delta\epsilon$  είναι ισοσκελές.
- β.** Να αποδείξετε ότι τα τμήματα  $B\Delta$  και  $\Gamma\epsilon$  είναι ίσα.
- γ.** Αν  $M$  είναι το μέσο της  $B\Gamma$ , να αποδείξετε ότι:
  - i.** τα τρίγωνα  $B\Delta M$  και  $\Gamma\epsilon M$  είναι ίσα.
  - ii.** το τρίγωνο  $\Delta\epsilon M$  είναι ισοσκελές.



**12 Θέμα 4 - 13795**

Στις πλευρές μίας γωνίας  $x\hat{O}y$  παίρνουμε τα σημεία  $A, B$  στην  $Ox$  και  $\Gamma, \Delta$  στην  $Oy$ , ώστε  $OA = O\Gamma$  και  $OB = O\Delta$ . Έστω  $M$  τυχαίο σημείο της διχοτόμου της γωνίας  $x\hat{O}y$ .

- α.** Να αποδείξετε ότι  $MB = M\Delta$ .
- β.** Να αποδείξετε ότι  $\hat{A}M\hat{B} = \hat{\Gamma}M\hat{\Delta}$ .
- γ.** Να αποδείξετε ότι  $\hat{A}M\hat{O} = \hat{\Gamma}M\hat{O}$ .

**13 Θέμα 4 - 13794**

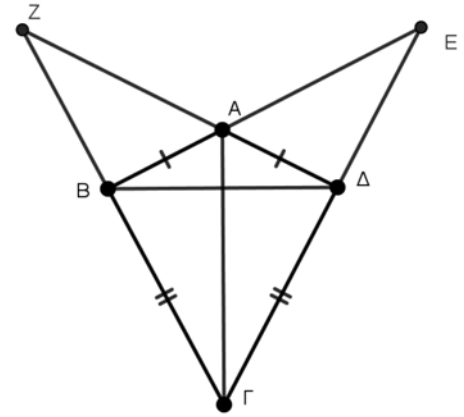
Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Στις προεκτάσεις των πλευρών του  $BA$  προς το  $A$  και  $\Gamma A$  προς το  $A$ , παίρνουμε σημεία  $E$  και  $\Delta$  αντίστοιχα, ώστε  $AE = A\Delta$ .

- α.** Να αποδείξετε ότι  $B\Delta = \Gamma E$ .
- β.** Να αποδείξετε ότι  $\hat{\Gamma}B\hat{\Delta} = \hat{B}\Gamma\hat{E}$ .
- γ.** Έστω  $M$  το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$ , να αποδείξετε ότι  $M\Delta = ME$ .

**14 Θέμα 4 - 13287**

Δίνεται τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB = A\Delta$  και  $\Gamma B = \Gamma\Delta$ . Αν οι προεκτάσεις των  $BA$  και  $\Gamma\Delta$  τέμνονται στο  $E$ , και οι προεκτάσεις των  $\Delta A$  και  $\Gamma B$  τέμνονται στο  $Z$ , να αποδείξετε ότι:

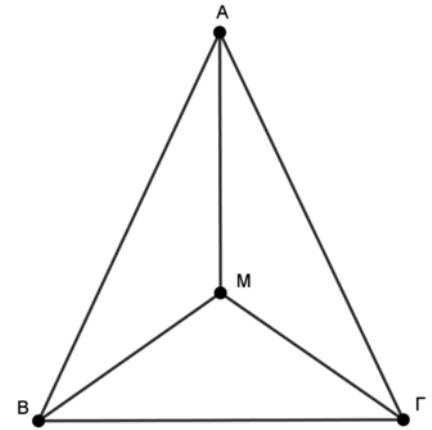
- Η  $\Gamma A$  είναι η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{\Gamma}$ .
- Οι γωνίες  $\hat{Z}\hat{A}\hat{\Gamma}$  και  $\hat{E}\hat{A}\hat{\Gamma}$  είναι ίσες.
- $\Gamma Z = \Gamma E$

**15 Θέμα 4 - 12699**

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και σημείο  $M$ , εσωτερικό του τριγώνου, τέτοιο ώστε  $MB = M\Gamma$ .

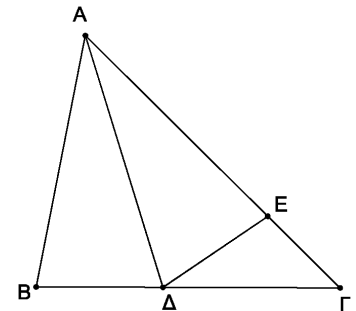
- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $MAB$  και  $M\Lambda\Gamma$  είναι ίσα.
- Να αιτιολογήσετε γιατί η  $MA$  διχοτομεί τη γωνία  $A$ .
- Προεκτείνουμε την  $AM$  προς το μέρος του  $M$  και η προέκταση τέμνει τη  $B\Gamma$  στο  $\Delta$ .

Να αποδείξετε ότι το  $M\Delta$  είναι ύψος του τριγώνου  $MB\Gamma$ .

**16 Θέμα 4 - 13530**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = 10$  και  $A\Gamma = 14$  και η διχοτόμος του  $A\Delta$ . Στην πλευρά  $A\Gamma$  παίρνουμε σημείο  $E$  ώστε  $\Gamma E = 4$ .

- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\epsilon\Delta$  είναι ίσα.
- Να δικαιολογήσετε γιατί είναι ίσα τα τμήματα  $B\Delta$ ,  $\Delta E$ .
- Προεκτείνουμε την  $E\Delta$  προς το  $\Delta$  κατά τμήμα  $\Delta Z$ , ώστε  $\Delta Z = \Delta E$ . Να αποδείξετε ότι  $\hat{\Delta B Z} = \hat{\Delta Z B}$ .

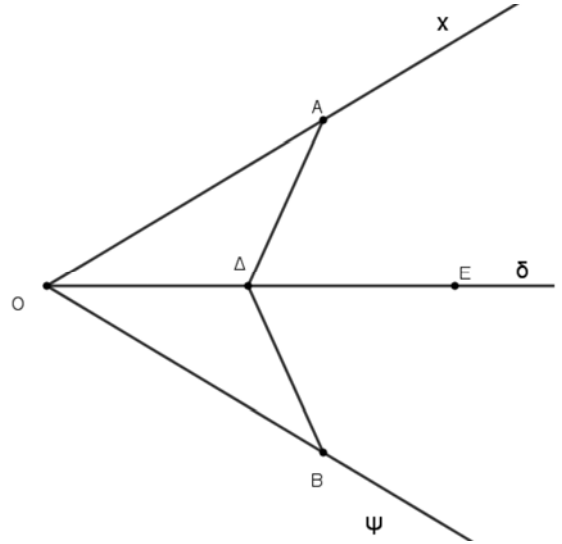
**17 Θέμα 4 - 13793**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και το ύψος του  $A\Delta$ . Στις προεκτάσεις των πλευρών του  $AB$  προς το  $B$  και  $A\Gamma$  προς το  $\Gamma$  παίρνουμε σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα ώστε  $BE = \Gamma Z$ .

- Να αποδείξετε ότι  $\hat{B}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}\hat{A}\hat{\Delta}$ .
- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $A\epsilon\Delta$  και  $AZ\Delta$  είναι ίσα.
- Αν  $\Delta K$  είναι το ύψος του τριγώνου  $E\Delta Z$ , να αποδείξετε ότι  $EK = KZ$ .

**18 Θέμα 4 - 13496**

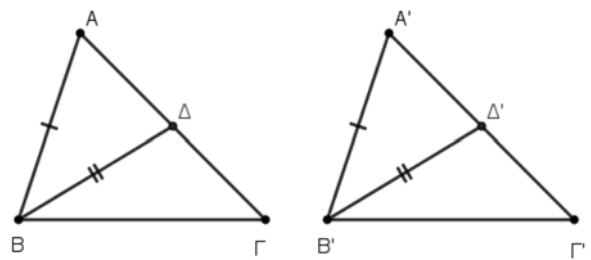
Δίνεται η γωνία  $\widehat{x\hat{O}\psi}$  και η διχοτομος της Οδ. Πάνω στις Οx και Οψ παίρνουμε σημεία Α και Β αντίστοιχα, ώστε  $OA = OB$ . Πάνω στην Οδ θεωρούμε σημεία Δ και Ε όπως φαίνονται στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι:



- α. Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΔ είναι ίσα.
- β.  $\widehat{A\Delta E} = \widehat{B\Delta E}$ .
- γ. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι  $AE = BE$ . Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

**19 Θέμα 4 - 13502**

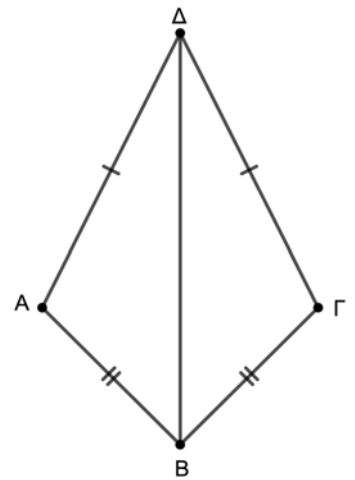
Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' του σχήματος με  $AG = A'G'$ ,  $AB = A'B'$ . Αν οι διάμεσοι ΒΔ και Β'Δ' είναι ίσες, να αποδείξετε ότι:



- α.  $\widehat{A} = \widehat{A'}$ .
- β. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι τα στοιχεία που έχουμε δεν αρκούν για να θεωρήσουμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι ίσα. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

**20 Θέμα 4 - 13651**

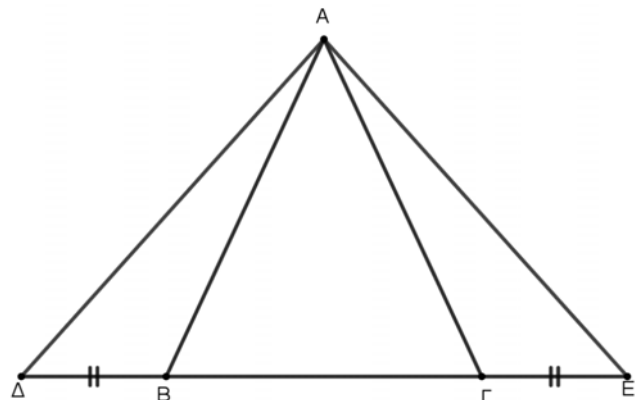
Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι  $AD = GD$  και  $AB = GB$ .



- α. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΒΔ.
- β. Να αποδείξετε ότι η ΔΒ είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{A\Delta G}$ .
- γ. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι «η ΔΒ είναι μεσοκάθετος του ΑΓ». Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

**21 Θέμα 4 - 12972**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ( $AB = AG$ ). Στις προεκτάσεις της πλευράς ΒΓ και προς τα δύο άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα έτσι ώστε  $BD = GE$  όπως στο παρακάτω σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

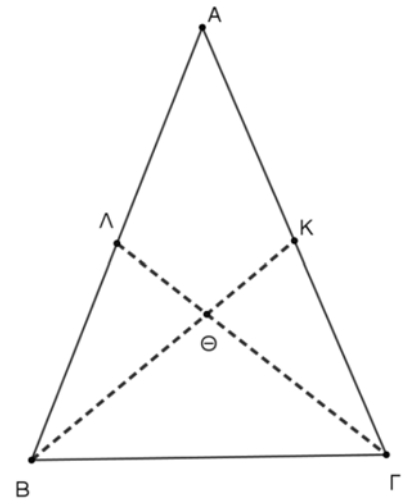


- α.  $\widehat{B_{εξ}} = \widehat{G_{εξ}}$
- β. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.
- γ. Ένας μαθητής ισχυρίστηκε ότι τα τρία τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή Α. Συμφωνείτε ή όχι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

## 22 Θέμα 4 - 13690

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και τις διαμέσους του  $B\Lambda$  και  $\Gamma\Delta$ , οι οποίες τέμνονται στο σημείο  $\Theta$ .

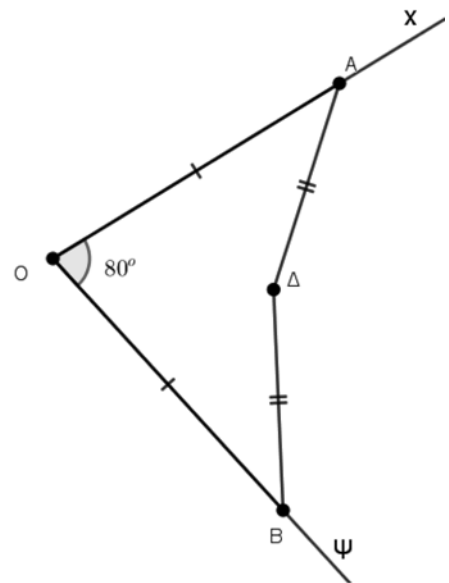
- Na δικαιολογήσετε γιατί είναι  $\Lambda B = \Gamma\Delta$ .
  - Na αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $\Lambda B\Gamma$  και  $\Gamma\Delta B$  είναι ίσα.
- Τι είδους τρίγωνο είναι το  $B\Theta\Gamma$  ως προς τις πλευρές του; Na αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- Αν η διάμεσος  $B\Lambda$  είναι και ύψος του τριγώνου  $AB\Gamma$  στην πλευρά του  $A\Gamma$ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισόπλευρο.



## 23 Θέμα 4 - 13503

Δίνεται η γωνία  $\widehat{x\hat{O}\psi} = 80^\circ$ . Πάνω στις πλευρές  $Ox$  και  $O\psi$  παίρνουμε σημεία  $A$  και  $B$  αντίστοιχα, ώστε  $OA = OB$ . Έστω  $\Delta$  σημείο στο εσωτερικό της γωνίας  $\widehat{x\hat{O}\psi}$  τέτοιο, ώστε  $A\Delta = B\Delta$ .

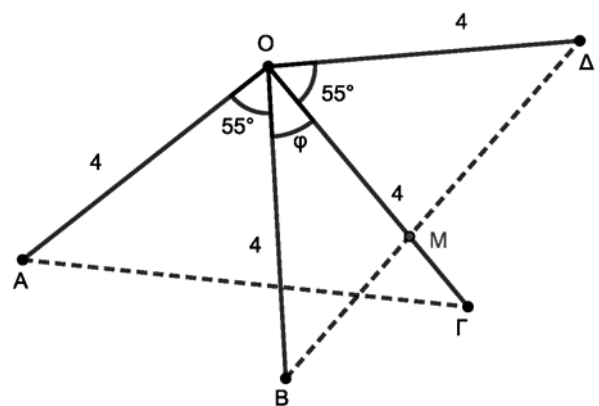
- Na αποδείξετε ότι:
  - Τα τρίγωνα  $O\Delta A$  και  $O\Delta B$  είναι ίσα.
  - $\widehat{A\hat{O}\Delta} = 40^\circ$ .
- Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι η  $\Delta O$  είναι μεσοκάθετος της  $AB$ . Συμφωνείτε μαζί του; Na αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



## 24 Θέμα 4 - 12974

Για τις γωνίες του παρακάτω σχήματος δίνεται ότι:  $\widehat{A\hat{O}B} = \widehat{G\hat{O}\Delta} = 55^\circ$ ,  $\widehat{B\hat{O}\Gamma} = \varphi$  και  $OA = OB = OG = OD = 4$ .

