ΛΥΣΕΙΣ

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

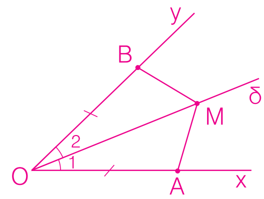
Μπάρλας ΕΚΔΟΣΕΙΣ

ΘΕΜΑΤΑ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

6. Στοιχεία και είδη τριγώνων – Κριτήρια ισότητας τριγώνων

Θέμα 2

1 Θέμα 1627



α. Τα τρίγωνα OMA, OMB έχουν:
- $OA = OB$
- OM κοινή
- $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

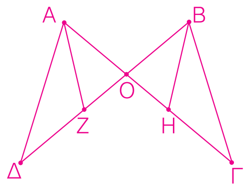
Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα $MA = MB$.

β. Επειδή τα τρίγωνα OMA, OMB είναι ίσα, προκύπτει $O\hat{M}A = O\hat{M}B$. Οπότε η $O\delta$ είναι η διχοτόμος της $A\hat{M}B$.

2 Θέμα 1674

α. Είναι $O\Gamma = A\Gamma - OA = B\Delta - OB = O\Delta$.

Τα τρίγωνα $OA\Delta$, $OB\Gamma$ έχουν:



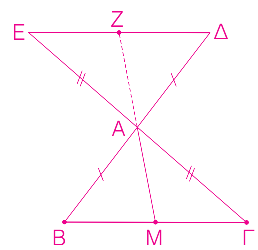
- $OA = OB$
- $O\Delta = O\Gamma$
- $A\hat{O}\Delta = B\hat{O}\Gamma$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα $A\hat{\Delta}O = B\hat{\Gamma}O$.

β. Τα τρίγωνα OAZ, OBH, έχουν:
- $OA = OB$
- $OZ = OH$
- $A\hat{O}Z = B\hat{O}H$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα $AZ = BH$.

3 Θέμα 1598



α. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $A\Delta E$ έχουν:
- $AB = A\Delta$
- $A\Gamma = AE$
- $B\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}E$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. i. Τα τρίγωνα $A\Delta Z$, ABM, έχουν:
- $A\Delta = AB$
- $\hat{\Delta} = \hat{B}$
- $\Delta\hat{A}Z = B\hat{A}M$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

ii. Επειδή τα τρίγωνα ABM και $A\Delta Z$ είναι ίσα έχουμε $Z\Delta = BM = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{E\Delta}{2}$.

4 Θέμα 1592

α. Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$, είναι ισοσκελές $(AB = A\Gamma)$, προκύπτει ότι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$,

οπότε και $\hat{B}_{εξ} = \hat{\Gamma}_{εξ}$, ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών.

β. Τα τρίγωνα $AB\Delta$, $A\Gamma E$, έχουν:

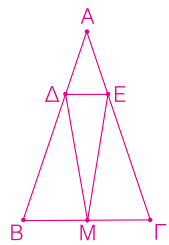
- $AB = A\Gamma$
- $B\Delta = \Gamma E$
- $\hat{B}_{εξ} = \hat{\Gamma}_{εξ}$.

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

γ. Είναι $BM = M\Gamma$ και $B\Delta = \Gamma E$ οπότε $BM + B\Delta = M\Gamma + \Gamma E \Rightarrow M\Delta = ME$.

Άρα AM διάμεσος του τριγώνου $A\Delta E$.

5 Θέμα 1621



- Είναι $B\Delta = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3}A\Gamma = \Gamma E$.
- Τα τρίγωνα $B\Delta M$, $ME\Gamma$ έχουν:
  - $MB = M\Gamma$
  - $B\Delta = \Gamma E$
  - $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα $M\Delta = ME$, οπότε το τρίγωνο ΔEM είναι ισοσκελές.

6 Θέμα 1632

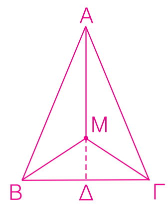
α. Τα τρίγωνα $OA\Gamma$ και $OB\Delta$ έχουν:

- $OA = OB$
- $O\Gamma = O\Delta$
- $A\hat{O}\Gamma = B\hat{O}\Delta$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα $A\Gamma = B\Delta$.

β. Επειδή το τρίγωνο $BO\Delta$ είναι ισοσκελές και η OM είναι διχοτόμος, θα είναι και διάμεσος. Άρα το M είναι το μέσο της $B\Delta$.

7 Θέμα 1601



α. Τα τρίγωνα AMB, $AM\Gamma$ έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- $MB = M\Gamma$
- AM κοινή

Οπότε είναι ίσα (ΠΠΠ).

β. Έστω ότι η AM τέμνει την $B\Gamma$ στο Δ. Επειδή τα τρίγωνα AMB, $AM\Gamma$ είναι ίσα, προκύπτει ότι $B\widehat{M}A = \Gamma\widehat{M}A$.

Οπότε και $B\widehat{M}\Delta = \Gamma\widehat{M}\Delta$, άρα η ευθεία AM διχοτομεί τη $B\widehat{M}\Gamma$.

8 Θέμα 1660

α. Επειδή το M είναι το μέσο της $B\Gamma$ και $B\Gamma = 2BE \Leftrightarrow BE = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow BE = BM$, έχουμε $B\hat{E}M = B\widehat{M}E$.

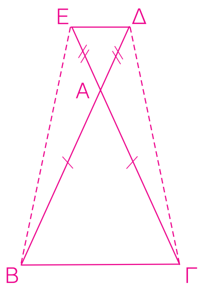
Επομένως $A\hat{E}B = E\widehat{M}\Gamma$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών.

β. Τα τρίγωνα ABE, $E\Gamma M$ έχουν:

- $ME = AE$
- $EB = M\Gamma$
- $A\hat{E}B = E\widehat{M}\Gamma$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα $AB = E\Gamma$.

9 Θέμα 1648



α. Είναι $BE = AB + AE = A\Gamma + A\Delta = \Gamma\Delta$.

β. Τα τρίγωνα $BA\Delta$ και ΓAE έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- $A\Delta = AE$
- $\Delta\hat{A}B = E\hat{A}\Gamma$

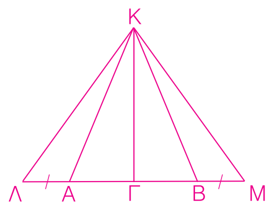
Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα $B\Delta = \Gamma E$.

γ. Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, έχουμε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Επειδή τα τρίγωνα $BA\Delta$, ΓAE είναι ίσα, έχουμε $\Delta\hat{B}A = E\hat{\Gamma}A$.

Επομένως $\Delta\hat{B}\Gamma = E\hat{\Gamma}B$, ως αθροίσματα ίσων γωνιών.

10 Θέμα 1622



α. Τα τρίγωνα $KA\Lambda$, KBM έχουν:

- $KA = KB$
- $A\Lambda = BM$
- $K\hat{A}\Lambda = K\hat{B}M$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ του ισοσκελούς τριγώνου KAB. Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $K\Lambda = KM$.

Επομένως το τρίγωνο $K\Lambda M$ είναι ισοσκελές.

β. Επειδή το τρίγωνο KAB είναι ισοσκελές η διχοτόμος του $K\Gamma$ είναι και διάμεσος, οπότε $\Gamma A = \Gamma B$.

Οπότε $\Lambda\Gamma = \Lambda A + A\Gamma = BM + \Gamma B = M\Gamma$. Άρα η $K\Gamma$ είναι διάμεσος του τριγώνου $K\Lambda M$.

11 Θέμα 1591

α. Τα τρίγωνα BAK, $KA\Gamma$, έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- $KB = K\Gamma$
- AK κοινή

Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ).

β. Επειδή τα τρίγωνα BAK, $KA\Gamma$ είναι ίσα, έχουμε $B\hat{A}K = K\hat{A}\Gamma$.

Οπότε η AK είναι διχοτόμος της $B\hat{A}\Gamma$.

γ. Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, η διχοτόμος του AK θα είναι και διάμεσος.
Άρα το E είναι το μέσο του $B\Gamma$, οπότε η KE είναι διάμεσος του τριγώνου $BK\Gamma$.

12 Θέμα 1624

α. Είναι $ΒΑ = ΒΓ$ και $ΔΑ = ΔΓ$, οπότε τα τρίγωνα $ΒΑΓ$ και $ΔΑΓ$ είναι ισοσκελή.

Τα $ΒΚ$, $ΔΚ$ είναι ύψη στα ισοσκελή τρίγωνα, οπότε θα είναι και διχοτόμοι.

Επομένως η $ΒΔ$ είναι διχοτόμος των γωνιών $\hat{Β}$ και $\hat{Δ}$.

β. Είναι $ΒΑ = ΒΓ$ και $ΔΑ = ΔΓ$, οπότε τα σημεία $Β$ και $Δ$ ισαπέχουν από τα $Α$ και $Γ$.

Άρα τα $Β$ και $Δ$ ανήκουν στη μεσοκάθετο του $ΑΓ$.

Οπότε η ευθεία $ΒΔ$ είναι η μεσοκάθετος του $ΑΓ$.

13 Θέμα 1587

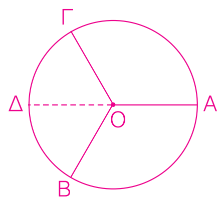
α. Τα τρίγωνα $ΑΕΒ$, $ΑΕΓ$ έχουν :
- $ΑΒ = ΑΓ$
- $ΑΕ$ κοινή
- $\hat{δ} = \hat{γ}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Επειδή τα τρίγωνα $ΑΕΒ$, $ΑΕΓ$ είναι ίσα, έχουμε $ΕΒ = ΕΓ$. Άρα το τρίγωνο $ΓΕΒ$ είναι ισοσκελές.

γ. Επειδή $ΑΒ = ΑΓ$ και $ΕΒ = ΕΓ$, η ευθεία $ΑΔ$ είναι η μεσοκάθετος του τμήματος $ΒΓ$.

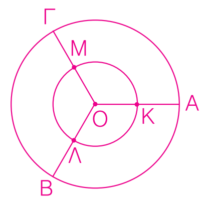
14 Θέμα 1588



α. Έστω $Δ$ το σημείο που η προέκταση της $ΑΟ$ τέμνει τον κύκλο.

Είναι $Γ\hat{Ο}Δ = 180^{\circ} - Α\hat{Ο}Γ = 180^{\circ} - Α\hat{Ο}Β = Β\hat{Ο}Δ$.

Οπότε η $ΟΑ$ διχοτομεί τη γωνία $Β\hat{Ο}Γ$.



β. Επειδή $Α\hat{Ο}Β = Β\hat{Ο}Γ = Γ\hat{Ο}Α$, έχουμε $\overset{\frown}{ΑΒ} = \overset{\frown}{ΒΓ} = \overset{\frown}{ΓΑ}$, οπότε $ΑΒ = ΒΓ = ΓΑ$.
Άρα το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισόπλευρο.

γ. Τα τόξα $\overset{\frown}{ΚΜ}$ και $\overset{\frown}{ΑΒ}$ έχουν το ίδιο μέτρο, αλλά δεν είναι τόξα του ίδιου κύκλου ή ίσων κύκλων. Οπότε δεν είναι ίσα.