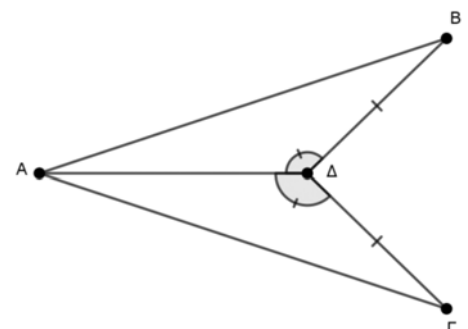
- Na αποδείξετε ότι:
  - Οι γωνίες  $\widehat{A\hat{O}\Gamma}$  και  $\widehat{B\hat{O}\Delta}$  είναι ίσες.
  - Τα τρίγωνα  $A\hat{O}\Gamma$  και  $B\hat{O}\Delta$  είναι ίσα.
- Αν  $M$  είναι το σημείο τομής των τμημάτων  $OG$  και  $B\Delta$ , πόσες μοίρες θα έπρεπε να είναι η γωνία  $\varphi$ , ώστε το σημείο  $M$  να είναι το μέσο του τμήματος  $B\Delta$ ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



## 25 Θέμα 4 - 12840

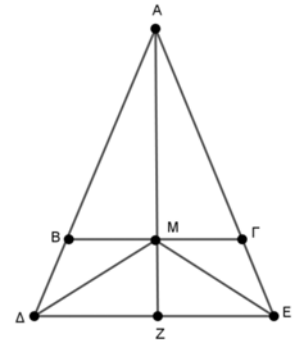
Στο διπλανό σχήμα δίνονται ότι ισχύουν:  $\Delta B = \Delta\Gamma$  και  $\widehat{\Delta\hat{A}B} = \widehat{\Delta\hat{A}\Gamma}$ .

- Na συγκρίνετε τα τρίγωνα  $\Delta\hat{A}B$  και  $\Delta\hat{A}\Gamma$ .
- Na αιτιολογήσετε γιατί  $\widehat{\Delta\hat{A}B} = \widehat{\Delta\hat{A}\Gamma}$ .
- Φέρνουμε τη  $B\Gamma$ . Αν η  $A\Delta$  προεκτεινόμενη προς το  $\Delta$ , τέμνει την  $B\Gamma$  στο  $E$ , να αποδείξετε ότι το  $E$  είναι το μέσο της  $B\Gamma$ .



**26 Θέμα 4 - 12837**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και  $M$  είναι το μέσο της βάσης  $B\Gamma$ . Στις προεκτάσεις των πλευρών  $AB$ ,  $A\Gamma$  παίρνουμε τα τμήματα  $B\Delta$ ,  $\Gamma E$  αντίστοιχα ώστε  $B\Delta = \Gamma E$ . Να αποδείξετε ότι:

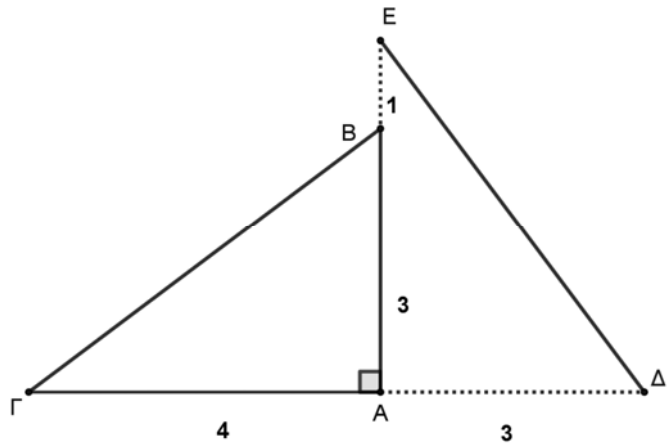


- α. Το τρίγωνο  $\Delta DE$  είναι ισοσκελές.
- β. Τα τρίγωνα  $MB\Delta$  και  $M\Gamma E$  είναι ίσα.
- γ. Αν η  $AM$  προεκτεινόμενη προς το  $M$ , τέμνει την  $DE$  στο σημείο  $Z$ , να αιτιολογήσετε ότι η  $AZ$  είναι κάθετη στην  $DE$ .

**7. Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων**

**27 Θέμα 2 - 13680**

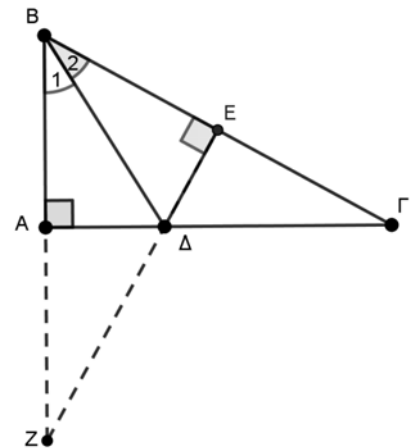
Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $BA\Gamma$  με  $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 90^\circ$  είναι  $BA = 3$  και  $A\Gamma = 4$ . Προεκτείνουμε την πλευρά  $\Gamma A$  (προς το μέρος του  $A$ ) και παίρνουμε τμήμα  $A\Delta = 3$  και την πλευρά  $AB$  (προς το μέρος του  $B$ ) κατά τμήμα  $BE = 1$ .



- α. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι το τρίγωνο  $\Delta AE$  είναι ορθογώνιο. Είναι ο ισχυρισμός του σωστός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- β. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα  $BA\Gamma$  και  $\Delta AE$  είναι ίσα.
- γ. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις με τις ίσες γωνίες που προκύπτουν ως άμεσα συμπεράσματα από την ισότητα των τριγώνων  $AB\Gamma$  και  $\Delta E$  του β. ερωτήματος.
  - Η γωνία  $B\hat{\Gamma}A$  του τριγώνου  $BA\Gamma$  είναι ίση με τη γωνία ..... του τριγώνου  $\Delta AE$ .
  - Η γωνία  $A\hat{\Delta}E$  του τριγώνου  $\Delta AE$  είναι ίση με τη γωνία ..... του τριγώνου  $BA\Gamma$ .

**28 Θέμα 2 - 12698**

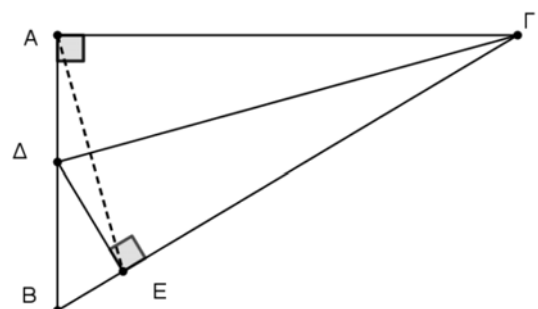
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\widehat{A} = 90^\circ$ ) και  $B\Delta$  η διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{B}$ . Από το  $\Delta$  φέρουμε  $DE \perp B\Gamma$  και έστω  $Z$  το σημείο στο οποίο η ευθεία  $BZ$  τέμνει την προέκταση της  $BA$  (προς το  $A$ ). Να αποδείξετε ότι:



- α.  $A\Delta = \Delta E$  και  $AB = EB$
- β.  $\Delta Z = \Delta \Gamma$
- γ. Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $EBZ$  είναι ίσα.

**29 Θέμα 4 - 13691**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\widehat{A} = 90^\circ$ ) και η διχοτόμος της γωνίας του  $\hat{\Gamma}$ , η οποία τέμνει την πλευρά  $AB$  στο  $\Delta$ . Από το  $\Delta$  φέρουμε τμήμα  $\Delta E$  κάθετο στην πλευρά  $B\Gamma$ .



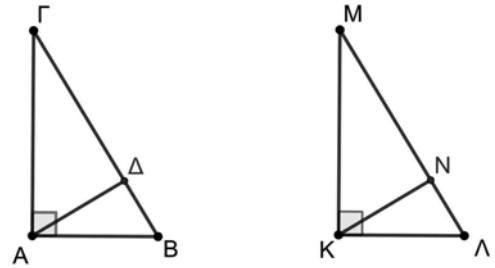
- α. i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $A\Gamma\Delta$  και  $E\Gamma\Delta$  είναι ίσα.
  - ii. Να γράψετε τις ισότητες πλευρών και γωνιών που προκύπτουν των τριγώνων  $A\Gamma\Delta$  και  $E\Gamma\Delta$ . Να δικαιολογήσετε την απάντησή
- β. Να αποδείξετε ότι η  $\Gamma\Delta$  είναι μεσοκάθετος του  $AE$ .



### 30 Θέμα 4 - 13779

Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $K\Lambda M$  είναι ορθογώνια με  $\widehat{A} = \widehat{K} = 90^\circ$  και  $AG = KM$ ,  $B\Gamma = \Lambda M$ . Επίσης τα  $A\Delta$  και  $KN$  είναι ύψη των τριγώνων:

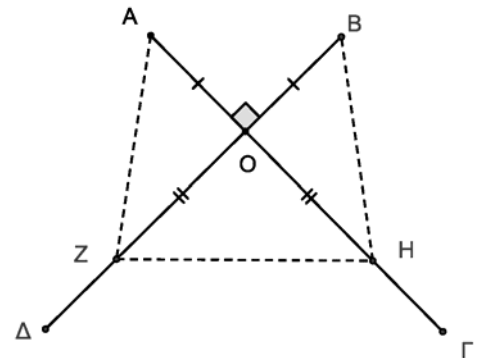
- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $K\Lambda M$  είναι ίσα
- Να αποδείξετε ότι  $A\Delta = KN$ .
- Ποιο συμπέρασμα βγαίνει από το (β) για τα μήκη των αντίστοιχων υψών ίσων ορθογώνιων, όπως τα  $A\Delta$  και  $KN$ ;
- Να σχεδιάσετε τα ύψη  $\Delta E$  και  $NP$  των τριγώνων  $A\Delta B$  και  $KN\Lambda$  και να αποδείξετε ότι είναι ίσα.



### 31 Θέμα 4 - 13688

Στο παρακάτω σχήμα, τα τμήματα  $A\Gamma$  και  $B\Delta$  τέμνονται κάθετα στο σημείο  $O$  έτσι ώστε  $OA = OB$ . Πάνω στα τμήματα  $O\Gamma$  και  $O\Delta$  θεωρούμε τα σημεία  $H$  και  $Z$  αντίστοιχα τέτοια ώστε  $OH = OZ$ .

- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $OAZ$  και  $OBH$  είναι ίσα.
- Δύο από τις παρακάτω τέσσερις ιδιότητες προκύπτουν ως άμεσα συμπεράσματα από την ιδιότητα των τριγώνων  $OAZ$  και  $OBH$  του α. ερωτήματος. Να βρείτε ποιες ιδιότητες είναι και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
  - $\widehat{OAZ} = \widehat{OBH}$
  - $\widehat{AOB} = \widehat{ZOH}$
  - $AZ = BH$
  - $AH = BZ$
- Τι θα αλλάζατε ή θα προσθέτατε στα δεδομένα ώστε να προκύπτει ως συμπέρασμα ότι το τμήμα  $ZH$  είναι ίσο με τα τμήματα  $AZ$  και  $BH$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

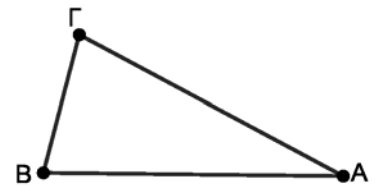


## 10. Ανισοτικές σχέσεις

### 32 Θέμα 2 - 13789

Στο παραπάνω σχήμα ισχύει ότι  $AB = A\Gamma$  και  $\widehat{B} > \widehat{A}$ . Να αποδείξετε ότι:

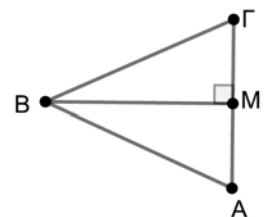
- Οι γωνίες  $\widehat{B}$ ,  $\widehat{\Gamma}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι ίσες.
- $A\Gamma > B\Gamma$ .
- Η μικρότερη γωνία του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι η  $\widehat{A}$ .



### 33 Θέμα 2 - 13786

Στο σχήμα το  $M$  είναι μέσο της  $A\Gamma$  και τα τμήματα  $A\Gamma$  και  $BM$  είναι κάθετα.

- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές.
- Το παρακάτω σχήμα είναι η κάτοψη ενός κήπου. Η πλευρά του κήπου που αντιστοιχεί στην πλευρά  $A\Gamma$  της κάτοψης έχει μήκος 12 μέτρα. Για να περιφράξουμε τον κήπο χρειαζόμαστε 40 μέτρα φράχτη.
  - Πόσα μέτρα φράχτη χρειαζόμαστε για την πλευρά του κήπου που αντιστοιχεί στην  $AB$  της κάτοψης;
  - Αν αφήσουμε χωρίς φράχτη μόνο το μέρος του κήπου που αντιστοιχεί στο  $AM$ , τότε πόσα μέτρα φράχτη θα χρειαστούμε;

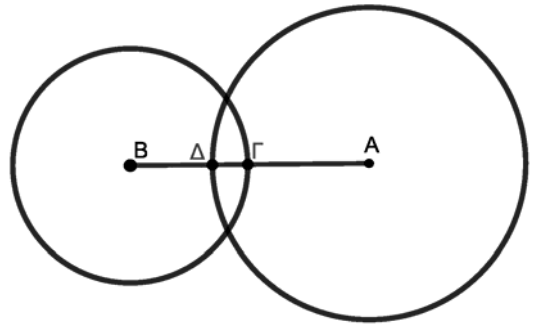


12. Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

34 Θέμα 2 - 13775

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται δύο κύκλοι με κέντρα τα σημεία A και B.

Ο κύκλος με κέντρο το A έχει ακτίνα 4 και ο κύκλος με κέντρο το B έχει ακτίνα 3.

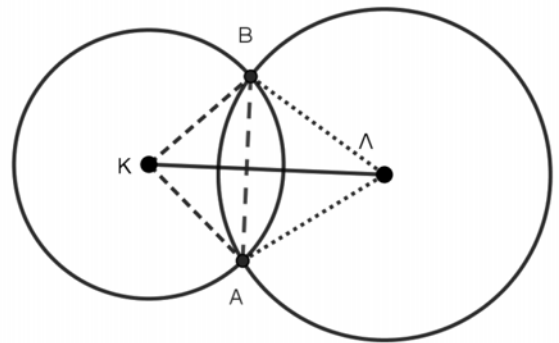


- α. Ποια είναι τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων BΓ και AΔ και γιατί;
- β. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι η σωστή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας
  - i. Το μήκος του AB είναι ίσο με 7.
  - ii. Το μήκος του AB είναι μικρότερο από 7.
  - iii. Το μήκος του AB είναι μεγαλύτερο από 7.

35 Θέμα 4 - 13288

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται δύο τεμνόμενοι κύκλοι με κέντρα τα σημεία K, Λ και έστω A, B τα σημεία τομής τους.

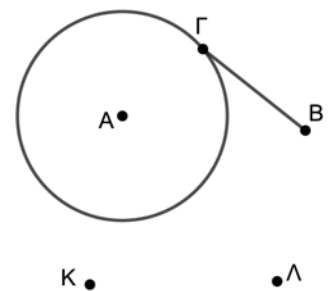
Να αποδείξετε ότι:



- α. Τα τρίγωνα AKΛ και BKΛ είναι ίσα.
- β. Τα τρίγωνα AKB και ALB είναι ισοσκελή με βάση την AB.
- γ. Η ΚΛ είναι:
  - i. διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{AKB}$
  - ii. κάθετη στη χορδή AB.

36 Θέμα 4 - 13783

Ο κύκλος με κέντρο A έχει ακτίνα 4. Το ευθύγραμμο τμήμα BΓ έχει μήκος 5 και η απόσταση των A και B είναι 7.



- α. Να βρείτε ένα σημείο Δ του κύκλου (A, 4), διαφορετικό από το Γ τέτοιο ώστε  $BD = 5$ .
- β. Το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ με άκρα τα σημεία K και Λ του σχήματος έχει μήκος 7. Ένα σημείο M απέχει 4 από το ένα άκρο του ΚΛ και 5 από το άλλο άκρο του. Πόσες είναι οι θέσεις στο επίπεδο που μπορεί να βρίσκεται το M; Να εξετάσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

37 Θέμα 4 - 13498

Θεωρούμε δύο κύκλους (K, R) και (Λ, ρ) με  $R = 4$ ,  $\rho = 3$  και  $KL = 5$ .

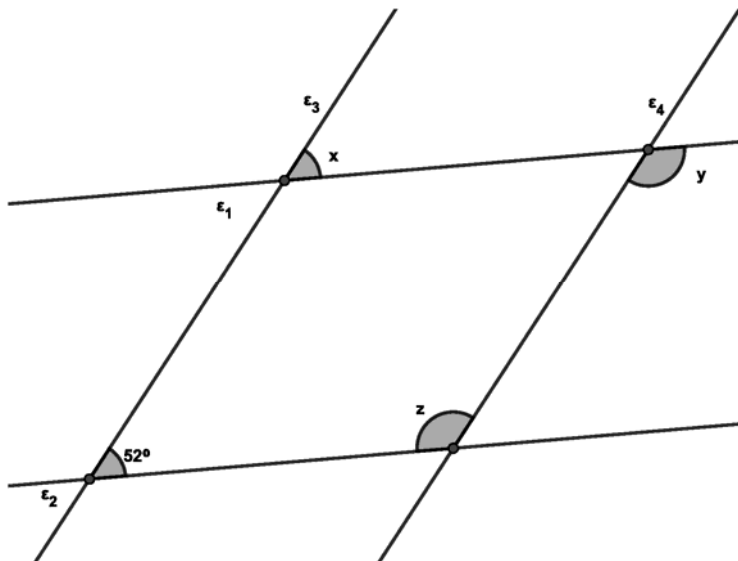
- α. Να αποδείξετε ότι:
  - i. Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) τέμνονται σε δύο σημεία, έστω A και B.
  - ii.  $\widehat{ALK} > \widehat{LKA}$ .
- β. Πόσο πρέπει να είναι το μήκος της ακτίνας ρ έτσι ώστε οι γωνίες  $\widehat{ALK}$  και  $\widehat{LKA}$  να είναι ίσες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

14. Παράλληλες ευθείες

38 Θέμα 2 - 13787

Στο διπλανό σχήμα ισχύει  $\epsilon_1 // \epsilon_2$  και  $\epsilon_3 // \epsilon_4$ .

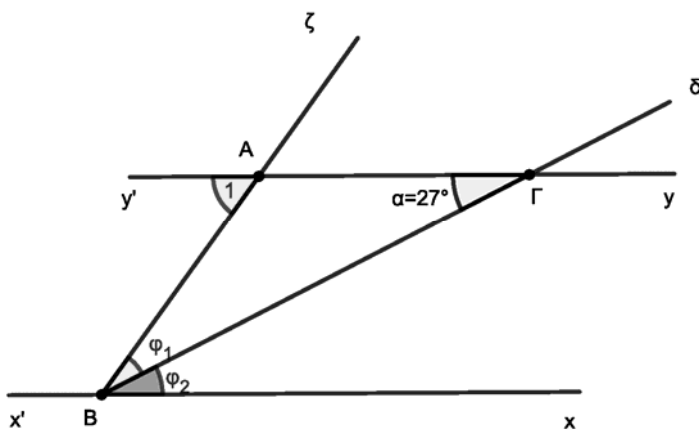
- α. Να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{x}$  δικαιολογώντας την απάντησή σας.
- β. Να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{z}$  δικαιολογώντας την απάντησή σας.
- γ. Να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{y}$  δικαιολογώντας την απάντησή σας.



39 Θέμα 2 - 12963

Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες  $x'x$  και  $y'y$  είναι παράλληλες, η ημιευθεία  $B\delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}Bx$  και  $\hat{\alpha} = 27^\circ$ . Να υπολογίσετε:

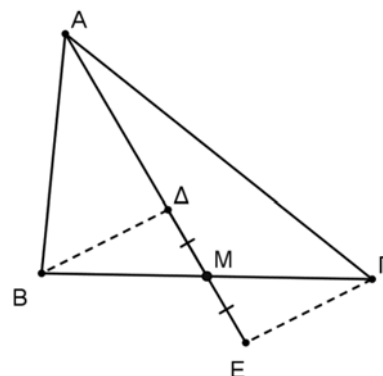
- α. Τις γωνίες  $\hat{\phi}_1$  και  $\hat{\phi}_2$  δικαιολογώντας το συλλογισμό σας.
- β. Τη γωνία  $\hat{A}_1$  δικαιολογώντας την απάντησή σας.



40 Θέμα 2 - 13686

Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$ , η διάμεσός του  $AM$  και σημείο της  $\Delta$ . Προεκτείνουμε τη διάμεσο  $AM$  προς το μέρος του  $M$  κατά τμήμα  $ME = M\Delta$ .

- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $MB\Delta$  και  $M\Gamma E$  είναι ίσα.
- β. Είναι οι γωνίες  $\hat{B}\Delta M$  και  $\hat{\Gamma}\Delta E$  των τριγώνων  $MB\Delta$  και  $M\Gamma E$  ίσες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- γ. Να αποδείξετε ότι τα τμήματα  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  είναι παράλληλα.

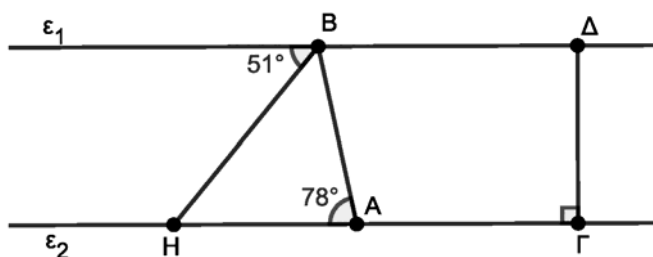


41 Θέμα 2 - 13821

Στο παραπάνω σχήμα η  $BH$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}B\epsilon_1$ .

Επίσης δίνονται οι γωνίες  $\hat{B}\hat{A}H = 78^\circ$ ,  $\hat{H}B\epsilon_1 = 51^\circ$  και η  $A\hat{\Gamma}\Delta$  είναι ορθή.

- α. Να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{A}B\hat{H}$ .
- β. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  είναι παράλληλες.
- γ. Να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{B}\Delta\hat{\Gamma}$ .



**42 Θέμα 4 - 13446**

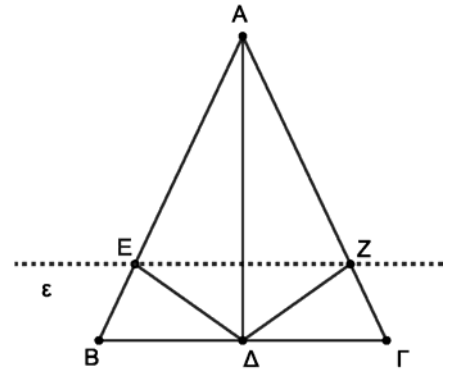
Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Φέρουμε μια ευθεία ( $\epsilon$ ) παράλληλη προς την  $B\Gamma$  η οποία τέμνει τις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα.

**α.** Να αποδείξετε ότι:

**i.**  $\widehat{AEZ} = \widehat{B}$  και  $\widehat{AZE} = \widehat{\Gamma}$

**ii.** Το τρίγωνο  $AEZ$  είναι ισοσκελές

**β.** Αν η  $A\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{A}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ , να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AE\Delta$  και  $AZ\Delta$  είναι ίσα.



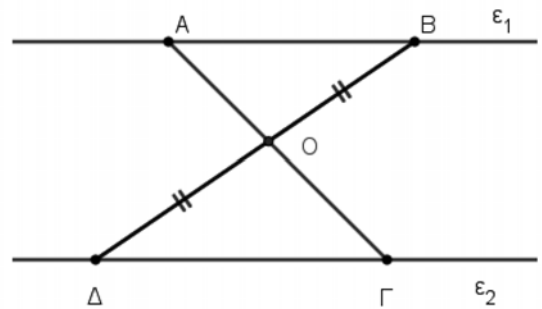
**43 Θέμα 4 - 13495**

Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  είναι παράλληλες και το σημείο  $O$  είναι μέσο του  $B\Delta$ .

**α.** Να αποδείξετε ότι οι γωνίες  $\widehat{A\hat{B}O}$  και  $\widehat{\Gamma\hat{\Delta}O}$  είναι ίσες.

**β.** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $ABO$  και  $\Gamma\Delta O$  είναι ίσα.

**γ.** Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι η  $A\Delta$  είναι παράλληλη στην  $B\Gamma$ . Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



**44 Θέμα 4 - 12970**

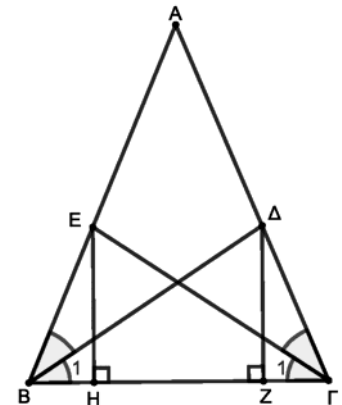
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και οι διχοτόμοι  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  των γωνιών του  $\widehat{B}$  και  $\widehat{\Gamma}$  αντίστοιχα. Φέρουμε  $EH \perp B\Gamma$  και  $\Delta Z \perp B\Gamma$ .

**α.** Να αποδείξετε ότι:

**i.** τα τρίγωνα  $B\Gamma\Delta$  και  $\Gamma B E$  είναι ίσα.

**ii.**  $EH = \Delta Z$ .

**β.** Να ονομάσετε  $P$  το σημείο τομής των διχοτόμων  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  και  $M$  το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$ . Το τμήμα  $PM$  είναι παράλληλο στα τμήματα  $EH$  και  $\Delta Z$ ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



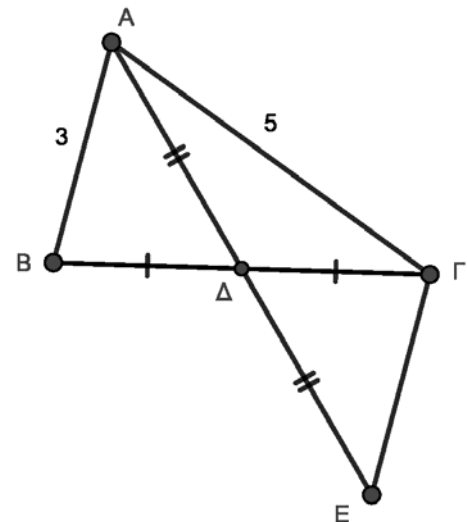
**45 Θέμα 4 - 13001**

Δίνεται το τρίγωνο  $AB\Gamma$  του σχήματος, στο οποίο  $AB = 3$ ,  $A\Gamma = 5$ . Φέρουμε τη διάμεσο  $A\Delta$  και στην προέκτασή της προς το  $\Delta$  παίρνουμε σημείο  $E$  έτσι ώστε  $A\Delta = \Delta E$ .

**α. i.** Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $E\Gamma\Delta$  είναι ίσα.

**ii.** Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς  $\Gamma E$ .

**β.** Τα σημεία  $A, B, \Gamma, \Delta$  και  $E$  στο σχήμα αποτελούν τις θέσεις πέντε χωριών σε ένα σχέδιο και τα μήκη που δίνονται είναι οι χιλιομετρικές αποστάσεις μεταξύ των χωριών. Επιπλέον δίνεται ότι η απόσταση  $\Gamma E$  είναι 3 χιλιόμετρα. Ένας συμμαθητής σας πήγε από το χωριό  $A$  στο χωριό  $E$  ακολουθώντας τη διαδρομή  $A\Delta E$ . Χρησιμοποίησε μια εφαρμογή που είχε στο κινητό του για να μετράει τις αποστάσεις που διανύει και είδε ότι είχε κάνει 8,5 χιλιόμετρα. Είναι αυτό δυνατόν; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

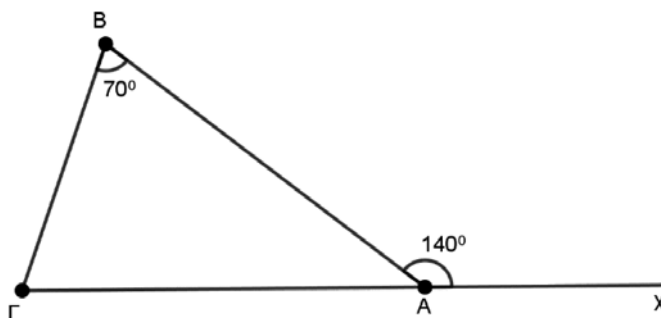


## 16. Άθροισμα γωνιών τριγώνου

## 46 Θέμα 2 - 12534

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  στο οποίο η εξωτερική γωνία της  $A$ , είναι ίση με  $140^\circ$ . Επίσης η γωνία του  $B$  ισούται με  $70^\circ$ .

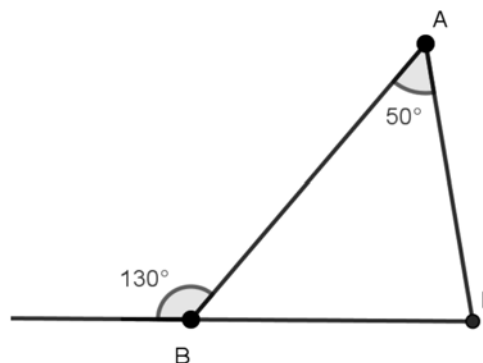
- Να υπολογίσετε πόσες μοίρες είναι η γωνία  $A$  του τριγώνου.
- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές.



## 47 Θέμα 2 - 13293

Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\widehat{B}_{εξ} = 130^\circ$  και  $\widehat{A} = 50^\circ$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

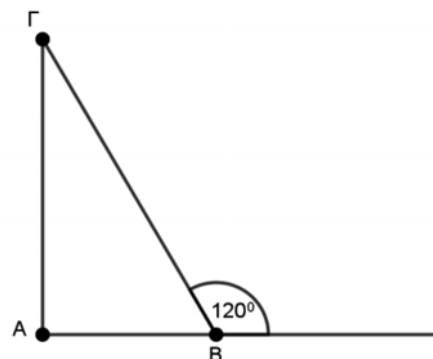
- Να υπολογίσετε καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- Να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο  $\Gamma AB$  είναι ισοσκελές και να γράψετε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του και ποια είναι η βάση του.



## 48 Θέμα 2 - 12537

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  στο οποίο η εξωτερική γωνία της  $B$  ισούται με  $120^\circ$ .

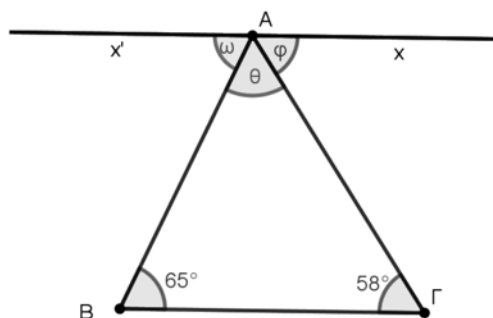
- Να υπολογίσετε πόσες μοίρες είναι η γωνία  $B$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- Αν η γωνία  $\Gamma$  του τριγώνου είναι ίση με  $30^\circ$  να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο.