Θέμα 4

15 Θέμα 1846

α. Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$, $ΑΔΕ$ έχουν:
- $ΑΓ = ΑΕ$
- $ΑΒ = ΑΔ$
- $\hat{Α}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα $ΒΓ = ΔΕ$.

β. Επειδή τα τρίγωνα $ΑΒΓ$, $ΑΔΕ$ είναι ίσα, έχουμε:
- $Β\hat{Ε}Κ = Δ\hat{Γ}Κ$
- $Α\hat{Β}Κ = Α\hat{Δ}Κ$

Οπότε $Ε\hat{Β}Κ = Γ\hat{Δ}Κ$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών.
Τα τρίγωνα $ΒΕΚ$ και $ΔΓΚ$ έχουν:
- $ΒΕ = ΔΓ$ ως διαφορές ίσων τμημάτων
- $Β\hat{Ε}Κ = Δ\hat{Γ}Κ$
- $Ε\hat{Β}Κ = Γ\hat{Δ}Κ$

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ). Άρα $ΒΚ = ΚΔ$.

γ. Τα τρίγωνα $AB K$, $A\Delta K$ έχουν:
- $AB = A\Delta$
- $BK = K\Delta$
- AK κοινή

Οπότε είναι ίσα (ΠΠΠ). Άρα $B\widehat{A}K = \Delta\widehat{A}K$.

Επομένως η AK είναι διχοτόμος της $\widehat{A}$.

δ. Στο ισοσκελές τρίγωνο $AE\Gamma$ η AM είναι διχοτόμος, οπότε είναι διάμεσος και ύψος.
Άρα η AM είμαι μεσοκάθετος της $E\Gamma$.

16 Θέμα 1725

α. Τα τρίγωνα $OA\Lambda$, OBK, έχουν:
- $O\Lambda = OK \ (= \rho_1)$
- $OA = OB \ (= \rho_2)$
- $\widehat{O}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

Άρα $A\Lambda = BK$.

β. Τα τρίγωνα ΟΑΛ και ΟΒΚ είναι ίσα, οπότε $O\widehat{A}\Lambda = O\widehat{B}K$ και $O\widehat{K}B = O\widehat{\Lambda}A$.
Τα τρίγωνα PKA, $P\Lambda B$ έχουν:
- $KA = \Lambda B$, ως διαφορές ίσων τμημάτων
- $K\widehat{A}P = P\widehat{B}\Lambda$
- $A\widehat{K}P = B\widehat{\Lambda}P$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $O\widehat{K}P$ και $O\widehat{\Lambda}P$

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ), άρα $PA = PB$.

Επομένως το τρίγωνο APB είναι ισοσκελές.

γ. Τα τρίγωνα OPK, $OP\Lambda$ έχουν:
- $OK = O\Lambda$
- OP κοινή
- $KP = P\Lambda$ (αφού τα τρίγωνα PKA, $P\Lambda B$ είναι ίσα).

Οπότε είναι ίσα (ΠΠΠ), άρα $K\widehat{O}P = P\widehat{O}\Lambda$.

Επομένως η OP είναι η διχοτόμος της γωνίας $x\widehat{O}y$.

17 Θέμα 1582

α. Τα τρίγωνα $AB\Delta$, $A\Gamma\Delta$ έχουν:
- $AB = A\Gamma$
- $A\Delta$ κοινή
- $B\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$, ως αθροίσματα ίσων γωνιών.

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Τα τρίγωνα ΔEA, ΔZA έχουν:
- $A\Delta$ κοινή
- $E\widehat{A}\Delta = Z\widehat{A}\Delta$
- $E\widehat{\Delta}A = Z\widehat{\Delta}A$, αφού τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα.

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ), άρα $\hat{\varepsilon} = \hat{\zeta}$.

7. Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Θέμα 2

18 Θέμα 1657

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $AM\Delta$ και AME έχουν:

- $M\Delta = ME$
- AM κοινή

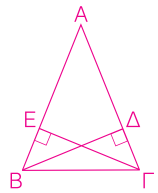
Οπότε είναι ίσα.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $MB\Delta$ και $M\Gamma E$ έχουν:

- $MB = M\Gamma$
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, αφού το $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελές.

Άρα είναι ίσα, οπότε $M\Delta = ME$.

19 Θέμα 1568



α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔAB και $EA\Gamma$ έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- $\hat{A}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα, άρα $B\Delta = \Gamma E$.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔAB και $EA\Gamma$ έχουν:

- $B\Delta = \Gamma E$
- $\hat{A}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα, άρα $A\Gamma = AB$.

20 Θέμα 1659

α. Τα τρίγωνα ABE και $A\Gamma\Delta$ έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- $BE = \Gamma\Delta$
- $A\hat{B}E = A\hat{\Gamma}\Delta$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $A\hat{B}\Gamma$ και $A\hat{\Gamma}B$

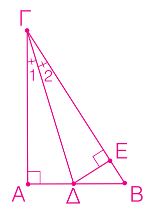
Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $A\Delta = AE$.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα ZBE και $H\Gamma\Delta$ έχουν:

- $BE = \Gamma\Delta$
- $E\hat{B}Z = \Delta\hat{\Gamma}H$, ως κατακορυφήν των ίσων γωνιών $A\hat{B}\Gamma$ και $A\hat{\Gamma}B$.

Οπότε είναι ίσα, άρα $EZ = \Delta H$.

21 Θέμα 1574



α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $\Delta\Gamma E$ έχουν:

- $\Gamma\Delta$ κοινή
- $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$

Οπότε είναι ίσα.

β. Επειδή τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$, $\Delta\Gamma E$ είναι ίσα, προκύπτει $\Gamma A = \Gamma E$ και $\Delta A = \Delta E$.

Τα σημεία Γ, Δ ισαπέχουν από τα σημεία A και E, άρα τα Γ, Δ ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΑΕ.

Επομένως η ευθεία $\Gamma\Delta$ είναι η μεσοκάθετος του AE.

22 Θέμα 1656

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $M A \Delta$ και $N A E$ έχουν:

- $M\Delta = NE$
- $\hat{A}$ κοινή.

Οπότε είναι ίσα, άρα: $AM = AN \Rightarrow 2AM = 2AN \Rightarrow AB = A\Gamma$.

Επομένως το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $MA\Delta$ και NAE έχουν:

- $AM = AN$, ως μισά των ίσων τμημάτων AB και $A\Gamma$
- $\hat{A}$ κοινή.

Οπότε είναι ίσα, άρα $M\Delta = NE$.

23 Θέμα 1705

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ και $EB\Delta$ έχουν:

- $B\Delta$ κοινή
- $A\hat{B}\Delta = \Delta\hat{B}E$, αφού $B\Delta$ διχοτόμος

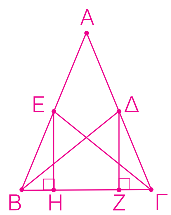
Οπότε είναι ίσα, άρα $BE = AB$.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και ZEB έχουν:

- $AB = BE$ (από το **α.** ερώτημα)
- $\hat{B}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα. Άρα $B\Gamma = BZ$.
Οπότε το τρίγωνο $B\Gamma Z$ είναι ισοσκελές.

24 Θέμα 1532



α. Τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και ΓBE έχουν:

- $B\Gamma$ κοινή
- $\Gamma\hat{B}E = B\hat{\Gamma}\Delta$
- $\Delta\hat{B}\Gamma = E\hat{\Gamma}B$ ως μισά ίσων γωνιών.

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ).

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα HEB και $Z\Delta\Gamma$ έχουν:

- $EB = \Gamma\Delta$, αφού τα τρίγωνα ΓBE , $B\Gamma\Delta$ είναι ίσα
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$

Οπότε είναι ίσα, άρα $EH = \Delta Z$.

25 Θέμα 1698

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Delta M$ και ΓEM έχουν:

- $MB = M\Gamma$
- $B\Delta = \Gamma E$

Οπότε είναι ίσα.

β. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- $B\Delta = \Gamma E$
- $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}E$, ως συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $A\hat{B}\Gamma$ και $A\hat{\Gamma}B$

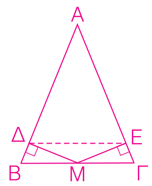
Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $A\Delta = AE$.

26 Θέμα 1545

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $\Gamma E B$ έχουν:
- $B\Gamma$ κοινή
- $\hat{\Gamma} = \hat{B}$ ($\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ ισοσκελές)

Άρα είναι ίσα.
β. Επειδή τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$, $\Gamma E B$ είναι ίσα, έχουμε $\Delta\Gamma = EB$.
Είναι $A\Delta = A\Gamma - \Delta\Gamma = AB - BE = AE$.

27 Θέμα 1547

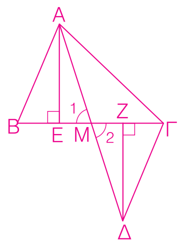


α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔBM και $E\Gamma M$ έχουν:
- $MB = M\Gamma$
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Άρα είναι ίσα, οπότε $M\Delta = ME$.
β. Είναι:
- $AB = A\Gamma$
- $\Delta B = E\Gamma$, αφού τα τρίγωνα ΔBM, $E\Gamma M$ είναι ίσα.

Οπότε $A\Delta = AB - \Delta B = A\Gamma - E\Gamma = AE$, άρα το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

28 Θέμα 1569



α. Τα τρίγωνα ABM, $M\Gamma\Delta$ έχουν:
- $MB = M\Gamma$
- $AM = M\Delta$
- $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$

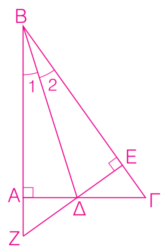
Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).
β. Τα ορθογώνια τρίγωνα EAM και $Z\Delta M$ έχουν:
- $MA = M\Delta$
- $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$

Οπότε είναι ίσα, άρα $AE = \Delta Z$.

29 Θέμα 1670

α. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, το $A\Delta$ είναι διχοτόμος και ύψος.
Οπότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$.
β. Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ το ύψος $A\Delta$ είναι και διάμεσος.
Οπότε η ευθεία $A\Delta$ είναι η μεσοκάθετος του $B\Gamma$, άρα $EB = E\Gamma$.

30 Θέμα 1571

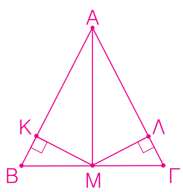


α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $EB\Delta$ ($\hat{E} = 90^\circ$) έχουν:
- $B\Delta$ κοινή
- $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$

Οπότε είναι ίσα, άρα $AB = BE$.
β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και ZEB έχουν:
- $AB = BE$
- $\hat{B}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα.

31 Θέμα 1546

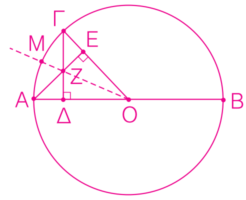


α. Επειδή η AM είναι διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$, θα είναι και διχοτόμος, οπότε $MK = M\Lambda$.
β. Τα ορθογώνια τρίγωνα KAM και ΛAM έχουν:
- AM κοινή
- $MK = M\Lambda$

Οπότε είναι ίσα, άρα $K\hat{M}A = \Lambda\hat{M}A$.

Άρα η AM είναι διχοτόμος της $K\hat{M}\Lambda$.