## 49 Θέμα 2 - 12464

Στο σχήμα που ακολουθεί η  $x'x$  διέρχεται από την κορυφή  $A$  και είναι παράλληλη στην πλευρά  $B\Gamma$ . Αν ξέρετε ότι για τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι  $\widehat{B} = 65^\circ$  και  $\widehat{\Gamma} = 58^\circ$ :

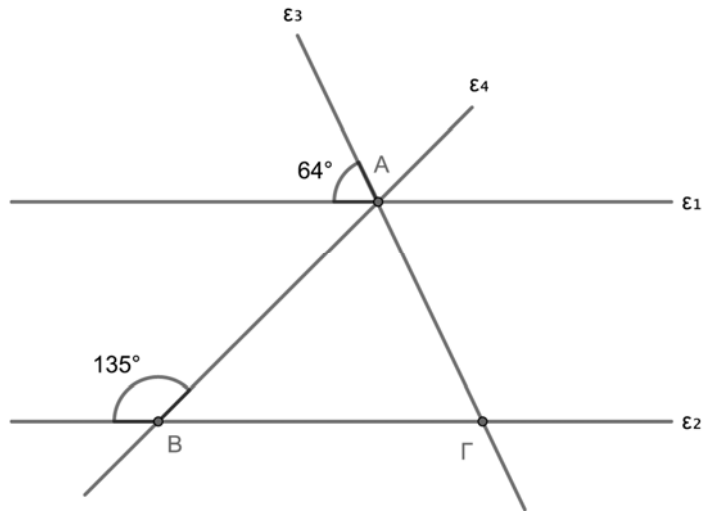
- Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας:
  - Είναι κάποια από τις σημειωμένες γωνίες  $\widehat{\omega}$ ,  $\widehat{\phi}$  ή  $\widehat{\theta}$  ίση με  $65^\circ$ ;
  - Είναι κάποια από τις σημειωμένες γωνίες  $\widehat{\omega}$ ,  $\widehat{\phi}$  ή  $\widehat{\theta}$  ίση με  $58^\circ$ ;
- Να γράψετε πόσες μοίρες είναι καθεμία από τις γωνίες  $\widehat{\omega}$ ,  $\widehat{\phi}$  και  $\widehat{\theta}$ .



**50 Θέμα 2 - 13627**

Θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  οι οποίες τέμνονται από τις ευθείες  $\epsilon_3$  και  $\epsilon_4$  στα σημεία Α, Β και Γ όπως φαίνεται στο σχήμα.

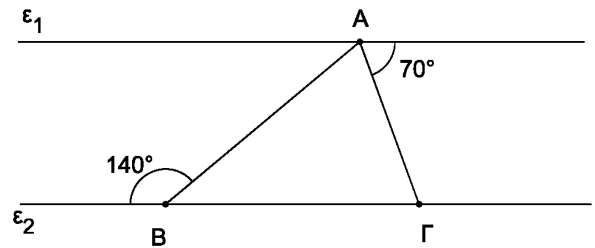
- α. Να αποδείξετε ότι  $\widehat{\Gamma\hat{B}A} = 45^\circ$  και  $\widehat{A\hat{\Gamma}B} = 64^\circ$ .
- β. Να υπολογίσετε τη γωνία  $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ .
- γ. Ποιο είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις γωνίες του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



**51 Θέμα 2 - 13437**

Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία  $\epsilon_1$  διέρχεται από την κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ και είναι παράλληλη στην ευθεία  $\epsilon_2$  που ορίζεται από τις κορυφές Β και Γ.

- α. Να υπολογίσετε τη γωνία  $\widehat{B}$  του τριγώνου ΑΒΓ.
- β. Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\widehat{\Gamma}$  και  $\widehat{A}$  του τριγώνου ΑΒΓ.

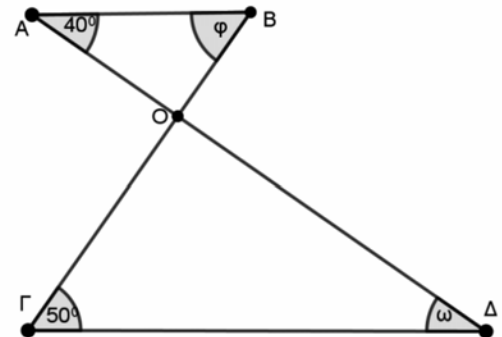


**52 Θέμα 2 - 12532**

Δίνονται τα παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ του παρακάτω σχήματος.

Αν τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΔ τέμνονται στο Ο, τότε:

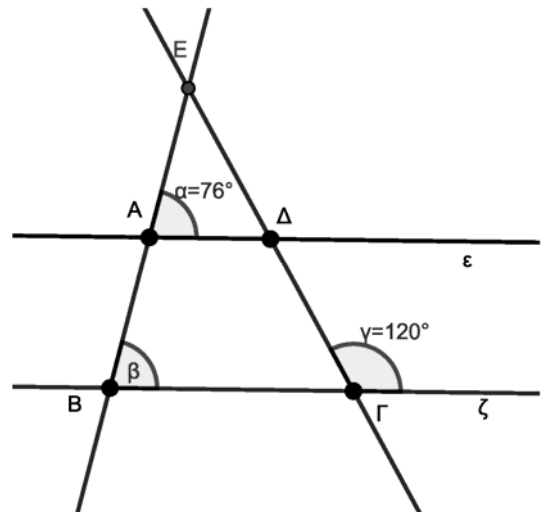
- α. Να υπολογίσετε σε μοίρες τις γωνίες  $\omega$  και  $\phi$ .
- β. Να δικαιολογήσετε γιατί το ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ είναι κάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ.



**53 Θέμα 2 - 13004**

Στο σχήμα που ακολουθεί οι ευθείες  $\epsilon$  και  $\zeta$  είναι παράλληλες με  $\hat{\alpha} = 76^\circ$  και  $\hat{\gamma} = 120^\circ$ . Να βρείτε:

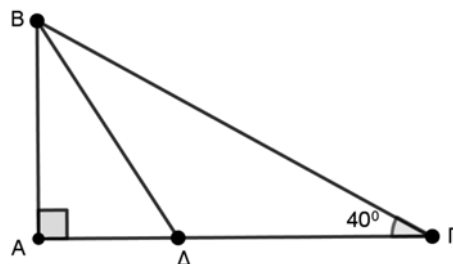
- α. Πόσες μοίρες είναι η γωνία  $\hat{\beta}$ , δικαιολογώντας την απάντησή σας.
- β. Πόσες μοίρες είναι η γωνία  $\widehat{B\hat{E}\Gamma}$ , δικαιολογώντας την απάντησή σας.



### 54 Θέμα 2 - 12533

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$  και  $\hat{\Gamma} = 40^\circ$ , η  $B\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $B$ . Αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας να υπολογίσετε:

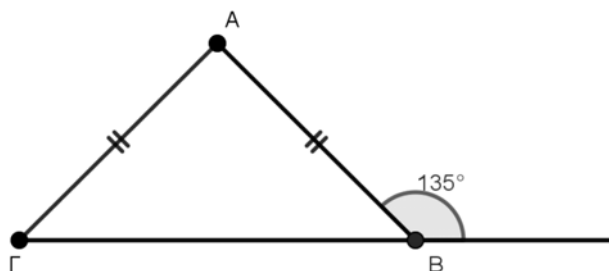
- πόσες μοίρες είναι η γωνία  $AB\Gamma$ .
- πόσες μοίρες είναι η γωνία  $AB\Delta$ .
- πόσες μοίρες είναι η γωνία  $B\Delta A$ .



### 55 Θέμα 2 - 13230

Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  του σχήματος, δίνεται ότι  $AB = A\Gamma$  και  $\hat{B}_{εξ} = 135^\circ$ .

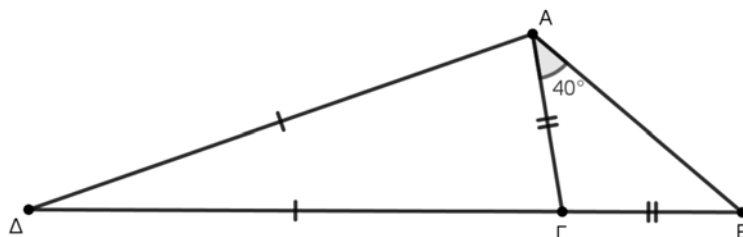
- Να υπολογίσετε καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές καθώς και το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.



### 56 Θέμα 2 - 12965

Δίνονται ισοσκελές τρίγωνο  $\Delta A\Gamma$  με  $\Delta A = \Delta \Gamma$ . Στην προέκταση της  $\Delta\Gamma$  προς το μέρος του  $\Gamma$  θεωρούμε σημείο  $B$  τέτοιο ώστε  $\Gamma B = \Gamma A$ . Αν  $\hat{\Gamma A B} = 40^\circ$ , να υπολογίσετε:

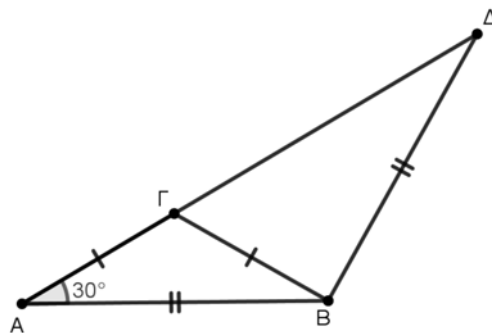
- Τις γωνίες του τριγώνου  $\Gamma A B$ .
- Τις γωνίες του τριγώνου  $\Delta A\Gamma$ .



### 57 Θέμα 2 - 12968

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $BA\Delta$  με  $BA = B\Delta$ . Έστω  $\Gamma$  ένα εσωτερικό σημείο της  $A\Delta$  τέτοιο ώστε  $\Gamma A = \Gamma B$ . Αν η γωνία  $\hat{A}$  του τριγώνου  $BA\Delta$  είναι ίση με  $30^\circ$ .

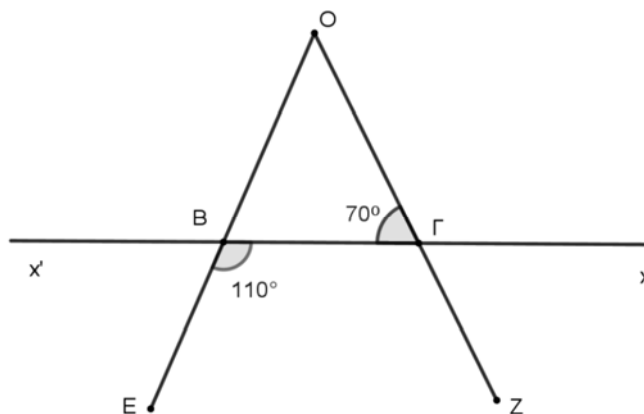
- Να υπολογίσετε:
  - τις γωνίες του τριγώνου  $\Gamma A B$ .
  - τις γωνίες του τριγώνου  $BA\Delta$ .
- Ποια είναι η σχέση της γωνίας  $\hat{A\hat{B}\Delta}$  με τη γωνία  $\hat{A}$ ;



### 58 Θέμα 2 - 13827

Στο παρακάτω σχήμα, τα τμήματα  $OE$  και  $OZ$  τέμνονται από την ευθεία  $x'x$  στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα. Αν είναι  $\hat{E\hat{B}\Gamma} = 110^\circ$  και  $\hat{O\hat{\Gamma}B} = 70^\circ$  τότε:

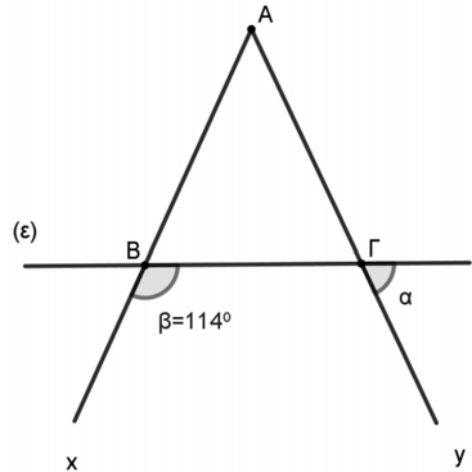
- Να αιτιολογήσετε γιατί είναι  $\hat{O\hat{B}\Gamma} = 70^\circ$ .
- Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου  $O\hat{B}\Gamma$  ως προς τις πλευρές του. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- Να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{B\hat{O}\Gamma}$  του τριγώνου  $O\hat{B}\Gamma$ .



**59 Θέμα 2 - 13684**

Στο σχήμα που ακολουθεί, οι ημιευθείες Αx και Ay τέμνονται από την ευθεία (ε) στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα. Έστω ότι οι γωνίες  $\hat{\beta}$  και  $\hat{\alpha}$  είναι παραπληρωματικές με  $\hat{\beta} = 114^\circ$ .

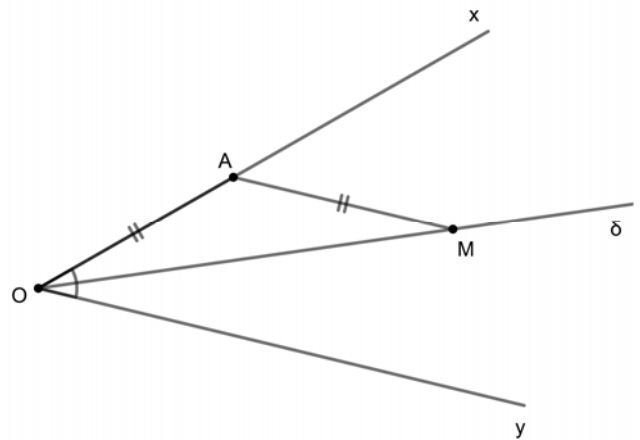
- α. Να αιτιολογήσετε γιατί είναι  $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} = 66^\circ$ .
- β. Τι είδους τρίγωνο είναι το ΑΒΓ ως προς τις πλευρές του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- γ. Να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$ .



**60 Θέμα 2 - 13624**

Σχεδιάζουμε γωνία  $\hat{x}\hat{O}\hat{y} = 40^\circ$  και παίρνουμε τυχαίο σημείο Α πάνω στην πλευρά Οx. Φέρουμε τη διχοτόμο Οδ της γωνίας  $\hat{x}\hat{O}\hat{y}$  και θεωρούμε σημείο Μ στην Οδ, τέτοιο ώστε  $AO = AM$ .

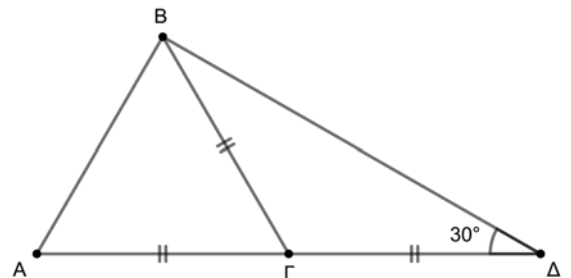
- α. Να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{\delta}\hat{O}\hat{y}$ .
- β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΟΜ.
- γ. Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ΑΟΜ ως προς τις γωνίες του και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



**61 Θέμα 2 - 13673**

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ότι  $AG = GB = GD$  και  $\hat{\Delta} = 30^\circ$ .

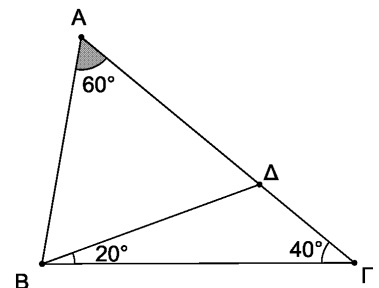
- α. Να αποδείξετε ότι  $\hat{\Delta}\hat{B}\hat{\Gamma} = 30^\circ$  και  $\hat{\Delta}\hat{\Gamma}\hat{B} = 120^\circ$ .
- β. Να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{A}$ .
- γ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.