32 Θέμα 1677



α. Τα ορθογώνια τρίγωνα EAO, $\Delta\Gamma O$ έχουν:
- $OA = O\Gamma$, ως ακτίνες του κύκλου
- $\widehat{O}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα, άρα $O\Delta = OE$.

Επομένως το τρίγωνο ΔOE είναι ισοσκελές.

β. • Τα ορθογώνια τρίγωνα EZO , ΔZO έχουν:
- OZ κοινή
- $O\Delta = OE$

Οπότε είναι ίσα, άρα $\Delta\widehat{O}Z = E\widehat{O}Z$.

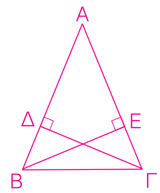
Επομένως η OZ είναι η διχοτόμος της $A\widehat{O}\Gamma$.

- Έστω ότι η OZ τέμνει το κύκλο στο M .

Έχουμε $A\widehat{O}M = M\widehat{O}\Gamma$, άρα $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{M\Gamma}$, επομένως το M είναι το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{A\Gamma}$.

Θέμα 4

33 Θέμα 1724



α. Τα ορθογώνια τρίγωνα EAB και $\Delta A\Gamma$ έχουν:
- $AB = A\Gamma$
- $\widehat{A}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα, άρα $BE = \Gamma\Delta$.

Επομένως η πρόταση Π ισχύει.

β. Η αντίστροφη πρόταση της Π είναι:

Π': Αν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ τα ύψη του BE και $\Gamma\Delta$ είναι ίσα, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$.

Απόδειξη

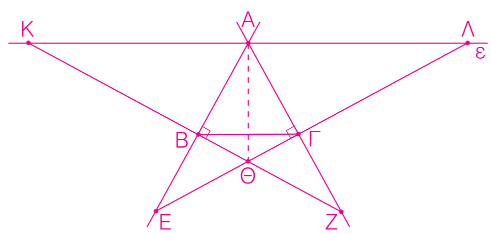
Τα ορθογώνια τρίγωνα EAB και $\Delta A\Gamma$ έχουν:
- $BE = \Gamma\Delta$
- $\widehat{A}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα, άρα $AB = A\Gamma$.

Επομένως η πρόταση Π' ισχύει.

γ. Ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές, αν και μόνο αν τα ύψη που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές τους είναι ίσα.

34 Θέμα 1875



α. i. Τα ορθογώνια τρίγωνα AZB και $AE\Gamma$ έχουν:
- $AB = A\Gamma$
- $\widehat{A}$ κοινή

Άρα είναι ίσα, οπότε $AZ = AE$.

ii. Τα ορθογώνια τρίγωνα ABK και $A\Gamma\Lambda$ έχουν:
- $AB = A\Gamma$
- $B\widehat{A}K = \Gamma\widehat{A}\Lambda \quad (= \dfrac{\widehat{A}_{\varepsilon\xi}}{2})$

Άρα είναι ίσα, οπότε $AK = A\Lambda$.

β. Συμφωνούμε διότι: Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Theta B$ και $A\Theta\Gamma$ έχουν:
- $AB = A\Gamma$
- $A\Theta$ κοινή

Οπότε είναι ίσα, άρα $B\widehat{A}\Theta = \Gamma\widehat{A}\Theta$.

Επομένως η $A\Theta$ είναι η διχοτόμος της $\widehat{A}$.

8. Βασικοί γεωμετρικοί τόποι

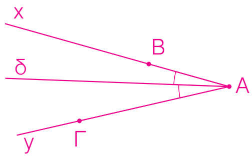
Θέμα 2

35 Θέμα 1688

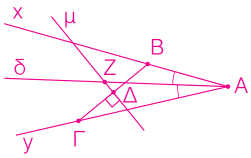
Γεωμετρικά οι δυνατές θέσεις του θησαυρού είναι:

α. Πάνω στη μεσοκάθετο του $ΒΓ$, αφού κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει από τα άκρα του τμήματος.

β. Πάνω στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{Α}$, αφού κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.



γ. Πάνω στη μεσοκάθετο του ΒΓ και στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{Α}$, άρα είναι το σημείο τομής της μεσοκαθέτου του $ΒΓ$ και της διχοτόμου της γωνίας $\hat{Α}$.

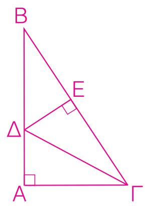


10. Ανισοτικές σχέσεις

Θέμα 2

36 Θέμα 1540

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ, ΓΔΕ έχουν:
- $ΓΔ$ κοινή
- $Α\hat{Γ}Δ = Δ\hat{Γ}Ε$, αφού ΓΔ διχοτόμος



Οπότε είναι ίσα, άρα $ΑΔ = ΔΕ$.

2[ος] τρόπος

Το $Δ$ είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{Γ}$, οπότε το $Δ$ ισαπέχει από τις πλευρές της $\hat{Γ}$, άρα $ΑΔ = ΔΕ$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΕΒΔ$ η ΔΒ είναι υποτείνουσα, οπότε είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου. Άρα $ΔΕ < ΔΒ$, οπότε $ΑΔ < ΔΒ$.

37 Θέμα 1573

α. Τα τρίγωνα $ΔΑΒ$, $ΔΕΓ$ έχουν:
- $ΔΒ = ΔΓ$
- $ΑΔ = ΔΕ$
- $Α\hat{Δ}Β = Γ\hat{Δ}Ε$

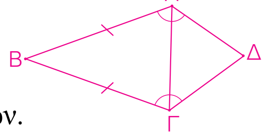
Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

Άρα $ΑΒ = ΓΕ$ (1).

β. Στο τρίγωνο $ΑΓΕ$ εφαρμόζουμε την τριγωνική ανισότητα και έχουμε

$$ΑΕ < ΓΕ + ΑΓ \overset{(1)}{\Rightarrow} ΑΕ < ΑΒ + ΑΓ$$

38 Θέμα 1585

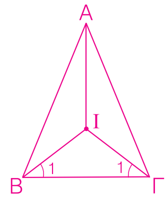


α. Το τρίγωνο $ΒΑΓ$ είναι ισοσκελές, με $ΒΑ = ΒΓ$, οπότε $Β\hat{Α}Γ = Β\hat{Γ}Α$.

β. Επειδή $Β\hat{Α}Δ = Β\hat{Γ}Δ$ και $Β\hat{Α}Γ = Β\hat{Γ}Α$, έχουμε $Δ\hat{Α}Γ = Δ\hat{Γ}Α$, ως διαφορές ίσων γωνιών. Οπότε το τρίγωνο $ΑΔΓ$ είναι ισοσκελές.

γ. Επειδή $ΒΑ = ΒΓ$ και $ΔΑ = ΔΓ$, τα σημεία Β, Δ ισαπέχουν από τα Α, Γ οπότε τα Β, Δ ανήκουν στη μεσοκάθετο του $ΑΓ$. Άρα η ευθεία $ΒΔ$ είναι μεσοκάθετος του $ΑΓ$.

39 Θέμα 1558



α. Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, έχουμε $\hat{B}=\hat{\Gamma}$. Οπότε και $\hat{B}_1=\hat{\Gamma}_1$, ως μισά ίσων γωνιών. Άρα το τρίγωνο $BI\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β. Τα τρίγωνα ABI, $A\Gamma I$ έχουν:

- $AB=A\Gamma$
- AI κοινή
- $IB=I\Gamma$, αφού το τρίγωνο $BI\Gamma$ είναι ισοσκελές

Οπότε είναι ίσα (ΠΠΠ).

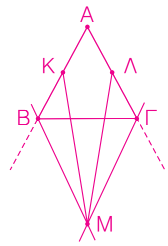
Άρα $A\hat{I}B=A\hat{I}\Gamma$.

γ. Επειδή $AB=A\Gamma$ και $IB=I\Gamma$, τα A, I ισαπέχουν από τα B,Γ, οπότε τα A, I ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΒΓ. Άρα η ευθεία AI είναι μεσοκάθετος του $B\Gamma$.

40 Θέμα 1553

α. Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, έχουμε

$$\hat{B}=\hat{\Gamma}\Rightarrow \hat{B}_{\varepsilon\xi}=\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}\Rightarrow \frac{\hat{B}_{\varepsilon\xi}}{2}=\frac{\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}}{2}\Rightarrow M\hat{B}\Gamma=M\hat{\Gamma}B$$



Άρα το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισοσκελές με $MB=M\Gamma$.

β. Τα τρίγωνα MKB και $M\Lambda\Gamma$ έχουν:

- $MB=M\Gamma$
- $BK=\Gamma\Lambda$
- $M\hat{B}K=M\hat{\Gamma}\Lambda$, ως άθροισμα ίσων γωνιών

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

Άρα $MK=M\Lambda$.

41 Θέμα 1578

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔBH και $E\Gamma Z$ έχουν:

- $\Delta B=\Gamma E$, ως μισά ίσων πλευρών
- $\hat{B}=\hat{\Gamma}$, ως γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$

Οπότε είναι ίσα.

β. Επειδή τα τρίγωνα ΔBH, $E\Gamma Z$ είναι ίσα, προκύπτει $\hat{H}=\hat{Z}$.

Άρα το τρίγωνο MZH είναι ισοσκελές.

42 Θέμα 1646

α. Επειδή το σημείο Δ είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{B}$, ισαπέχει από τις πλευρές της.
Άρα $A\Delta=\Delta E$, (1).

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ η $\Delta\Gamma$ είναι υποτείνουσα, οπότε είναι η μεγαλύτερη πλευρά, οπότε

$$\Delta E<\Delta\Gamma \overset{(1)}{\Rightarrow} A\Delta<\Delta\Gamma$$

γ. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{B}>\hat{\Gamma}$, οπότε οι απέναντι πλευρές είναι όμοια άνισες, άρα $A\Gamma>AB$.

43 Θέμα 1658

α. i. Τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Delta M$ και ΓEM έχουν:

- $M\Delta=ME$
- $MB=M\Gamma$, αφού M μέσο της $B\Gamma$

Άρα είναι ίσα.

ii. Επειδή τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα, έχουμε $\hat{B}=\hat{\Gamma}$, οπότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β. Αν $AB = A\Gamma$, τότε τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Delta M$ και ΓEM έχουν:

- $MB = M\Gamma$
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$

Οπότε είναι ίσα, άρα $M\Delta = ME$.

44 Θέμα 1664

α. Τα τρίγωνα $BK\Gamma$, $\Gamma\Lambda B$ έχουν:

- $K\Gamma = \Lambda B$, ως μισά ίσων πλευρών
- $B\Gamma$ κοινή
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $BK = \Gamma\Lambda$.

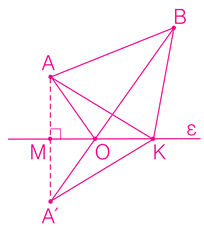
β. • Επειδή τα τρίγωνα $BK\Gamma$ και $\Gamma\Lambda B$ είναι ίσα, έχουμε $K\hat{B}\Gamma = \Lambda\hat{\Gamma}B$.

Οπότε το τρίγωνο $\Theta B\Gamma$ είναι ισοσκελές, άρα $\Theta B = \Theta\Gamma$.

- Τα τρίγωνα $AB\Theta$ και $A\Theta\Gamma$ έχουν:
  - $AB = A\Gamma$
  - $A\Theta$ κοινή
  - $\Theta B = \Theta\Gamma$

Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ).