**62 Θέμα 2 - 13438**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με  $\hat{A} = 60^\circ$  και  $\hat{\Gamma} = 40^\circ$ . Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ, ώστε  $\hat{\Gamma}\hat{B}\hat{\Delta} = 20^\circ$ .

- α. Να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{B}$ .
- β. Τι είδους τρίγωνο είναι το ΑΒΔ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

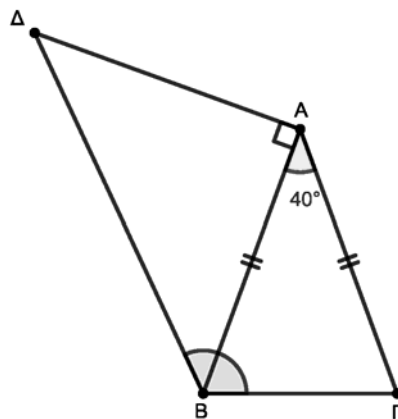




**63 Θέμα 2 - 12456**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και  $\hat{A} = 40^\circ$ .

- Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- Με πλευρά την  $AB$  και εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο  $BA\Delta$ , όπως φαίνεται στο σχήμα. Να δικαιολογήσετε γιατί η γωνία  $\Delta\hat{B}\Gamma$  είναι ίση με  $115^\circ$ .

**64 Θέμα 2 - 12463**

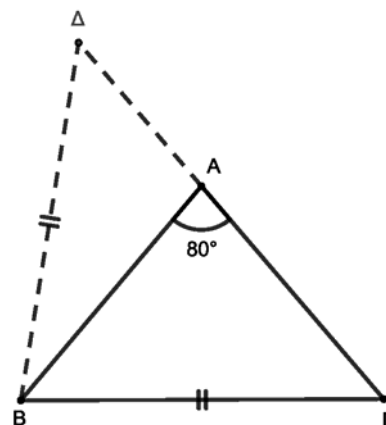
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και  $\hat{A} = 80^\circ$ . Έστω  $B\Delta$  το ύψος του τριγώνου από την κορυφή  $B$ . Να υπολογίσετε:

- Τις γωνίες  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- Τη γωνία  $\Delta\hat{B}\Gamma$ .

**65 Θέμα 2 - 12962**

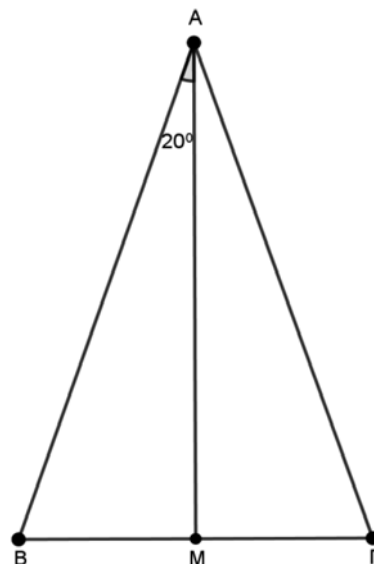
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) με γωνία  $\hat{A} = 80^\circ$ . Έστω  $\Delta$  σημείο στην προέκταση της πλευράς  $A\Gamma$  προς το μέρος του  $A$ , τέτοιο ώστε  $B\Delta = B\Gamma$ .

- Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- Να αποδείξετε ότι η γωνία  $\Gamma\hat{B}\Delta$  είναι ίση με τη γωνία  $\hat{A}$ .

**66 Θέμα 2 - 12536**

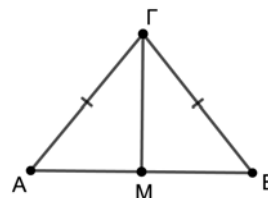
Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $AB = A\Gamma$  και η  $AM$  είναι διχοτόμος του τριγώνου.

- Αν η  $A\Gamma = 5$ , να υπολογίσετε το μήκος της  $AB$ .
- Αν η γωνία  $BAM$  είναι ίση με  $20^\circ$ , να υπολογίσετε:
  - πόσες μοίρες είναι η γωνία  $A$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
  - πόσες μοίρες είναι οι γωνίες  $B$  και  $\Gamma$  του ισοσκελούς τριγώνου  $AB\Gamma$ .

**67 Θέμα 2 - 12658**

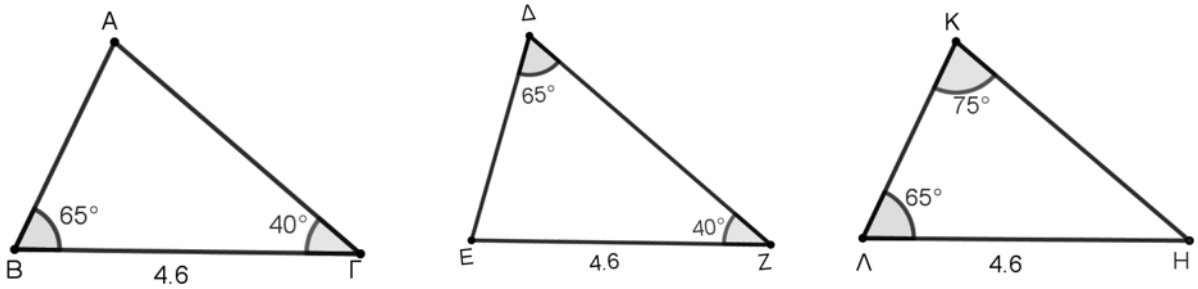
Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $A\Gamma = B\Gamma$  και η γωνία  $\Gamma\hat{A}B$  είναι η ίση με  $55^\circ$ .

- Να υπολογίσετε τη γωνία  $\Gamma\hat{B}A$ .
- Να υπολογίσετε τη γωνία  $A\hat{\Gamma}B$ .
- Αν επιπλέον το  $\Gamma M$  είναι ύψος του ισοσκελούς τριγώνου  $AB\Gamma$  να υπολογίσετε τη γωνία  $A\hat{\Gamma}M$ .



**68 Θέμα 2 - 12964**

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα τρίγωνα  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$  και  $K\Lambda H$  στα οποία είναι σημειωμένες δύο γωνίες τους και επιπλέον οι πλευρές  $B\Gamma$ ,  $EZ$  και  $\Lambda H$  είναι ίσες μεταξύ τους, δηλαδή  $B\Gamma = EZ = \Lambda H = 4,6$ .

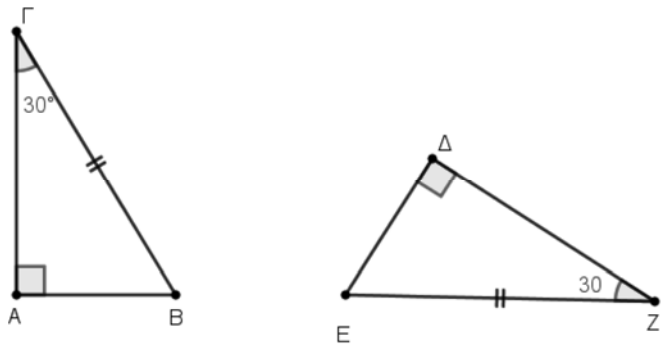


- α. Να υπολογίσετε τις τρίτες γωνίες τους  $\hat{A}$ ,  $\hat{E}$  και  $\hat{H}$  αντίστοιχα των τριών τριγώνων.
- β. Δύο από τα τρίγωνα του παρακάτω σχήματος είναι ίσα μεταξύ τους. Να γράψετε ποια είναι αυτά δικαιολογώντας την απάντησή σας.

**69 Θέμα 2 - 13494**

Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  με  $B\Gamma = EZ$  και  $\hat{\Gamma} = \hat{Z} = 30^\circ$ .

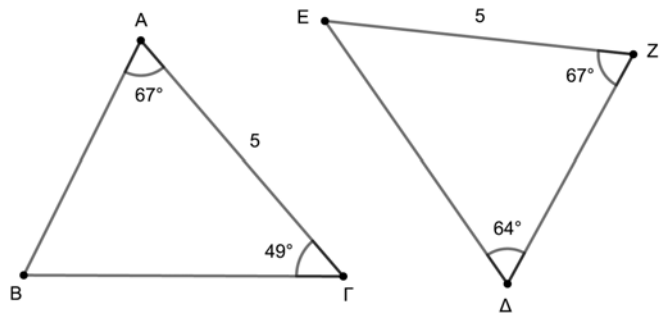
- α. Να υπολογίσετε τη γωνία  $E$ .
- β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  είναι ίσα.
- γ. Αν είναι  $AB = 5$ , τότε να βρείτε το μήκος της  $\Delta E$  και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



**70 Θέμα 2 - 13631**

Δίνονται τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  του σχήματος με  $A\Gamma = 5$ ,  $\hat{A} = 67^\circ$ ,  $\hat{\Gamma} = 49^\circ$ ,  $EZ = 5$ ,  $\hat{\Delta} = 64^\circ$  και  $\hat{Z} = 67^\circ$ .

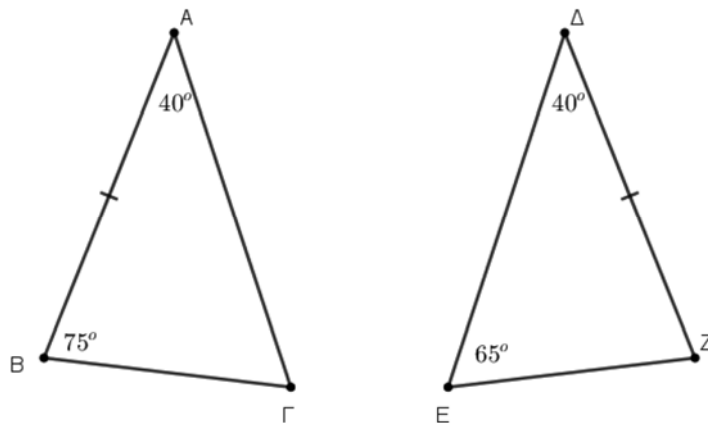
- α. Να αποδείξετε ότι  $\hat{B} = 64^\circ$  και  $\hat{E} = 49^\circ$ .
- β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  είναι ίσα.
- γ. Να αντιγράψετε και να συμπληρώσετε στην κόλλησας τις δύο επόμενες ισότητες, οι οποίες προκύπτουν ως άμεσα συμπεράσματα της ισότητας των τριγώνων  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$ , και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας:  
 $B\Gamma = \dots, AB = \dots$



**71 Θέμα 2 - 13492**

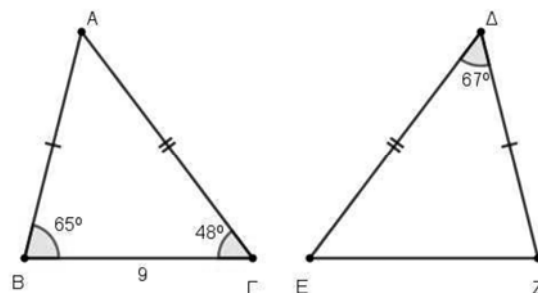
Δίνονται τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta ZE$  με  $AB = \Delta Z$ ,  $\hat{B} = 75^\circ$ ,  $\hat{A} = 40^\circ$ ,  $\hat{\Delta} = 40^\circ$  και  $\hat{E} = 65^\circ$ .

- Να αποδείξετε ότι  $\hat{Z} = 75^\circ$ .
- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta ZE$  είναι ίσα.
- Αν  $A\Gamma = 8$ , να υπολογίσετε την  $\Delta E$ .

**72 Θέμα 2 - 12359**

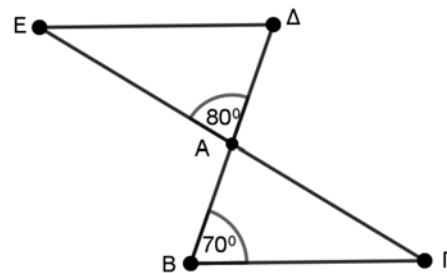
Δίνονται τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta ZE$  με  $AB = \Delta Z$ ,  $A\Gamma = \Delta E$ ,  $\hat{B} = 65^\circ$ ,  $\hat{\Gamma} = 48^\circ$ ,  $\hat{\Delta} = 67^\circ$ .

- Να αποδείξετε ότι  $\hat{A} = 67^\circ$ .
- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta ZE$  είναι ίσα.
- Αν  $B\Gamma = 9$  να υπολογίσετε την πλευρά  $EZ$ .

**73 Θέμα 2 - 12511**

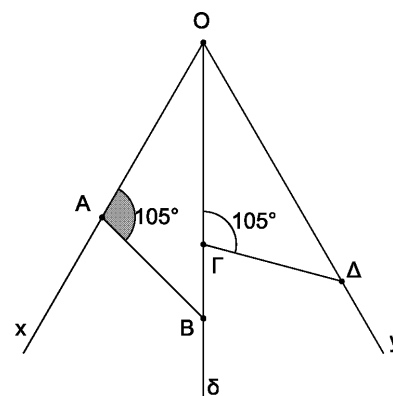
Στο παρακάτω σχήμα το  $A$  είναι μέσο των ευθυγράμμων τμημάτων  $B\Delta$  και  $\Gamma E$ . Αν η γωνία  $AB\Gamma$  ισούται με  $70^\circ$  και η γωνία  $\Delta AE$  ισούται με  $80^\circ$  τότε:

- Να υπολογίσετε τη γωνία  $A$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- Να υπολογίσετε τη γωνία  $\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta AE$  είναι ίσα.

**74 Θέμα 2 - 13529**

Στο παρακάτω σχήμα η γωνία  $x\hat{O}y$  είναι  $60^\circ$ . Η  $O\delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $x\hat{O}y$  και ισχύει  $OA = O\Gamma$ . Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος:

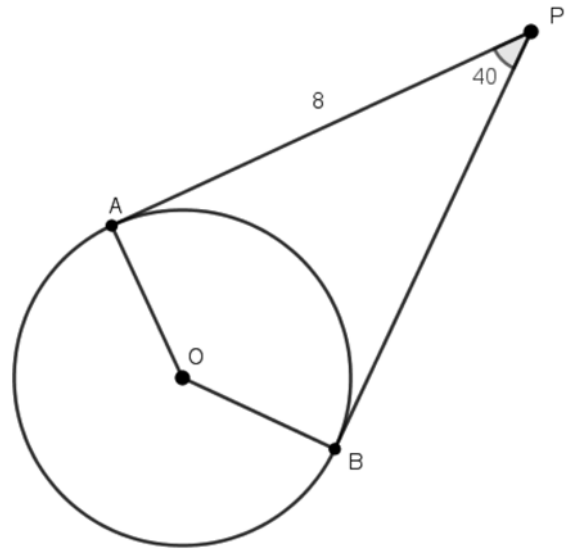
- να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $OAB$ .
- να συγκρίνετε τα τρίγωνα  $OAB$  και  $O\Gamma\Delta$  και να αιτιολογήσετε γιατί είναι  $AB = \Gamma\Delta$ .



**75 Θέμα 2 - 13493**

Δίνεται κύκλος κέντρου  $O$  και ακτίνας  $\rho$ . Από σημείο  $P$  εκτός του κύκλου φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα  $PA$  και  $PB$ . Αν είναι  $PA = 8$  και  $\widehat{APB} = 40^\circ$ , τότε να υπολογίσετε:

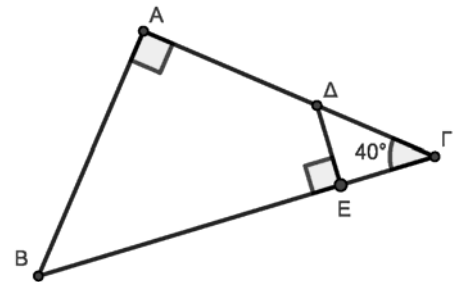
- α. Το εφαπτόμενο τμήμα  $PB$ .
- β. Την  $\widehat{APO}$ .
- γ. Την  $\widehat{POB}$ .



**76 Θέμα 2 - 13000**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\widehat{A} = 90^\circ$  και  $\widehat{\Gamma} = 40^\circ$ . Από τυχαίο σημείο  $\Delta$  της πλευράς  $A\Gamma$ , φέρουμε τμήμα  $\Delta E$  κάθετο στη  $B\Gamma$ . Να υπολογίσετε:

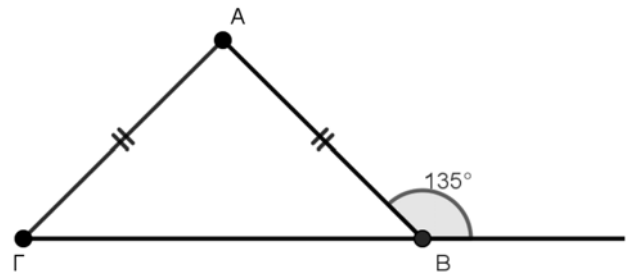
- α. Τις γωνίες του τριγώνου  $\Delta E\Gamma$ .
- β. Τις γωνίες του τετραπλεύρου  $A\Delta E B$ .



**77 Θέμα 4 - 13290**

Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\widehat{B_{\text{εξ}}} = 135^\circ$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

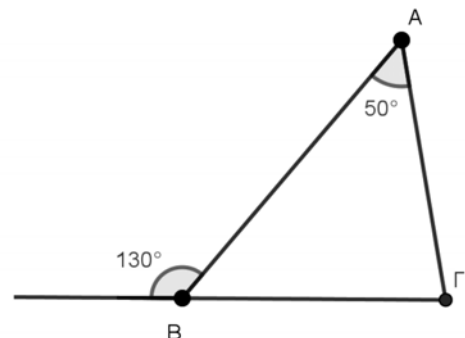
- α. Να υπολογίσετε καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- β. Να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
- γ. Να σχεδιάσετε το ύψος  $A\Delta$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  και να χαρακτηρίσετε το είδος του τριγώνου  $A\Delta\Gamma$ :
  - i. Ως προς τις γωνίες του.
  - ii. Ως προς τις πλευρές του.



**78 Θέμα 4 - 13291**

Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\widehat{B_{\text{εξ}}} = 130^\circ$  και  $\widehat{A} = 50^\circ$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

- α. Να υπολογίσετε καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- β. Να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο  $\Gamma AB$  είναι ισοσκελές και να γράψετε ποια είναι η βάση του.
- γ. Αν  $M$  είναι το μέσο του τμήματος  $AB$  και το τμήμα  $M\Delta$  είναι παράλληλο στη  $B\Gamma$ , τότε:
  - i. Να υπολογίσετε καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου  $\Gamma M\Delta$ .
  - ii. Ποιο είναι το είδος του τριγώνου  $\Gamma M\Delta$  ως προς τις πλευρές του;



### 79 Θέμα 4 - 13504

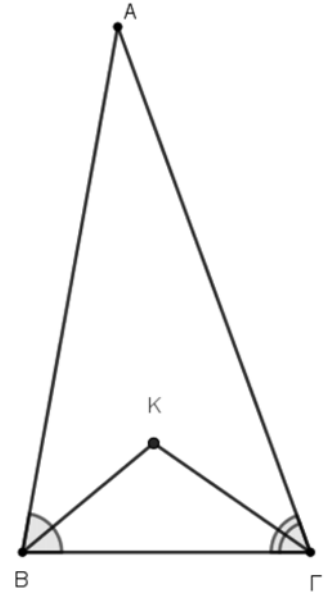
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Οι διχοτόμοι των γωνιών  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$  τέμνονται στο  $K$ .

α. Αν  $\hat{B} = 80^\circ$  και  $\hat{\Gamma} = 70^\circ$ .

i. Να αποδείξετε ότι  $\hat{A} = 30^\circ$ .

ii. Να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου  $BK\Gamma$ .

β. Αν το τρίγωνο  $BK\Gamma$  είναι ισοσκελές ( $BK = \Gamma K$ ), τι τρίγωνο θα ήταν το  $AB\Gamma$ , ως προς τις πλευρές του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



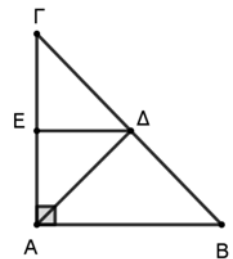
### 80 Θέμα 4 - 12971

Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$  και  $AB = A\Gamma$ ) και  $A\Delta$  η διάμεσός του. Από το σημείο  $\Delta$  φέρουμε παράλληλη προς την  $AB$  που τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο  $\Delta E\Gamma$  είναι ορθογώνιο.

β.  $\Delta E = E\Gamma$ .

γ. Το σημείο  $E$  είναι μέσο της πλευράς  $A\Gamma$ .



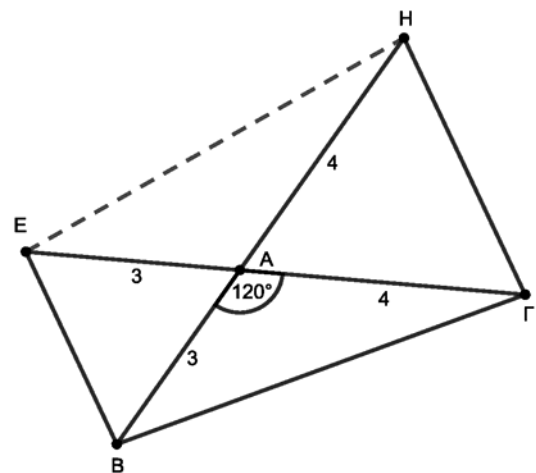
### 81 Θέμα 4 - 12973

Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 120^\circ$ ,  $AB = 3$  και  $A\Gamma = 4$ . Προεκτείνουμε την πλευρά  $BA$  προς το μέρος του  $A$ , κατά τμήμα  $AH = 4$  και την πλευρά  $\Gamma A$  προς το μέρος του  $A$ , κατά τμήμα  $AE = 3$ , όπως στο παρακάτω σχήμα.

α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $A\Gamma H$  και  $ABE$  είναι ισόπλευρα.

β. Να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο  $AEH$  είναι ίσο με το αρχικό τρίγωνο  $AB\Gamma$ .

γ. Το τμήμα  $BE$  είναι παράλληλο στο τμήμα  $\Gamma H$ ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



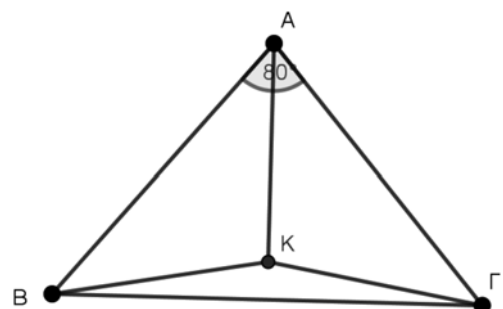
### 82 Θέμα 4 - 13002

Στο ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  του σχήματος έχουμε  $AB = A\Gamma$  και  $\hat{A} = 80^\circ$ . Το σημείο  $K$  είναι πάνω στη διχοτόμο της γωνίας  $A$  και τέτοιο ώστε  $KA = KB = K\Gamma$ .

α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $BKA$  και  $\Gamma KA$  είναι ίσα.

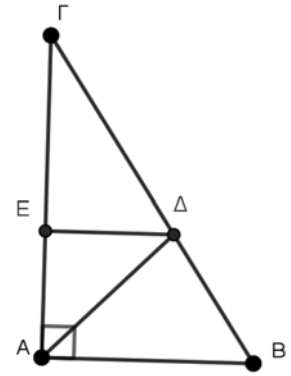
β. Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\hat{BK}$  και  $\hat{\Gamma K}$ .

γ. Να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{BK\Gamma}$ .



**83 Θέμα 4 - 13285**

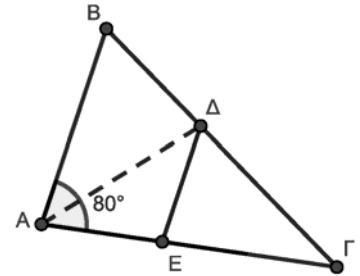
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και η διχοτόμος  $A\Delta$  της γωνίας  $\hat{A}$ . Από το σημείο  $\Delta$  φέρουμε παράλληλη προς την  $AB$  που τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $E$ .



- α.** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $E\Delta\Gamma$  είναι ορθογώνιο.
- β.** Να υπολογίσετε την  $A\hat{\Delta}E$ .
- γ.** Αν η γωνία  $\hat{B}$  είναι  $20^\circ$  μεγαλύτερη από τη γωνία  $\hat{\Gamma}$ , να υπολογίσετε τη γωνία  $E\hat{\Delta}\Gamma$ .

**84 Θέμα 4 - 13286**

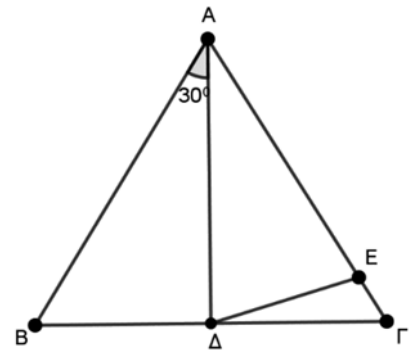
Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  δίνεται ότι  $\hat{A} = 80^\circ$  και  $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$ . Φέρουμε τη διχοτόμο  $A\Delta$  της γωνίας  $\hat{A}$ .



- α.** Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$  του τριγώνου.
- β.** Αν η παράλληλη στην  $AB$  από το σημείο  $\Delta$  τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $E$ , τότε:
  - i.** Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $\Delta E\Gamma$ .
  - ii.** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $A E \Delta$  είναι ισοσκελές.

**85 Θέμα 4 - 12697**

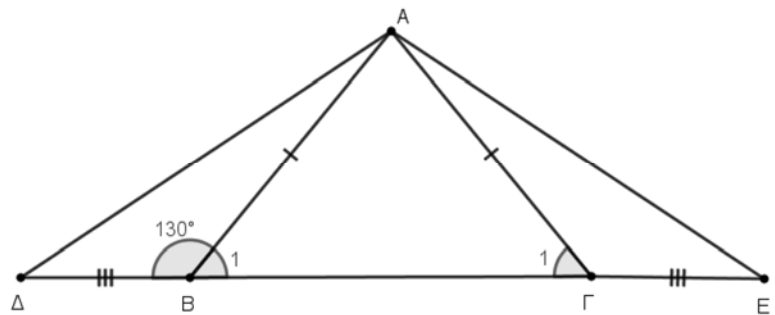
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και η διάμεσος του  $A\Delta$  τέτοια, ώστε  $B\hat{A}\Delta = 30^\circ$ . Θεωρούμε σημείο  $E$  στην  $A\Gamma$  τέτοιο, ώστε  $A\Delta = AE$ .



- α.** Να υπολογίσετε τη γωνία  $\Delta A\Gamma$ .
- β.** Να αιτιολογήσετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισόπλευρο.
- γ.** Να υπολογίσετε τη γωνία  $E\Delta\Gamma$ .

**86 Θέμα 4 - 12360**

Σε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) προεκτείνουμε την  $B\Gamma$  προς το μέρος του  $B$  και προς το μέρος του  $\Gamma$  κατά ίσα τμήματα  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  αντίστοιχα.



- α.** Αν  $B_{\text{εξωτ}} = 130^\circ$ , τότε:
  - i.** Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
  - ii.** Να αποδείξετε ότι  $A\Delta = AE$ .
- β.** Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις των σημείων  $B$  και  $\Gamma$  από τις  $A\Delta$  και  $A E$  αντίστοιχα, είναι ίσες.

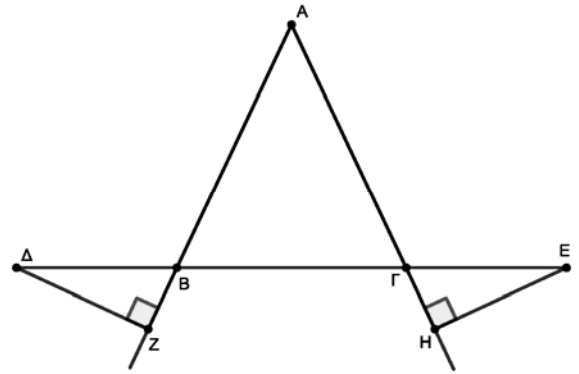
### 87 Θέμα 4 - 12458

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και σημεία  $\Delta$  και  $E$  στις προεκτάσεις της  $B\Gamma$  προς το  $B$  και το  $\Gamma$ , τέτοια ώστε  $B\Delta = \Gamma E$ . Έστω ότι  $\Delta Z \perp AB$  και  $E\text{H} \perp A\Gamma$ .

**α.** Να αποδείξετε ότι:

- i.**  $BZ = \Gamma H$
- ii.** Το τρίγωνο  $AZH$  είναι ισοσκελές.

**β.** Αν  $\hat{A} = 50^\circ$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AZH$ .



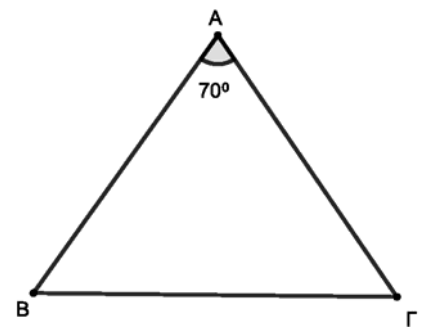
### 88 Θέμα 4 - 13448

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) με γωνία κορυφής  $\hat{A} = 70^\circ$ .

**α.** Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι οι άλλες δυο γωνίες  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι ίσες με  $55^\circ$ . Είναι ο ισχυρισμός του σωστός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**β.** Αν  $E$  και  $Z$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- i.** Το τρίγωνο  $AEZ$  είναι ισοσκελές με  $\hat{A}\hat{E}Z = \hat{A}\hat{Z}E = 55^\circ$ .
- ii.** Η πλευρά  $EZ$  του τριγώνου  $AEZ$  είναι παράλληλη στην πλευρά  $B\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .



### 89 Θέμα 4 - 13501

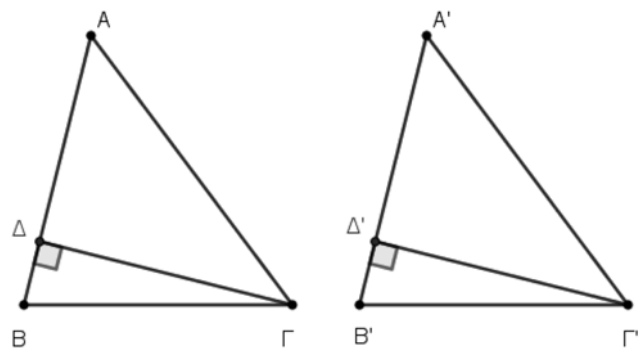
Δίνονται τα οξυγώνια τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  με ίσα ύψη  $\Gamma\Delta = \Gamma'\Delta'$  και  $\hat{B} = \hat{B}'$ .