45 Θέμα 1749



α. i. Στο τρίγωνο OAA' η OM είναι ύψος και διάμεσος, οπότε είναι και διχοτόμος.

ii. Η OM είναι διχοτόμος στο τρίγωνο OAA' , οπότε $A\hat{O}M = M\hat{O}A'$.

Είναι $M\hat{O}A' = K\hat{O}B$, ως κατακορυφήν, οπότε $A\hat{O}M = K\hat{O}B$.

β. i. Επειδή η ευθεία ε είναι η μεσοκάθετος του τμήματος AA' , έχουμε $KA = KA'$.

ii. Από την τριγωνική ανισότητα $\overset{\Delta}{KA'B}$ έχουμε

$KA' + KB > A'B \Leftrightarrow KA + KB > OA' + OB \Leftrightarrow KA + KB > OA + OB$.

11. Ευθεία και κύκλος

Θέμα 2

46 Θέμα 1676

Στο τρίγωνο OAB το ON είναι το ύψος και διάμεσος, οπότε:

α. το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές

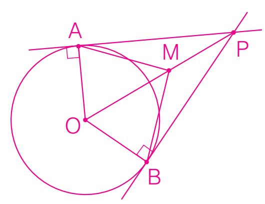
β. η ON είναι διχοτόμος της $K\hat{O}\Lambda$, άρα $N\hat{O}\Lambda = N\hat{O}K$, οπότε και τα αντίστοιχα τόξα είναι ίσα, δηλαδή $\overset{\frown}{N\Lambda} = \overset{\frown}{NK}$.

47 Θέμα 1617

α. Τα τρίγωνα PAM και PMB έχουν:

- $PA = PB$, αφού τα PA , PB είναι εφαπτόμενα τμήματα
- PM κοινή
- $O\hat{P}A = O\hat{P}B$, αφού η διακεντρική ευθεία PO διχοτομεί τη γωνία $A\hat{P}B$.

Οπότε είναι ίσα.



β. Από το **α.** ερώτημα προκύπτει $M\hat{A}P = M\hat{B}P$.

Είναι $O\hat{A}P = O\hat{B}P = 90^\circ$, αφού οι ακτίνες που καταλήγουν στα σημεία επαφής είναι κάθετες στις εφαπτόμενες.

Οπότε $M\hat{A}O = M\hat{B}O$, ως διαφορές ίσων γωνιών.

48 Θέμα 1684

α. Τα τρίγωνα $AB E$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνια $(\hat{B}=\hat{\Gamma}=90^{o})$ και έχουν:

- $AB=A\Gamma$, ως εφαπτόμενα τμήματα
- $BE=\Gamma\Delta=2\rho$

Άρα είναι ίσα.

β. Είναι $B\hat{O}\Delta=\Gamma\hat{O}E$, άρα $B\Delta=\Gamma E$.

Τα τρίγωνα $BA\Delta$ και $A\Gamma E$ έχουν:
- $AB=A\Gamma$
- $A\Delta=AE$, αφού τα τρίγωνα ABE και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα
- $B\Delta=E\Gamma$

Οπότε είναι ίσα.

49 Θέμα 1751

α. Επειδή τα εφαπτόμενα τμήματα είναι ίσα, έχουμε:

$PA=PB$, $A\Gamma=\Gamma\Delta$ και $EB=E\Delta$. Οπότε:

i. $P\Gamma=\Gamma A+AP=\Gamma\Delta+AP$

ii. $P\Gamma-\Gamma\Delta\overset{\alpha.}{=}\Gamma\Delta+AP-\Gamma\Delta=AP=BP=PE-BE=PE-\Delta E$

β. Είναι:

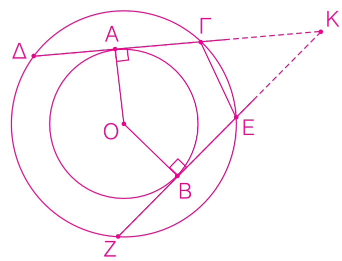
i. $P\Gamma=PA+A\Gamma=PB+BE=PE$. Οπότε το τρίγωνο $P\Gamma E$ είναι ισοσκελές.

ii. • $O\Delta\perp\Gamma E$, αφού ΓE εφαπτομένη και $O\Delta$ ακτίνα

• $P\Delta\perp\Gamma E$, αφού το τρίγωνο $P\Gamma E$ είναι ισοσκελές και $P\Delta$ διάμεσος γιατί $A\Gamma=BE\Rightarrow\Gamma\Delta=\Delta E$, οπότε το $P\Delta$ είναι και ύψος.

Άρα οι ευθείες $O\Delta$ και $P\Delta$ ταυτίζονται, οπότε τα P, O και Δ είναι συνευθειακά.

50 Θέμα 1667



α. Οι ακτίνες OA, OB είναι κάθετες στις εφαπτόμενες $\Gamma\Delta$ και EZ του κύκλου (o,ρ), οπότε $OA\perp\Gamma\Delta$ και $OB\perp EZ$. Επομένως τα OA, OB είναι αποστήματα των χορδών $\Delta\Gamma$, ZE του κύκλου (O,R) και είναι ίσα, αφού $OA=OB=\rho$.

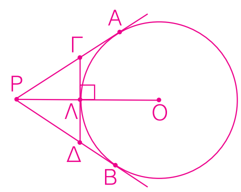
Άρα οι αντίστοιχες χορδές είναι ίσες, οπότε $\Delta\Gamma=ZE$.

β. Είναι:
- $KA=KB$, ως εφαπτόμενα τμήματα
- $A\Gamma=BE$, ως μισά των ίσων τμημάτων $\Delta\Gamma$, ZE

Οπότε $K\Gamma=KE$, ως διαφορά ίσων τμημάτων.

Θέμα 4

51 Θέμα 1752



α. Η PO είναι διακεντρική ευθεία, οπότε είναι διχοτόμος της $A\hat{P}B$.

Η ακτίνα $O\Lambda$ είναι κάθετη στην εφαπτόμενη $\Gamma\Delta$, άρα $O\Lambda\perp\Gamma\Delta$, οπότε $OP\perp\Gamma\Delta$.

Στο τρίγωνο $P\Gamma\Delta$ το $P\Lambda$ είναι ύψος και διχοτόμος του, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β. Είναι:
- $PA=PB$, ως εφαπτόμενα τμήματα
- $P\Gamma=P\Delta$, αφού το τρίγωνο $P\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές

Οπότε και $A\Gamma=B\Delta$, ως διαφορές ίσων τμημάτων.

γ. Είναι $\Gamma A=\Gamma\Lambda$ και $\Delta B=\Delta\Lambda$, ως εφαπτόμενα τμήματα.

Η περίμετρος του τριγώνου $P\Gamma\Delta$ είναι $\Pi=P\Gamma+P\Delta+\Gamma\Delta=P\Gamma+P\Delta+\Gamma\Lambda+\Lambda\Delta=P\Gamma+P\Delta+\Gamma A+\Delta B=PA+PB$.

14. Παράλληλες ευθείες

Θέμα 2

52 Θέμα 1544

α. Επειδή $EZ // B\Gamma$, έχουμε $\hat{B} = Z\hat{E}A$ και $\hat{\Gamma} = E\hat{Z}A$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

Είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, οπότε $Z\hat{E}A = E\hat{Z}A$. Άρα το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές.

β. Τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $AZ\Delta$ έχουν:

- $AE = AZ$, αφού το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές
- $A\Delta$ κοινή
- $E\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}Z$, αφού $A\Delta$ διχοτόμος

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

53 Θέμα 1595

α. Είναι $AB = A\Gamma$ και $\Gamma\Delta = AB$, οπότε $A\Gamma = \Gamma\Delta$.

Άρα $\Delta\hat{A}\Gamma = \Gamma\hat{\Delta}A$.

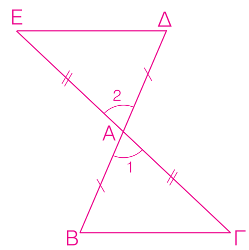
β. • Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και η AM είναι διάμεσος, θα είναι και ύψος.
Είναι $\Gamma x \perp B\Gamma$ και $AM \perp B\Gamma$, οπότε $\Gamma x // AM$.

Επομένως $\Gamma\hat{\Delta}A = \Delta\hat{A}M$, ως εντός εναλλάξ.

• Από το **α.** ερώτημα έχουμε $\Delta\widehat{A}\Gamma = \Gamma\widehat{\Delta}A$.

Άρα $\Delta\hat{A}M = \Delta\hat{A}\Gamma$, οπότε η $A\Delta$ είναι η διχοτόμος της $M\hat{A}\Gamma$.

54 Θέμα 1597



α. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $A\Delta E$ έχουν:

- $AB = A\Delta$
- $A\Gamma = AE$
- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Επειδή τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $A\Delta E$ είναι ίσα, έχουμε $\hat{B} = \hat{\Delta}$.
Αφού οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες, προκύπτει $E\Delta // B\Gamma$.

55 Θέμα 1620

α. Είναι:
- $MA = MB$, ως εφαπτόμενα τμήματα
- $MA = M\Gamma$, από υπόθεση

Οπότε $MB = M\Gamma$.

β. • Η διακεντρική ευθεία MO διχοτομεί τη γωνία $A\widehat{M}B$, οπότε $A\widehat{M}O = B\widehat{M}O$.
Είναι $\Gamma\widehat{M}\Delta = A\widehat{M}O$, ως κατακορυφήν.

Άρα $\Gamma\hat{M}\Delta = B\hat{M}O$.

• Τα τρίγωνα OMB και $M\Gamma\Delta$ έχουν:

- $OM = M\Delta$
- $MB = M\Gamma$
- $B\hat{M}O = \Gamma\hat{M}\Delta$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

Θέμα 4

56 Θέμα 1793

α. Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΔΓ$ έχουν:
- $ΑΒ = ΑΔ$
- $ΓΒ = ΓΔ$
- $ΑΓ$ κοινή.

Οπότε είναι ίσα (ΠΠΠ), άρα $Β\hat{Γ}Α = Α\hat{Γ}Δ$.

Επομένως η $ΓΑ$ είναι η διχοτόμος της $Β\hat{Γ}Δ$.

β. Τα τρίγωνα $ΖΑΓ$ και $ΕΑΓ$ έχουν:
- $ΑΓ$ κοινή
- $Ζ\hat{Γ}Α = Ε\hat{Γ}Α$, αφού $ΓΑ$ διχοτόμος
- $Ζ\hat{Α}Γ = Ε\hat{Α}Γ$, ως αθροίσματα των ίσων γωνιών $Ζ\hat{Α}Β = Ε\hat{Α}Δ$ και $Β\hat{Α}Γ = Δ\hat{Α}Γ$.

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ), άρα $ΓΖ = ΓΕ$.

γ. Έστω $Κ$ το σημείο τομής της $ΓΑ$ με τη $ΖΕ$.
- Στο ισοσκελές τρίγωνο $ΓΒΔ$ η $ΓΑ$ είναι διχοτόμος του, οπότε είναι και ύψος του, άρα $ΓΑ \perp ΒΔ$.
- Στο ισοσκελές τρίγωνο $ΓΖΕ$ το $ΓΚ$ είναι διχοτόμος του, οπότε και ύψος, επομένως $ΓΚ \perp ΖΕ$.