**α.** Να αποδείξετε ότι  $B\Gamma = B'\Gamma'$

**β.** Αν επιπλέον  $\hat{A} = \hat{A}'$ , να αποδείξετε:

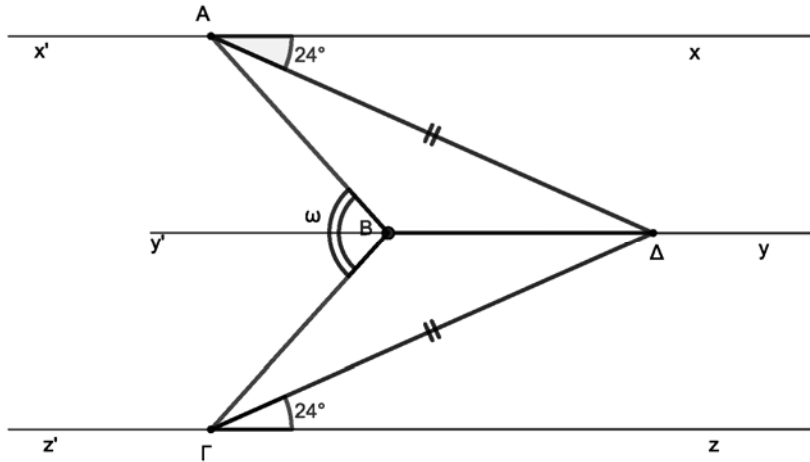
- i.**  $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$
- ii.** Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  είναι ίσα

**γ.** Αν επιπλέον στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  το ίχνος  $\Delta$  του ύψους του  $\Gamma\Delta$  είναι το μέσο της πλευράς  $AB$ , ποιο είναι το είδος του τριγώνου  $AB\Gamma$  ως προς τις πλευρές του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



**90 Θέμα 4 - 12975**

Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες  $x'x$ ,  $y'y$  και  $z'z$  είναι παράλληλες. Για τις γωνίες  $\widehat{x\Delta A}$  και  $\widehat{z\Gamma\Delta}$  ισχύει ότι  $\widehat{x\Delta A} = \widehat{z\Gamma\Delta} = 24^\circ$ . Τα τμήματα  $A\Delta$  και  $\Gamma\Delta$  είναι ίσα.

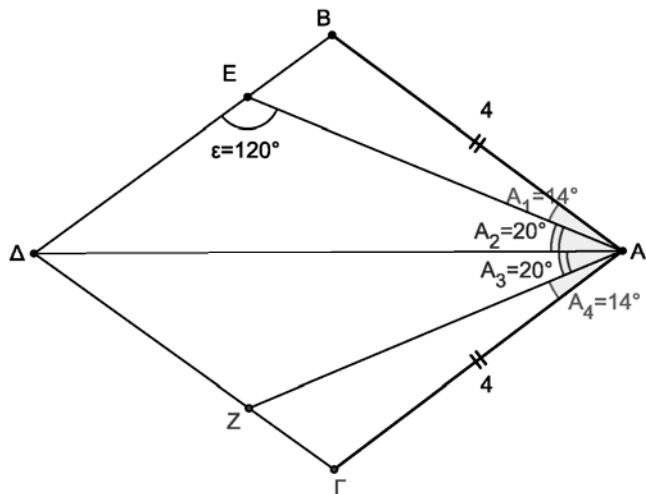


- α.** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $\Gamma B\Delta$  είναι ίσα.
- β.** Αν τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $\Gamma B\Delta$  είναι ισοσκελή με βάσεις  $A\Delta$  και  $\Gamma\Delta$  αντίστοιχα, να υπολογίσετε:
  - i.** Τις γωνίες των τριγώνων  $AB\Delta$  και  $\Gamma B\Delta$ .
  - ii.** Τη γωνία  $\hat{\omega}$ .

**91 Θέμα 4 - 12969**

Στο παρακάτω σχήμα είναι  $\widehat{A_1} = \widehat{A_4} = 14^\circ$ ,  $\widehat{A_2} = \widehat{A_3} = 20^\circ$ , και  $AB = A\Gamma = 4$ .

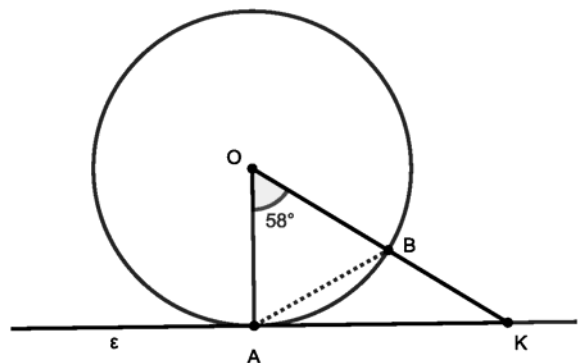
- α.** Να αποδείξετε ότι:
  - i.** Τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Gamma\Delta$  είναι ίσα.
  - ii.** Οι γωνίες  $\widehat{B\Delta A}$  και  $\widehat{\Gamma\Delta A}$  είναι ίσες.
- β.** Να αποδείξετε ότι  $\Delta E = \Delta Z$ .
- γ.** Αν για τη γωνία  $\hat{\epsilon}$  ισχύει ότι  $\hat{\epsilon} = 120^\circ$ , να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{B}$ .



**92 Θέμα 4 - 12466**

Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται κύκλος με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho$ . Η ευθεία  $\epsilon$  είναι η εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο  $A$ , και η προέκταση της ακτίνας  $OB$  τέμνει την ευθεία  $\epsilon$  στο  $K$ .

- α.** Αν η γωνία  $\hat{O}$  είναι  $58^\circ$ :
  - i.** Να υπολογίσετε τη γωνία  $\widehat{OBA}$ .
  - ii.** Να υπολογίσετε καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου  $ABK$ .
- β.** Πόσες μοίρες έπρεπε να είχαμε σχεδιάσει τη γωνία  $\hat{O}$  ώστε η χορδή  $AB$  να είναι ίση με την ακτίνα  $\rho$ ;

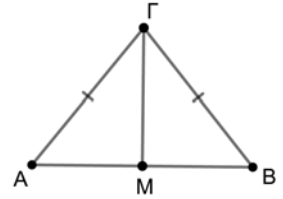




### 93 Θέμα 4 - 12660

Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει  $AG = BG$ , η  $GM$  είναι διάμεσος της  $AB$ , το  $BM = 3$  και η γωνία  $\widehat{A\Gamma M}$  είναι ίση με  $33^\circ$ .

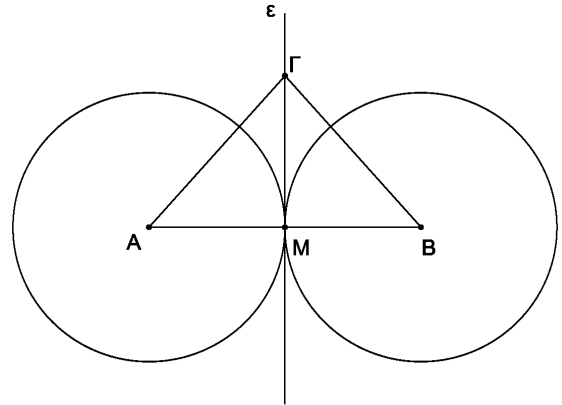
- Να υπολογίσετε το μήκος της  $AB$ .
- Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- Αν δεν σας δίνεται ότι  $\widehat{A\Gamma M} = 33^\circ$  αλλά, αντί για αυτό, έχετε ότι  $AG = 6$ , τότε να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ .



### 94 Θέμα 4 - 13531

Δύο ίσοι κύκλοι  $(A, \rho)$  και  $(B, \rho)$  εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο  $M$ . Στην κοινή εφαπτομένη  $\varepsilon$  των κύκλων στο σημείο  $M$  παίρνουμε ένα σημείο  $\Gamma$ , διαφορετικό του  $M$ .

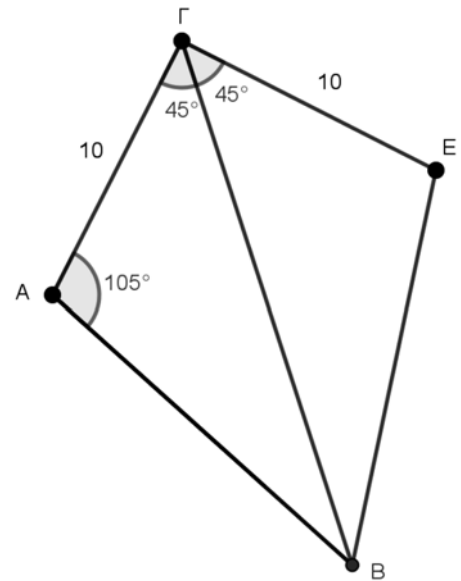
- Πόσων μοιρών είναι η γωνία  $\widehat{A\Gamma B}$ ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
- Να αποδείξετε ότι  $AG = BG$ .
- Πόσων μοιρών πρέπει να είναι η γωνία  $\widehat{M\Gamma A}$ , ώστε η  $AG$  να είναι κάθετη στη  $B\Gamma$ ;



### 95 Θέμα 4 - 13292

Στο παρακάτω σχήμα τα τμήματα  $GA$  και  $GE$  είναι ίσα με 10 και η γωνία  $\widehat{A}$  είναι ίση με  $105^\circ$ . Επιπλέον δίνεται ότι,  $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{B\Gamma E} = 45^\circ$ .

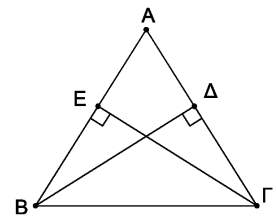
- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AGB$  και  $EGB$  είναι ίσα.
- Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία  $\widehat{ABE}$ .
- Να βρείτε το είδος του τριγώνου  $ABE$ .



### 96 Θέμα 4 - 13440

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και τα ύψη του  $B\Delta$  και  $\Gamma E$ .

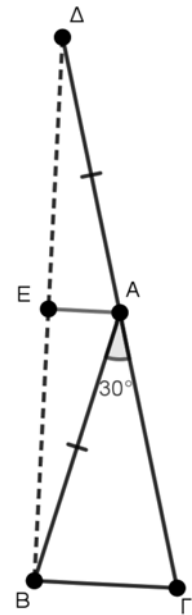
- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $B\Delta\Gamma$  και  $\Gamma E B$  είναι ίσα.
- Να δικαιολογήσετε γιατί  $B\Delta = \Gamma E$ .
- Αν τα ύψη  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  του τριγώνου είναι και διάμεσοι, να αποδείξετε ότι  $\widehat{A} = 60^\circ$ .



**97 Θέμα 4 - 13289**

Στο σχήμα που ακολουθεί το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $AB = A\Gamma$  και  $\hat{A} = 30^\circ$ .

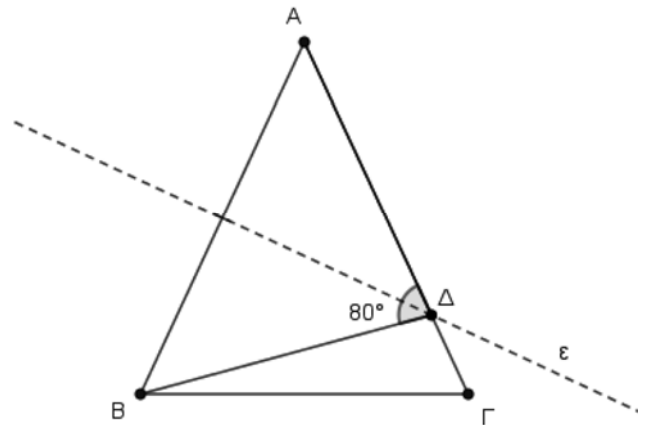
- α.** Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- β.** Προεκτείνουμε την  $\Gamma A$  προς το μέρος του  $A$  και παίρνουμε τμήμα  $A\Delta = AB$ . Να μεταφέρετε στην κόλλα σας συμπληρωμένη την πρόταση που ακολουθεί και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.  
 «Στο τρίγωνο  $\Gamma B\Delta$  το τμήμα  $BA$  είναι ..... που αντιστοιχεί στην πλευρά  $\Delta\Gamma$ ».
- γ.** Αν το τμήμα  $AE$  είναι παράλληλο προς την πλευρά  $B\Gamma$  και τέμνει τη  $\Delta B$  στο  $E$ , τότε:
  - i.** Να υπολογίσετε καθεμία από τις γωνίες  $B\hat{A}E$  και  $E\hat{A}\Delta$ .
  - ii.** Να δικαιολογήσετε γιατί το  $AE$  είναι κάθετο στο τμήμα  $\Delta B$ .



**98 Θέμα 4 - 13447**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  στο οποίο η μεσοκάθετος ( $\epsilon$ ) της πλευράς του  $AB$  τέμνει την πλευρά του  $A\Gamma$  σε εσωτερικό της σημείο  $\Delta$ . Αν η γωνία  $A\hat{\Delta}B$  είναι ίση με  $80^\circ$ , τότε να αποδείξετε ότι:

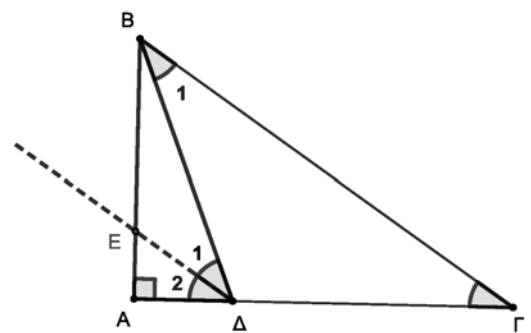
- α. i.** Το τρίγωνο  $A\Delta B$  είναι ισοσκελές με  $\Delta A = \Delta B$ .
- ii.**  $\hat{A} = 50^\circ$ .
- β.** Αν είναι  $\Delta B\hat{\Gamma} = 15^\circ$ , τότε το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές.



**99 Θέμα 4 - 13449**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $A\Delta B$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και η διχοτόμος της γωνίας του  $A\hat{\Delta}B$  η οποία τέμνει την  $AB$  σε σημείο  $E$ . Στην προέκταση της  $A\Delta$  (προς το  $\Delta$ ) θεωρούμε σημείο  $\Gamma$  τέτοιο ώστε  $\Delta\Gamma = \Delta B$ .

- α.** Να αποδείξετε ότι:
  - i.**  $B\hat{1} = \hat{\Gamma}$ .
  - ii.**  $\Delta\hat{1} = \hat{\Gamma}$ .
  - iii.** Η διχοτόμος της γωνίας  $A\hat{\Delta}B$  είναι παράλληλη στο τμήμα  $B\Gamma$ .
- β.** Αν  $A\hat{\Delta}B = 70^\circ$  να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

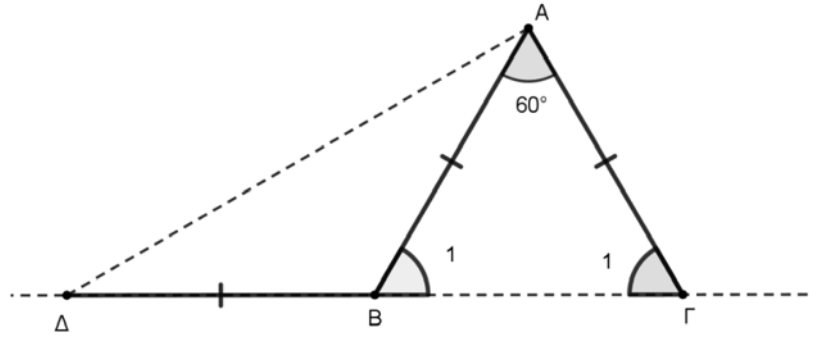


### 100 Θέμα 4 - 13689

Στο παρακάτω σχήμα, τα σημεία Δ, Β και Γ βρίσκονται στην ίδια ευθεία, τα τμήματα ΒΔ, ΑΒ και ΑΓ είναι ίσα και  $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 60^\circ$ .

Να αποδείξετε ότι:

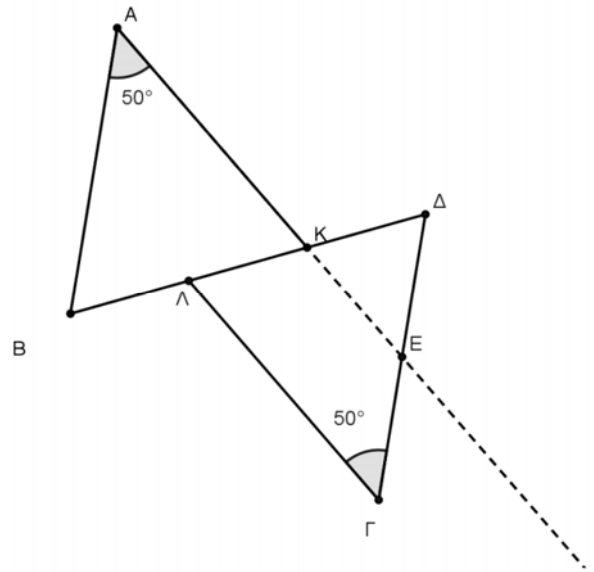
- $\widehat{B_1} = \widehat{\Gamma_1} = 60^\circ$  και  $\widehat{A\hat{B}\Delta} = 120^\circ$ .
- το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ορθογώνιο.
- το τμήμα ΑΒ είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΔΑΓ.



### 101 Θέμα 4 - 13694

Τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ είναι ισοσκελή και ίσα με  $ΑΒ = ΓΔ = ΑΚ = ΓΛ$  και  $\widehat{A} = \widehat{\Gamma} = 50^\circ$ .

- Να αποδείξετε ότι  $ΑΒ // ΓΔ$ .
- Αν η προέκταση της ΑΚ (προς το Κ) τέμνει την ΓΔ σε σημείο Ε, να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ΚΔΕ ως προς τις πλευρές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- Τι θα αλλάζατε ή θα τροποποιούσατε στα δεδομένα ώστε το τρίγωνο ΚΔΕ να είναι ισόπλευρο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



### 102 Θέμα 4 - 13792

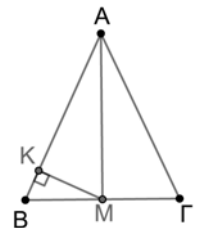
Σε τρίγωνο ΑΒΓ γνωρίζουμε ότι:  $\widehat{A_{εξ}} = 130^\circ$  και  $\widehat{B} = 60^\circ$ .

- Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\widehat{A}$  και  $\widehat{\Gamma}$  του τριγώνου ΑΒΓ.
- Έστω ΒΕ και ΓΖ οι διχοτόμοι των γωνιών  $\widehat{B}$  και  $\widehat{\Gamma}$  αντίστοιχα που τέμνονται στο σημείο Ο. Να υπολογίσετε τη γωνία  $\widehat{B\hat{O}\Gamma}$ .

### 103 Θέμα 4 - 13820

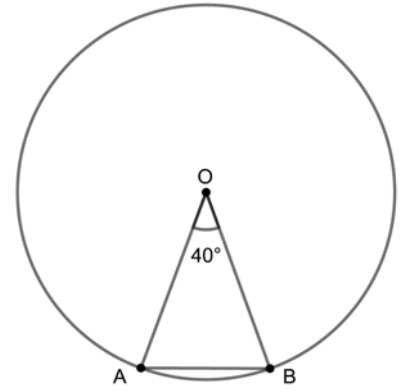
Θεωρούμε το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ( $ΑΒ = ΑΓ$ ) και το μέσο Μ της βάσης του ΒΓ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Επίσης η ΜΚ είναι κάθετη στην ΑΒ.

- Να αιτιολογήσετε ότι η  $\widehat{B}$  είναι συμπληρωματική της  $\widehat{B\hat{M}\text{K}}$ .
- Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΜ στην περίπτωση που  $\widehat{B\hat{M}\text{K}} = 20^\circ$ .
- Ποια γωνία του τριγώνου ΑΒΜ του σχήματος είναι ίση με τη γωνία  $\widehat{B\hat{M}\text{K}}$ ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή που δώσατε.



**104 Θέμα 4 - 13674**

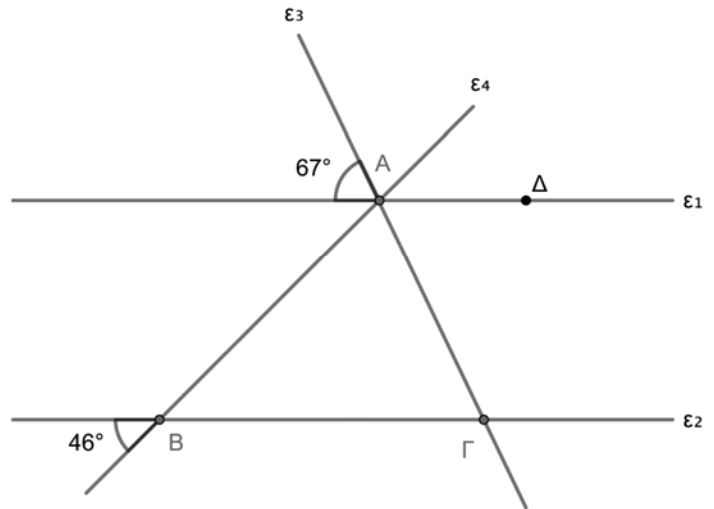
Σε κύκλο με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $R$  θεωρούμε σημεία  $A$  και  $B$  ώστε  $\widehat{AOB} = 40^\circ$ .



- α.** Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\widehat{A}$  και  $\widehat{B}$  του τριγώνου  $OAB$ .
- β.** Προεκτείνουμε τις ακτίνες  $OA$  και  $OB$  κατά τμήματα  $A\Gamma$  και  $B\Delta$  αντίστοιχα έτσι ώστε  $A\Gamma = OA$  και  $B\Delta = OB$ .
  - i.** Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\widehat{O\Gamma\Delta}$  και  $\widehat{O\Delta\Gamma}$ .
  - ii.** Να αποδείξετε ότι  $AB \parallel \Gamma\Delta$ .
- γ.** Αν προεκτείνουμε τις ακτίνες  $OA$  και  $OB$  κατά τμήματα  $A\Gamma$  και  $B\Delta$  αντίστοιχα έτσι ώστε  $A\Gamma = 2OA$  και  $B\Delta = 2OB$ , τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι  $AB \parallel \Gamma\Delta$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**105 Θέμα 4 - 13652**

Θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  οι οποίες τέμνονται από τις ευθείες  $\epsilon_3$  και  $\epsilon_4$  στα σημεία  $A, B$  και  $\Gamma$  όπως φαίνεται στο σχήμα.

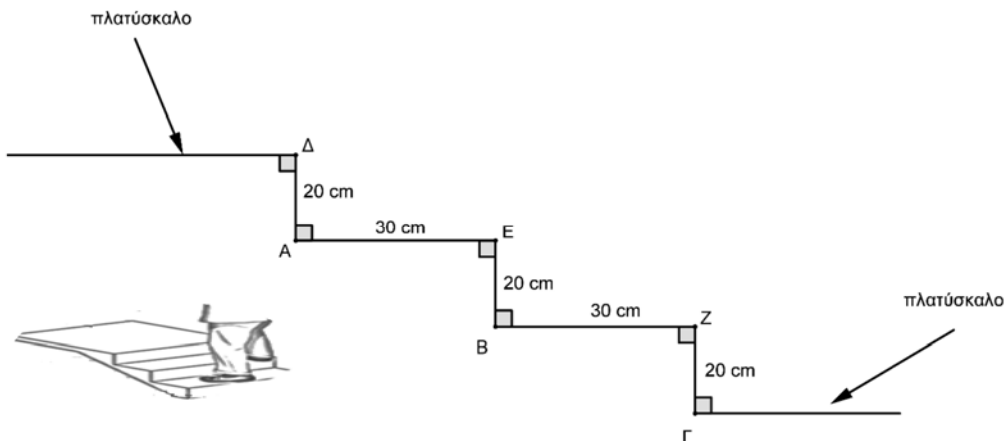


- α.** Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- β.** Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου  $AB\Gamma$  ως προς τις πλευρές του και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
- γ. i.** Να υπολογίσετε τη γωνία  $\widehat{\Gamma\Delta A}$ .
- ii.** Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι «η  $A\Gamma$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{B\Delta A}$ ». Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

**106 Θέμα 4 - 13692**

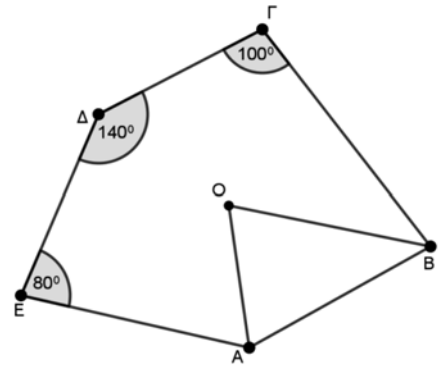
Το παρακάτω σχήμα αναπαριστά την πλάγια όψη τμήματος σκάλας. Λαμβάνοντας υπόψη τις πληροφορίες του σχήματος, δηλαδή  $\Delta A = EB = Z\Gamma = 20\text{ cm}$ ,  $AE = BZ = 30\text{ cm}$  και οι γωνίες  $\widehat{\Delta} = \widehat{A} = \widehat{E} = \widehat{B} = \widehat{Z} = \widehat{\Gamma} = 90^\circ$ , να αποδείξετε ότι:

- α.** τα σημεία  $A$  και  $\Gamma$  απέχουν το ίδιο από το σημείο  $B$ .
- β.** τα σημεία  $A, B$  και  $\Gamma$  βρίσκονται στην ίδια ευθεία.



### 107 Θέμα 4 - 12701

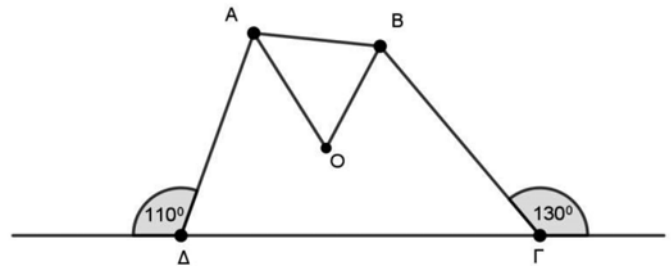
Στο κυρτό πολύγωνο ΑΒΓΔΕ, οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο. Αν η γωνία του Γ ισούται με  $100^\circ$ , η γωνία του Δ ισούται με  $140^\circ$  και η γωνία του Ε ισούται με  $80^\circ$  τότε, να υπολογίσετε:



- σε μοίρες, το μέτρο του αθροίσματος  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} + \hat{E}$ .
- σε μοίρες, το μέτρο του αθροίσματος  $\hat{A} + \hat{B}$ .
- σε μοίρες, το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ.

### 108 Θέμα 4 - 12700

Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ η εξωτερική γωνία της Γ ισούται με  $130^\circ$  και η εξωτερική γωνία της Δ ισούται με  $110^\circ$ . Αν οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο, τότε να υπολογίσετε:

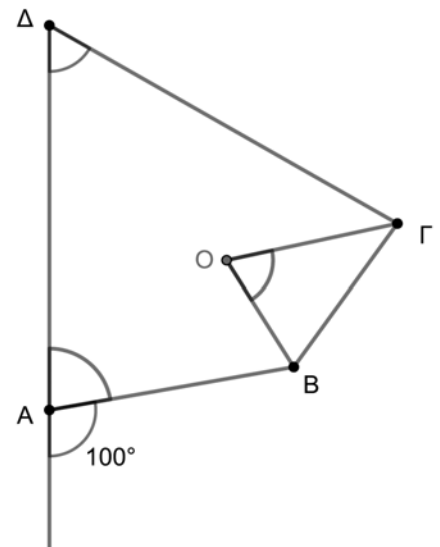


- τα μέτρα των γωνιών Γ και Δ του τετραπλεύρου.
- το μέτρο του αθροίσματος  $\hat{A} + \hat{B}$ .
- το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ.

### 109 Θέμα 4 - 13675

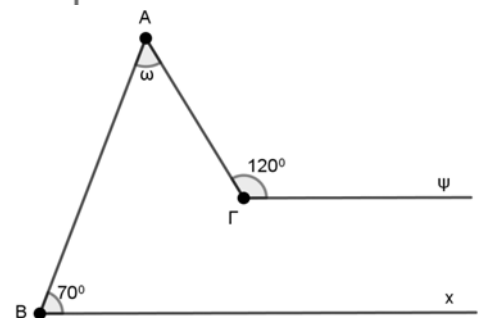
Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι  $\hat{A}_{εξ} = 100^\circ$  και  $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 220^\circ$ . Αν οι διχοτόμοι των γωνιών  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$  τέμνονται στο Ο, τότε:

- Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\hat{A}$  και  $\hat{\Delta}$  του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.
- Να υπολογίσετε τη γωνία ΒΟΓ του τριγώνου ΒΟΓ.
- Πόσες μοίρες πρέπει να είναι καθεμιά από τις γωνίες  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$  έτσι ώστε  $A\Delta \parallel B\Gamma$ ;



### 110 Θέμα 4 - 17334

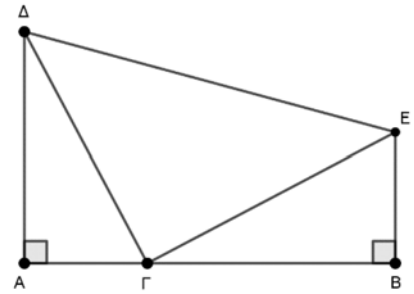
Στο διπλανό σχήμα, οι ημιευθείες Βx και Γψ είναι παράλληλες. Επιπλέον η γωνία ΑΒx ισούται με  $70^\circ$  και η γωνία ΑΓψ ισούται με  $120^\circ$ . Αν η προέκταση της Γψ προς το Γ, τέμνει την ΑΒ στο Δ και η προέκταση της ΑΓ προς το Α τέμνει την Βx στο Ε να υπολογίσετε με πόσες μοίρες ισούται:



- Η γωνία Γεx .
- Η γωνία ω .
- Η γωνία ΓΔΒ .

**111 Θέμα 4 - 12839**

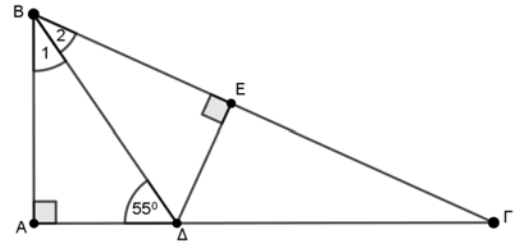
Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  είναι ορθές και επιπλέον  $AD = BG$  και  $AG = BE$ .



- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $\triangle AG\Delta$  και  $\triangle BGE$  είναι ίσα.
- β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $\triangle G\Delta E$  είναι ισοσκελές.
- γ. Αν  $\hat{EGB} = 40^\circ$ , τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $\triangle G\Delta E$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

**112 Θέμα 4 - 12838**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$  (με  $\hat{A} = 90^\circ$ ). Η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B}$  τέμνει την πλευρά  $AG$  στο σημείο  $\Delta$ , ώστε η γωνία  $\triangle A\Delta B$  να ισούται με  $55^\circ$ . Από το  $\Delta$  φέρνουμε τμήμα  $\Delta E$  κάθετο στην πλευρά  $B\Gamma$ .



- α. Να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{B}_1$ .
- β. Να αποδείξετε ότι  $AB = BE$ .
- γ. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $\triangle G\Delta E$ .