Επειδή $ΓΚ \perp ΒΔ$ και $ΓΚ \perp ΕΖ$, έχουμε $ΕΖ // ΒΔ$.

57 Θέμα 1744

α. Είναι:
- $Α\hat{Ζ}Η = \hat{Β}$ και $Α\hat{Η}Ζ = \hat{Γ}$, ως εντός εναλλάξ
- $\hat{Β} = \hat{Γ}$, αφού $ΑΒ = ΑΓ$

Οπότε $Α\hat{Ζ}Η = Α\hat{Η}Ζ$.

Άρα το τρίγωνο $ΑΖΗ$ είναι ισοσκελές με $ΑΖ = ΑΗ$.

Επομένως $ΒΖ = ΓΗ$, ως διαφορές ίσων τμημάτων.

β. Τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΓΕ$ έχουν:
- $ΑΒ = ΑΓ$
- $ΑΔ = ΑΕ$, ως μισά ίσων τμημάτων
- $\hat{Α}$ κοινή

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $Ζ\hat{Β}Θ = Η\hat{Γ}Κ$.

Τα τρίγωνα $ΖΒΘ$ και $ΗΚΓ$ έχουν:
- $ΖΒ = ΗΓ$
- $Ζ\hat{Β}Θ = Η\hat{Γ}Κ$
- $Β\hat{Ζ}Θ = Κ\hat{Η}Γ$, ως παραπληρωματική ίσων γωνιών

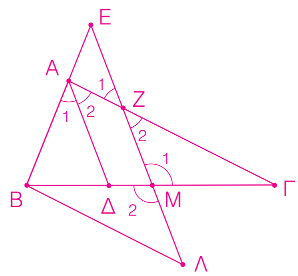
Άρα είναι ίσα.

γ. Επειδή τα τρίγωνα $ΖΒΘ$, $ΗΚΓ$ είναι ίσα, έχουμε $ΖΘ = ΚΗ$.

Οπότε $ΖΚ = ΖΘ + ΘΚ = ΚΗ + ΘΚ = ΗΘ$.

58 Θέμα 1818

α. Είναι $\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2$, αφού $ΑΔ$ διχοτόμος.



Έχουμε:
- $\hat{Α}_1 = \hat{Ε}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη
- $\hat{Α}_2 = \hat{Ζ}_1$, ως εντός εναλλάξ

Οπότε $\hat{Ε} = \hat{Ζ}_1$, άρα το τρίγωνο $ΑΕΖ$ είναι ισοσκελές.

Είναι:
- $\hat{Ε} = \hat{Ζ}_1$ και $\hat{Ζ}_1 = \hat{Ζ}_2$ άρα $\hat{Ε} = \hat{Ζ}_2$
- $\hat{Ζ}_2 = \hat{Λ}$, ως εντός εναλλάξ

Οπότε $\hat{Ε} = \hat{Λ}$, άρα το τρίγωνο $ΒΛΕ$ είναι ισοσκελές.

β. Τα τρίγωνα $ΒΜΛ$, $ΜΓΖ$ έχουν:

- $ΜΒ = ΜΓ$
- $\hat{Μ}_1 = \hat{Μ}_2$
- $\hat{Γ} = Μ\hat{Β}Λ$, ως εντός εναλλάξ

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ), άρα $ΒΛ = ΓΖ$.

γ. Είναι $ΑΕ \overset{α.}{=} ΑΖ = ΑΓ - ΓΖ \overset{β.}{=} ΑΓ - ΒΛ$.

16. Άθροισμα γωνιών τριγώνου

Θέμα 2

59 Θέμα 1700

α. Είναι $\hat{Α} = 180^\circ - 40^\circ - 70^\circ = 70^\circ$.

Οπότε $\hat{Α} = \hat{Β}$, άρα το τρίγωνο $ΓΑΒ$ είναι ισοσκελές.

β. Από το τρίγωνο $ΑΕΔ$, έχουμε $Α\hat{Ε}Δ = 180^\circ - 20^\circ - 70^\circ = 90^\circ$.

60 Θέμα 1645

α. Είναι $\hat{Α} + \hat{Γ} = 2\hat{Β}$ και $\hat{Α} = 3\hat{Γ}$, οπότε $3\hat{Γ} + \hat{Γ} = 2\hat{Β} \Leftrightarrow 4\hat{Γ} = 2\hat{Β} \Leftrightarrow \hat{Β} = 2\hat{Γ}$.

Έχουμε $\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} = 180^\circ \Leftrightarrow 3\hat{Γ} + 2\hat{Γ} + \hat{Γ} = 180^\circ \Leftrightarrow 6\hat{Γ} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Γ} = 30^\circ$.

Οπότε $\hat{Β} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$.

β. Είναι $\hat{Γ} = 30^\circ$ και $Ε\hat{Β}Α = \dfrac{\hat{Β}}{2} = 30^\circ$.

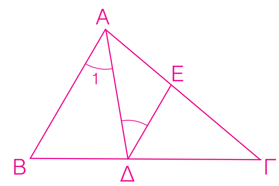
Στο τρίγωνο $ΑΔΓ$ είναι $Δ\hat{Α}Γ = 90^\circ - \hat{Γ} = 60^\circ$.

Στο τρίγωνο $ΑΒΕ$ είναι $Α\hat{Ε}Β + \hat{Α} + Ε\hat{Β}Α = 180^\circ \Leftrightarrow Α\hat{Ε}Β + 90^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow Α\hat{Ε}Β = 60^\circ$.

Στο τρίγωνο $ΑΕΖ$ είναι $Α\hat{Ζ}Ε + Ζ\hat{Α}Ε + Α\hat{Ε}Ζ = 180^\circ \Leftrightarrow Α\hat{Ζ}Ε + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow Α\hat{Ε}Ζ = 60^\circ$.

Άρα το τρίγωνο $ΑΖΕ$ είναι ισόπλευρο.

61 Θέμα 1623



α. Είναι:

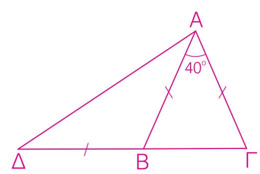
- $\hat{Β} = 20^\circ + \hat{Γ}$
- $\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} = 180^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + 20^\circ + \hat{Γ} + \hat{Γ} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{Γ} = 80^\circ \Leftrightarrow \hat{Γ} = 40^\circ$

Οπότε $\hat{Β} = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ$.

β. Είναι:

- $\hat{Α}_1 = \dfrac{\hat{Α}}{2} = \dfrac{80^\circ}{2} = 40^\circ$
- $Α\hat{Δ}Ε = \hat{Α}_1 = 40^\circ$, ως εντός εναλλάξ
- $Ε\hat{Δ}Γ = \hat{Β} = 60^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη

62 Θέμα 1604



α. Είναι:

- $\hat{Β} = \hat{Γ}$
- $\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + \hat{Β} + \hat{Β} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{Β} = 140^\circ \Leftrightarrow \hat{Β} = 70^\circ$

Οπότε $\hat{Γ} = 70^\circ$.

β. Είναι:

- $Δ\hat{Α}Β = \hat{Δ}$, αφού $ΑΒ = ΒΔ$
- $Α\hat{Β}Δ = 180^\circ - \hat{Β} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$
- $Δ\hat{Α}Β + \hat{Δ} + Α\hat{Β}Δ = 180^\circ \Leftrightarrow Δ\hat{Α}Β + Δ\hat{Α}Β + 110^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2Δ\hat{Α}Β = 70^\circ \Leftrightarrow Δ\hat{Α}Β = 35^\circ$

Οπότε $Δ\hat{Α}Γ = 40^\circ + 35^\circ = 75^\circ$.

63 Θέμα 1602

α. Είναι $\hat{B}=\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ+\hat{B}+\hat{B}=180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B}=130^\circ \Leftrightarrow \hat{B}=65^\circ$.

Οπότε και $\hat{\Gamma}=65^\circ$.

β. Στο ισοσκελές τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι $B\hat{\Delta}\Gamma=\hat{\Gamma}=65^\circ$ και

$\Delta\hat{B}\Gamma+B\hat{\Delta}\Gamma+\hat{\Gamma}=180^\circ \Leftrightarrow \Delta\hat{B}\Gamma+65^\circ+65^\circ=180^\circ \Leftrightarrow \Delta\hat{B}\Gamma=50^\circ$.

Άρα $\Delta\hat{B}\Gamma=\hat{A}$.

64 Θέμα 1593

α. Τα τρίγωνα BKA και ΓKA έχουν:

- $AB=A\Gamma$
- $KB=K\Gamma$
- AK κοινή

Οπότε είναι ίσα (ΠΠΠ).

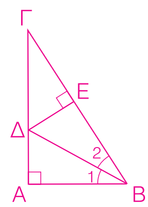
β. Είναι:
- AK διχοτόμος, άρα $B\hat{A}K=\dfrac{\hat{A}}{2}=40^\circ$
- $KA=KB$, άρα $A\hat{B}K=B\hat{A}K=40^\circ$
- $KA=K\Gamma$, άρα $A\hat{\Gamma}K=K\hat{A}\Gamma=40^\circ$

γ. Στο τρίγωνο AKB είναι $A\hat{K}B=180^\circ-40^\circ-40^\circ=100^\circ$.

Στο τρίγωνο $AK\Gamma$ είναι $A\hat{K}\Gamma=180^\circ-40^\circ-40^\circ=100^\circ$.

Οπότε $B\hat{K}\Gamma=360^\circ-A\hat{K}B-A\hat{K}\Gamma=360^\circ-100^\circ-100^\circ=160^\circ$.

65 Θέμα 1541



α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$, $E\Delta B$ έχουν:

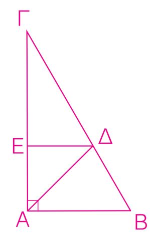
- $B\Delta$ κοινή
- $\hat{B}_1=\hat{B}_2$, αφού $B\Delta$ διχοτόμος

Οπότε είναι ίσα, άρα $BE=AB$.

β. Επειδή τα τρίγωνα $AB\Delta$, $E\Delta B$ είναι ίσα, έχουμε $B\hat{\Delta}E=B\hat{\Delta}A \Rightarrow B\hat{\Delta}E=55^\circ$.

Οπότε:
- $\Gamma\hat{\Delta}E=180^\circ-55^\circ-55^\circ=70^\circ$
- $\hat{\Gamma}=90^\circ-\Gamma\hat{\Delta}E=90^\circ-70^\circ=20^\circ$.

66 Θέμα 1693



α. Επειδή $\Delta E \,//\, AB$ και $AB\perp A\Gamma$, είναι $\Delta E\perp A\Gamma$.

Οπότε το τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ είναι ορθογώνιο.

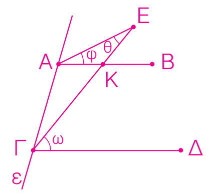
β. Είναι:
- $\Delta\hat{A}E=\Delta\hat{A}B=\dfrac{\hat{A}}{2}=\dfrac{90^\circ}{2}=45^\circ$
- $A\hat{\Delta}E=\Delta\hat{A}B=45^\circ$, ως εντός εναλλάξ

γ. Έχουμε $\hat{B}=20^\circ+\hat{\Gamma}$.

Είναι $\hat{B}+\hat{\Gamma}=90^\circ \Leftrightarrow 20^\circ+\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}=90^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma}=70^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=35^\circ$.

Άρα $E\hat{\Delta}\Gamma=90^\circ-\hat{\Gamma}=90^\circ-35^\circ=55^\circ$.

67 Θέμα 1590



α. Έστω K το σημείο τομής της AB με την $E\Gamma$.

Είναι $\hat{\omega} = A\hat{K}\Gamma$, ως εντός εναλλάξ και $A\hat{K}\Gamma = \hat{\varphi} + \hat{\theta}$,

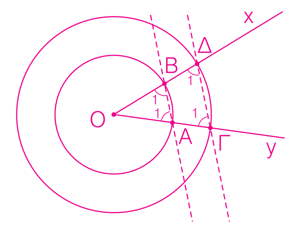
αφού η $A\hat{K}\Gamma$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο AKE.

Οπότε $\hat{\omega} = \hat{\varphi} + \hat{\theta}$.

β. Είναι:
- $\hat{\omega} = Z\hat{E}\Gamma$, ως εντός εναλλάξ
- $\hat{\varphi} = A\hat{E}Z$, ως εντός εναλλάξ

Οπότε $\hat{\theta} = Z\hat{E}\Gamma + Z\hat{E}A = \hat{\omega} + \hat{\varphi}$.

68 Θέμα 1552



Το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές διότι $OA = OB$ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου.

Άρα $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$.

Στο τρίγωνο OAB είναι

$$\hat{O} + \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 180^\circ - \hat{O} \Leftrightarrow 2\hat{B}_1 = 180^\circ - \hat{O} \Leftrightarrow \hat{B}_1 = \frac{180^\circ - \hat{O}}{2}, \ (1)$$

Το τρίγωνο $O\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές διότι $O\Gamma = O\Delta$, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου.

Άρα $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$.

Στο τρίγωνο $O\Gamma\Delta$ είναι $\hat{O} + \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Delta}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Delta}_1 = 180^\circ - \hat{O} \Leftrightarrow 2\hat{\Delta}_1 = 180^\circ - \hat{O} \Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 = \dfrac{180^\circ - \hat{O}}{2}$, (2).

Από τις (1) και (2) έχουμε $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$.

Αφού επιπλέον είναι εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη, προκύπτει $AB // \Gamma\Delta$.

69 Θέμα 1594

α. i. Επειδή $\Delta E // B\Gamma$ έχουμε:
- $E\hat{\Delta}B = \Delta\hat{B}\Gamma$, ως εντός εναλλάξ
- $E\hat{\Delta}A = \hat{\Gamma}$, ως εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη

ii. Είναι $A\hat{\Delta}E = E\hat{\Delta}B$, αφού ΔE διχοτόμος της $A\hat{\Delta}B$, οπότε $\hat{\Gamma} = \Delta\hat{B}\Gamma$.

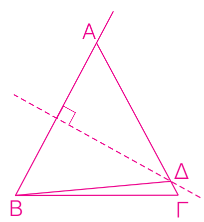
Άρα το $\overset{\triangle}{B\Delta\Gamma}$ είναι ισοσκελές.

β. Η $A\hat{\Delta}B$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$, άρα $A\hat{\Delta}B = \Delta\hat{B}\Gamma + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow 60^\circ = 2\hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$.

70 Θέμα 1554

α. Είναι $\hat{A}_{\varepsilon\xi} = \hat{B} + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow 2\hat{B} = \hat{B} + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Οπότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$.



β. Είναι:
- $A\hat{\Delta}B = 80^\circ$
- $\Delta A = \Delta B$, αφού το Δ ανήκει στη μεσοκάθετο του AB

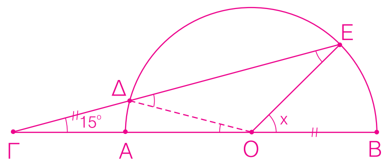
Οπότε $\hat{A} = A\hat{B}\Delta$.

Στο $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ είναι $\hat{A} + A\hat{B}\Delta + A\hat{\Delta}B = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{A} + 80^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{A} = 100^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 50^\circ$.

Στο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + \hat{B} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B} = 130^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 65^\circ$.

Οπότε και $\hat{\Gamma} = 65^\circ$.

71 Θέμα 1576



α. Είναι $\Gamma\Delta = OB = O\Delta = OE = \rho$.

- Το τρίγωνο $\Delta\Gamma O$ είναι ισοσκελές, άρα $\Delta\hat{O}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}O = 15^\circ$.
- Στο τρίγωνο $\Delta\Gamma O$, η γωνία $O\hat{\Delta}E$ είναι εξωτερική, οπότε

$O\hat{\Delta}E = 15^\circ + 15^\circ = 30^\circ$.

β. • Το τρίγωνο ΟΔΕ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{E} = O\hat{\Delta}E = 30^\circ$.

- Στο τρίγωνο ΟΕΓ η $B\hat{O}E$ είναι εξωτερική, οπότε $B\hat{O}E = x = \hat{\Gamma} + \hat{E} = 15^\circ + 30^\circ = 45^\circ$.

72 Θέμα 1607

α. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + \hat{B} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B} = 140^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 70^\circ$.

Οπότε και $\hat{\Gamma} = 70^\circ$.

Είναι: • $A\hat{B}\Delta = 180^\circ - \hat{B} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

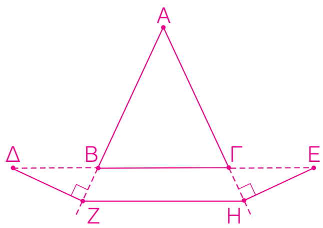
- $A\hat{\Gamma}E = 180^\circ - \hat{\Gamma} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

β. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:
- $AB = A\Gamma$
- $B\Delta = \Gamma E$
- $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}E$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

γ. Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα, έχουμε $A\Delta = AE$.
Άρα το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισοσκελές.

73 Θέμα 1572



α. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.
i. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΖΒΔ και ΗΓΕ έχουν:
- $B\Delta = \Gamma E$
- $\Delta\hat{B}Z = H\hat{\Gamma}E$, ως κατακορυφήν των ίσων γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$

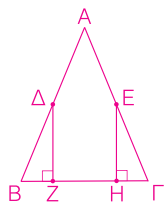
Οπότε είναι ίσα, άρα $BZ = \Gamma H$.

ii. Είναι $AZ = AB + BZ \overset{\alpha.i.}{=} A\Gamma + \Gamma H = AH$.
Άρα το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές.

β. Το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{Z} = \hat{H}$.
Στο τρίγωνο ΑΖΗ είναι $\hat{A} + \hat{Z} + \hat{H} = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + \hat{Z} + \hat{Z} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{Z} = 130^\circ \Leftrightarrow \hat{Z} = 65^\circ$.

Οπότε και $\hat{H} = 65^\circ$.

74 Θέμα 1699



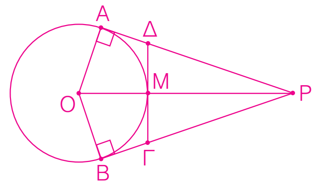
α. Έστω Δ, Ε τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και $\Delta Z \perp B\Gamma$, $EH \perp B\Gamma$.
Τα ορθογώνια τρίγωνα ΖΒΔ και ΗΓΕ έχουν:
- $\Delta B = E\Gamma$
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Άρα είναι ίσα, οπότε $\Delta Z = EH$.

β. Είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 75^\circ + \hat{B} + \hat{B} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 3\hat{B} = 105^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 35^\circ$.

Οπότε $\hat{\Gamma} = \hat{B} = 35^\circ$ και $\hat{A} = 75^\circ + \hat{B} = 75^\circ + 35^\circ = 110^\circ$.

75 Θέμα 1636



α. Η ΡΟ είναι διακεντρική ευθεία, οπότε είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\text{Ρ}}$.
Η ακτίνα ΟΜ είναι κάθετη στην εφαπτόμενη ΔΓ, οπότε $\text{ΟΜ} \perp \text{ΔΓ}$.
Στο τρίγωνο ΡΔΓ η ΡΜ είναι διχοτόμος και ύψος, οπότε το τρίγωνο ΡΔΓ είναι ισοσκελές.

β. Είναι $\text{ΟΑ} \perp \text{ΑΡ}$ και $\text{ΟΒ} \perp \text{ΒΡ}$, οπότε $\hat{\text{Α}} = \hat{\text{Β}} = 90^\circ$.
Στο τετράπλευρο ΟΑΡΒ είναι

$$\hat{\text{Ο}} + \hat{\text{Α}} + \hat{\text{Ρ}} + \hat{\text{Β}} = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{\text{Ο}} + 90^\circ + 40^\circ + 90^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{\text{Ο}} + 220^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{\text{Ο}} = 140^\circ .$$

76 Θέμα 1639

α. • Στο τρίγωνο ΑΔΕ είναι $\hat{\text{Ε}} = 90^\circ - \hat{\text{Δ}} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{\text{Γ}} = 90^\circ - \hat{\text{Β}} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

• Στο τετράπλευρο ΑΕΖΓ είναι

$$\hat{\text{Α}} + \hat{\text{Ε}} + \hat{\text{Ζ}} + \hat{\text{Γ}} = 360^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 60^\circ + \hat{\text{Ζ}} + 60^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{\text{Ζ}} + 210^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{\text{Ζ}} = 360^\circ - 210^\circ \Leftrightarrow \hat{\text{Ζ}} = 150^\circ .$$

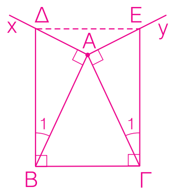
β. • Είναι $\hat{\text{Δ}} = 30^\circ$ και $\text{Ε}\hat{\text{Ζ}}\text{Γ} + \text{Δ}\hat{\text{Ζ}}\text{Γ} = 180^\circ \Leftrightarrow 150^\circ + \text{Δ}\hat{\text{Ζ}}\text{Γ} = 180^\circ \Leftrightarrow \text{Δ}\hat{\text{Ζ}}\text{Γ} = 30^\circ$.

Άρα $\hat{\text{Δ}} = \text{Δ}\hat{\text{Ζ}}\text{Γ}$, οπότε το τρίγωνο ΓΖΔ είναι ισοσκελές.

• Είναι $\text{Ε}\hat{\text{Ζ}}\text{Β} = \text{Γ}\hat{\text{Ζ}}\text{Δ} = 30^\circ$ και $\hat{\text{Β}} = 30^\circ$, οπότε $\text{Ε}\hat{\text{Ζ}}\text{Β} = \hat{\text{Β}}$.

Άρα το τρίγωνο ΕΒΖ είναι ισοσκελές.

77 Θέμα 1556



α. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{\text{Β}} = \hat{\text{Γ}}$.

Άρα $\hat{\text{Β}}_1 = \hat{\text{Γ}}_1$ ως συμπληρώματα ίσων γωνιών.
Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:
- $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ}$
- $\hat{\text{Β}}_1 = \hat{\text{Γ}}_1$

Οπότε είναι ίσα, άρα $\text{ΒΔ} = \text{ΓΕ}$.

β. Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα, έχουμε $\text{ΑΔ} = \text{ΑΕ}$, οπότε $\text{Α}\hat{\text{Δ}}\text{Ε} = \text{Δ}\hat{\text{Ε}}\text{Α}$.
Είναι $\text{Δ}\hat{\text{Α}}\text{Ε} = 360^\circ - \text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Γ} - \text{Δ}\hat{\text{Α}}\text{Β} - \text{Ε}\hat{\text{Α}}\text{Γ} = 360^\circ - 80^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 100^\circ$.
Στο τρίγωνο ΑΔΕ είναι $\text{Δ}\hat{\text{Α}}\text{Ε} + \text{Α}\hat{\text{Δ}}\text{Ε} + \text{Δ}\hat{\text{Ε}}\text{Α} = 180^\circ \Leftrightarrow 100^\circ + \text{Α}\hat{\text{Δ}}\text{Ε} + \text{Α}\hat{\text{Δ}}\text{Ε} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\,\text{Α}\hat{\text{Δ}}\text{Ε} = 80^\circ \Leftrightarrow \text{Α}\hat{\text{Δ}}\text{Ε} = 40^\circ$.

Οπότε και $\text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Δ} = 40^\circ$.

78 Θέμα 1641

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ έχουν:

- $\text{ΑΔ} = \text{ΒΓ}$
- $\text{ΑΓ} = \text{ΒΕ}$

Οπότε είναι ίσα.

β. Επειδή τα τρίγωνα ΑΓΔ, ΒΓΕ είναι ίσα, έχουμε:

- $\text{Α}\hat{\text{Δ}}\text{Γ} = \text{Ε}\hat{\text{Γ}}\text{Β} = 40^\circ$
- $\text{ΓΔ} = \text{ΓΕ}$

Οπότε το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ισοσκελές.
Στο τρίγωνο ΔΑΓ είναι $\text{Α}\hat{\text{Δ}}\text{Γ} + \text{Α}\hat{\text{Γ}}\text{Δ} = 90^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + \text{Α}\hat{\text{Γ}}\text{Δ} = 90^\circ \Leftrightarrow \text{Α}\hat{\text{Γ}}\text{Δ} = 50^\circ$.

Είναι $\text{Δ}\hat{\text{Γ}}\text{Α} + \text{Ε}\hat{\text{Γ}}\text{Β} + \text{Δ}\hat{\text{Γ}}\text{Ε} = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + 40^\circ + \text{Δ}\hat{\text{Γ}}\text{Ε} = 180^\circ \Leftrightarrow \text{Δ}\hat{\text{Γ}}\text{Ε} = 90^\circ$.
Άρα το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

79 Θέμα 1661

α. Επειδή $AB = A\Gamma$, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, άρα η διάμεσος $A\Delta$ είναι ύψος και διχοτόμος του τριγώνου. Επειδή η $A\Delta$ είναι διχοτόμος του τριγώνου $AB\Gamma$, είναι $\Delta\hat{A}\Gamma = B\hat{A}\Delta = 30^o$, οπότε $\hat{A} = 60^o$.

Είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 60^o + \hat{B} + \hat{B} = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{B} = 120^o \Leftrightarrow \hat{B} = 60^o$.

Οπότε και $\hat{\Gamma} = 60^o$.

Για το τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^o$, άρα είναι ισόπλευρο.

β. Επειδή $A\Delta = AE$ το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές, οπότε $A\hat{\Delta}E = A\hat{E}\Delta$.

Στο τρίγωνο $A\Delta E$ έχουμε:

$\Delta\hat{A}E + A\hat{\Delta}E + A\hat{E}\Delta = 180^o \Leftrightarrow 30^o + 2A\hat{\Delta}E = 180^o \Leftrightarrow A\hat{\Delta}E = 75^o$, οπότε και $A\hat{E}\Delta = 75^o$.

γ. Είναι $E\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{\Delta}\Gamma - A\hat{\Delta}E = 90^o - 75^o = 15^o$.

80 Θέμα 1640

α. • Επειδή $A\Delta = AZ$, έχουμε $\hat{\Delta} = \Delta\hat{Z}A$.

Στο τρίγωνο $A\Delta Z$, είναι:

$\hat{A} + \hat{\Delta} + \Delta\hat{Z}A = 180^o \Leftrightarrow 70^o + 2\hat{\Delta} = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{\Delta} = 110^o \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 55^o$.

Οπότε $\Delta\hat{Z}A = \hat{\Delta} = 55^o$.

• Οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{B}$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΔ, ΒΕ που τέμνονται από την ΑΒ, οπότε είναι παραπληρωματικές.

Άρα $\hat{A} + \hat{B} = 180^o \Leftrightarrow 70^o + \hat{B} = 180^o \Leftrightarrow \hat{B} = 110^o$.

• Επειδή $BE = BZ$, έχουμε $E\hat{Z}B = \hat{E}$.

Στο τρίγωνο BEZ , είναι $\hat{B} + \hat{E} + E\hat{Z}B = 180^o \Leftrightarrow 110^o + 2\hat{E} = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{E} = 70^o \Leftrightarrow \hat{E} = 35^o$.

Οπότε $E\hat{Z}B = \hat{E} = 35^o$.

β. Είναι $\Delta\hat{Z}E = 180^o - \Delta\hat{Z}A - E\hat{Z}B = 180^o - 55^o - 35^o = 90^o$.

81 Θέμα 1605

α. i. Είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 90^o + 20^o + \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} = 70^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 35^o$.

Οπότε $\hat{B} = 20^o + \hat{\Gamma} = 20^o + 35^o = 55^o$.

ii. Επειδή η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, ισχύει ότι $B\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}\Gamma = 45^o$.

Είναι:
- $\hat{\omega} = B\hat{A}\Delta = 45^o$, ως εντός εναλλάξ
- $\hat{\varphi} = \hat{B} = 55^o$, ως εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη.

β. Είναι $\Delta\hat{A}E = A\hat{\Delta}E = 45^o$, οπότε το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές.

82 Θέμα 1689

α. Είναι $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^o$ και $\Delta\hat{A}E = 180^o - \hat{A} = 180^o - 60^o = 120^o$.

Επειδή το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές, ισχύει ότι $A\hat{\Delta}E = \hat{E}$.

Στο τρίγωνο $A\Delta E$ έχουμε $A\hat{\Delta}E + \hat{E} + \Delta\hat{A}E = 180^o \Leftrightarrow 2A\hat{\Delta}E + 120^o = 180^o \Leftrightarrow 2A\hat{\Delta}E = 60^o \Leftrightarrow A\hat{\Delta}E = 30^o$.

Οπότε και $\hat{E} = 30^o$.

β. Είναι $A\hat{\Delta}E = Z\hat{\Delta}\Gamma = 30^o$, ως κατακορυφήν και $\hat{\Gamma} = 60^o$.

Στο τρίγωνο $\Delta Z\Gamma$ έχουμε $Z\hat{\Delta}\Gamma + \Delta\hat{Z}\Gamma + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 30^o + \Delta\hat{Z}\Gamma + 60^o = 180^o \Leftrightarrow \Delta\hat{Z}\Gamma = 90^o$, άρα $EZ \perp B\Gamma$.

83 Θέμα 1603

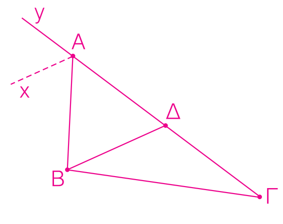
α. Στο τρίγωνο $ΔΕΓ$ είναι $\hat{E}=90^\circ$ και $E\hat{Δ}Γ=90^\circ-\hat{Γ}=90^\circ-40^\circ=50^\circ$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι $\hat{B}=90^\circ-\hat{Γ}=50^\circ$.

Είναι $Α\hat{Δ}Ε=180^\circ-Ε\hat{Δ}Γ=180^\circ-50^\circ=130^\circ$.

Οπότε στο $ΑΔΕΒ$ έχουμε $\hat{A}=\hat{E}=90^\circ$, $\hat{B}=50^\circ$ και $\hat{Δ}=130^\circ$.

84 Θέμα 1596



α. i. Είναι $Α\hat{B}Δ=Β\hat{A}x=\dfrac{\widehat{A}_{εξ}}{2}=\dfrac{120^\circ}{2}=60^\circ$, ως εντός εναλλάξ.

ii. Είναι $Β\widehat{A}Δ=180^\circ-\widehat{A}_{εξ}=180^\circ-120^\circ=60^\circ$.

Στο τρίγωνο $ΑΒΔ$ έχουμε

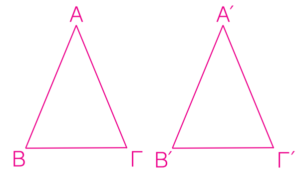
$Β\widehat{A}Δ+Α\widehat{B}Δ+Α\widehat{Δ}Β=180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ+60^\circ+Α\widehat{Δ}Β=180^\circ \Leftrightarrow Α\widehat{Δ}Β=60^\circ$

Άρα $Α\hat{B}Δ=Α\hat{Δ}Β$, οπότε το τρίγωνο $ΑΒΔ$ είναι ισόπλευρο.

iii. Είναι $ΑΓ-ΑΒ=ΑΓ-ΑΔ=ΔΓ$.

β. Είναι:
- $Β\hat{Δ}Α=2\hat{Γ} \Leftrightarrow 60^\circ=2\hat{Γ} \Leftrightarrow \hat{Γ}=30^\circ$
- $Α\hat{Δ}Β=60^\circ$, οπότε $Β\hat{Δ}Γ=180^\circ-60^\circ=120^\circ$
- $Δ\widehat{B}Γ=180^\circ-Β\widehat{Δ}Γ-\widehat{Γ}=180^\circ-120^\circ-30^\circ=30^\circ$

85 Θέμα 1565



α. Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $Α'Β'Γ'$ έχουν:
- $ΑΒ=Α'Β'$
- $ΑΓ=Α'Γ'$
- $\hat{A}=\hat{A}'$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Επειδή τα τρίγωνα είναι ισοσκελή έχουμε $\hat{B}=\hat{Γ}$ και $\hat{B}'=\hat{Γ}'$.

Επειδή $\hat{B}=\hat{B}'$, έχουμε $\hat{Γ}=\widehat{Γ'}$.

Επειδή τα τρίγωνα έχουν τις δύο γωνίες τους ίσες θα έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες, δηλαδή $\hat{A}=\hat{A}'$.
Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $Α'Β'Γ'$ έχουν:
- $ΑΓ=Α'Γ'$
- $\hat{Γ}=\hat{Γ}'$
- $\hat{A}=\hat{A}'$

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ).

86 Θέμα 1682

α. Τα τρίγωνα $ΑΕΖ$ και $ΑΒΔ$ έχουν:
- $ΑΕ=ΑΒ$
- $ΑΖ=ΑΔ$
- $Ε\hat{A}Ζ=Δ\hat{A}Β$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Είναι:
- $Δ\widehat{A}Β+Β\widehat{A}Ε=120^\circ+60^\circ=180^\circ$, οπότε τα $Δ, Α$ και $Ε$ είναι συνευθειακά.
- $Β\hat{E}Α=60^\circ$ και $Ζ\hat{Δ}Α=60^\circ$, οπότε $Β\hat{E}Α=Ζ\hat{Δ}Α$.

Επειδή οι εντός εναλλάξ γωνίες $Β\widehat{E}Δ$ και $Ζ\widehat{Δ}Ε$ είναι ίσες, έχουμε $ΕΒ//ΖΔ$.

87 Θέμα 1851

α. Είναι $\hat{B}_1 = 70^\circ$ και $2\Gamma\hat{E}B = 70^\circ \Leftrightarrow \Gamma\hat{E}B = 35^\circ$.

Η BE είναι διχοτόμος της $\hat{B}_{\varepsilon\xi}$ άρα $\hat{B}_2 = \hat{B}_1 = 70^\circ$.

Η γωνία $\hat{B}_2$ είναι η εξωτερική του τριγώνου $EB\Gamma$, άρα $\hat{B}_2 = E\hat{\Gamma}B + \Gamma\hat{E}B \Leftrightarrow 70^\circ = E\hat{\Gamma}B + 35^\circ \Leftrightarrow E\hat{\Gamma}B = 35^\circ$.

Δηλαδή $E\hat{\Gamma}B = \Gamma\hat{E}B = 35^\circ$, άρα το τρίγωνο ΓBE είναι ισοσκελές.

β.
- Η BE είναι εξωτερική διχοτόμος, άρα $\hat{B}_{\varepsilon\xi} = 2\hat{B}_1 = 2 \cdot 70^\circ = 140^\circ$, οπότε $B = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$.
- Η ΓE διχοτομεί τη γωνία $\hat{\Gamma}$, άρα $\hat{\Gamma} = 2E\hat{\Gamma}B = 70^\circ$.
- Είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + 40^\circ + 70^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 70^\circ$.

Θέμα 4

88 Θέμα 1708

α. i. Στο τρίγωνο ABE , το $A\Delta$ είναι ύψος και διάμεσος. Οπότε το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.

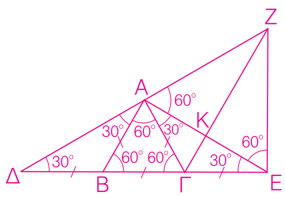
ii. Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές, οπότε $A\hat{E}B = \hat{B} = 50^\circ$.

Είναι $E\hat{A}B + \hat{B} + A\hat{E}B = 180^\circ \Leftrightarrow E\hat{A}B + 50^\circ + 50^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow E\hat{A}B = 80^\circ$.

Οπότε $\Gamma\hat{A}E = \Gamma\hat{A}B - E\hat{A}B = 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ$.

β. Είναι:
- $\hat{Z} = 90^\circ$
- $Z\hat{E}\Gamma = A\hat{E}B = 50^\circ$
- $Z\hat{\Gamma}E + \hat{Z} + Z\hat{E}\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow Z\hat{\Gamma}E + 90^\circ + 50^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow Z\hat{\Gamma}E = 40^\circ$

89 Θέμα 1819



α. Είναι $AB = B\Gamma = \Gamma A = B\Delta = \Gamma E$.

Από τα ισοσκελή τρίγωνα ΓAE και $B\Delta A$ έχουμε αντίστοιχα:

- $A\hat{\Gamma}E = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
- $\Gamma\hat{A}E = A\hat{E}\Gamma = \dfrac{180^\circ - 120^\circ}{2} = \dfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ$
- $A\hat{B}\Delta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
- $B\hat{A}\Delta = B\hat{\Delta}A = \dfrac{180^\circ - 120^\circ}{2} = \dfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

β. Είναι:
- $Z\hat{A}E = 180^\circ - \Delta\hat{A}E = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$
- $A\hat{E}Z = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

Οπότε $Z\hat{A}E = A\hat{E}Z$, άρα $ZA = ZE$.

Επειδή $ZA = ZE$ και $\Gamma A = \Gamma E$ τα Γ , Z ανήκουν στη μεσοκάθετο του AE .

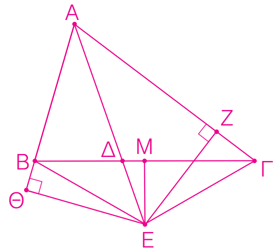
Άρα η ΓZ είναι η μεσοκάθετος του AE .

γ. Είναι:
- $\Gamma Z \perp AE$, αφού η ΓZ μεσοκάθετη του AE
- $B\hat{A}E = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$, άρα $BA \perp AE$

Επομένως $AB \parallel \Gamma Z$.

90 Θέμα 1707

α. Η ME είναι η μεσοκάθετος του $B\Gamma$, οπότε $EB = E\Gamma$, άρα το τρίγωνο $EB\Gamma$ είναι ισοσκελές.



β. Επειδή το E ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$, θα ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας, οπότε $E\Theta = EZ$. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΘBE και $Z\Gamma E$ έχουν:

- $EB = E\Gamma$
- $E\Theta = EZ$

Οπότε είναι ίσα.

γ. Επειδή τα τρίγωνα ΘBE και $Z\Gamma E$ είναι ίσα, έχουμε $A\hat{\Gamma}E = \Theta\hat{B}E$.

Οπότε $A\hat{\Gamma}E + A\hat{B}E = \Theta\hat{B}E + A\hat{B}E = 180^\circ$.

91 Θέμα 1792

α. Η $Z\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο $AE\Delta$, οπότε $Z\hat{\Delta}\Gamma = \Delta\hat{E}A + E\hat{A}\Delta = 90^\circ + \dfrac{\hat{A}}{2}$.

β. Στο τρίγωνο $AZ\Delta$ η AE είναι διχοτόμος και ύψος, άρα είναι και διάμεσος.
Οπότε η AE είναι μεσοκάθετος του $Z\Delta$.
Επειδή το K ανήκει στη μεσοκάθετο του $Z\Delta$, έχουμε $KZ = K\Delta$.

γ. Στο τρίγωνο $\Delta H\Gamma$ είναι $Z\hat{H}\Gamma = 180^\circ - Z\hat{\Delta}\Gamma - \hat{\Gamma} = = 180^\circ - (90^\circ + \dfrac{\hat{A}}{2}) - \hat{\Gamma} = 180^\circ - 90^\circ - \dfrac{\hat{A}}{2} - \hat{\Gamma}$

$$= 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} - \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - \hat{A} - 2\hat{\Gamma}}{2} = \frac{\hat{B} + \hat{\Gamma} - 2\hat{\Gamma}}{2} = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$$

92 Θέμα 1828

α. • Στο ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ το ύψος ΓE είναι και διάμεσος, οπότε το E είναι το μέσο της AB.
Οπότε $B\Delta = \dfrac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Delta = \dfrac{AB}{2} \Leftrightarrow B\Delta = BE$.
Άρα το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές.

- Είναι:
  - $A\hat{\Theta}Z = \hat{B} = 60^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη
  - $A\hat{Z}\Theta = \hat{\Gamma} = 60^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη
  - $\hat{A} = 60^\circ$

Άρα το τρίγωνο $A\Theta Z$ είναι ισόπλευρο.

β. Το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές με $\hat{\Delta} = \Delta\hat{E}B$ και η $\hat{B}$ είναι εξωτερική γωνία, οπότε

$\hat{B} = \hat{\Delta} + \Delta\hat{E}B \Leftrightarrow 60^\circ = \hat{\Delta} + \hat{\Delta} \Leftrightarrow 2\hat{\Delta} = 60^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 30^\circ$.

Οπότε και $\Delta\hat{E}B = 30^\circ$.

Είναι:
- $E\hat{\Theta}Z = 180^\circ - A\hat{\Theta}Z = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
- $\Theta\hat{E}Z = \Delta\hat{E}B = 30^\circ$
- $\Theta\hat{Z}E = \hat{\Delta} = 30^\circ$, ως εντός εναλλάξ

γ. Επειδή:
- $\Theta\hat{E}Z = \Theta\hat{Z}E$ το τρίγωνο ΘEZ είναι ισοσκελές, οπότε $\Theta Z = \Theta E$
- $A\Theta = \Theta Z$, αφού το τρίγωνο $A\Theta Z$ είναι ισόπλευρο έχουμε $A\Theta = \Theta E$

Άρα $AE = A\Theta + \Theta E = 2A\Theta = 2\Theta Z$.

δ. Είναι:
- $AB = 2AE = 2 \cdot 2\Theta E = 4\Theta E$, άρα $3AB = 12\Theta E$
- $\Theta B = E\Theta + EB = E\Theta + AE = 3\Theta E$, άρα $4\Theta B = 12\Theta E$

Οπότε $3AB = 4\Theta B$.

93 Θέμα 1888

α. Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και η AM είναι διάμεσος, θα είναι και ύψος.
Αφού $AM \perp B\Gamma$ και $\Delta\Gamma \perp B\Gamma$, προκύπτει $AM // \Gamma\Delta$.

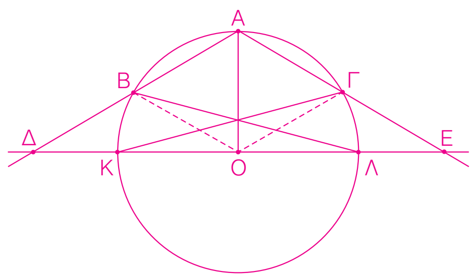
β. Είναι:
- $\Gamma\Delta = AB$ και $AB = A\Gamma$, οπότε $\Gamma\Delta = \Gamma A$, άρα $\Gamma\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}A$
- $\Gamma\hat{\Delta}A = \Delta\hat{A}M$, ως εντός εναλλάξ

Άρα $\Gamma\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}M$, οπότε η $A\Delta$ είναι η διχοτόμος της $M\hat{A}\Gamma$.

γ. Είναι $\Delta\hat{A}\Gamma = \dfrac{M\hat{A}\Gamma}{2} = \dfrac{90^o - \hat{\Gamma}}{2} = 45^o - \dfrac{\hat{\Gamma}}{2} = 45^o - \dfrac{\hat{B}}{2}$, αφού το τρίγωνο $MA\Gamma$ είναι ορθογώνιο και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

δ. Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι: $A\Delta < A\Gamma + \Gamma\Delta \Leftrightarrow A\Delta < AB + AB \Leftrightarrow A\Delta < 2AB$.

94 Θέμα 1874



α. Φέρουμε τις OB και $O\Gamma$. Τα τρίγωνα OAB και $OA\Gamma$ είναι ισόπλευρα, οπότε $B\hat{A}\Gamma = B\hat{A}O + O\hat{A}\Gamma = 60^o + 60^o = 120^o$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔAO είναι $\hat{\Delta} = 90^o - 60^o = 30^o$ και $B\hat{O}\Delta = 90^o - 60^o = 30^o$.

Άρα $\hat{\Delta} = B\hat{O}\Delta$, οπότε το τρίγωνο $BO\Delta$ είναι ισοσκελές με $B\Delta = BO$.
Επομένως $B\Delta = BA$, άρα το B είναι το μέσο του $A\Delta$.
Όμοια το Γ είναι το μέσο του AE.

γ. Είναι $A\hat{O}\Gamma = 60^o$ και $B\hat{O}A = 60^o$ επειδή τα τρίγωνα $AO\Gamma$ και AOB είναι ισόπλευρα.

Οπότε:
- $K\hat{O}\Gamma = K\hat{O}A + A\hat{O}\Gamma = 90^o + 60^o = 150^o$
- $B\hat{O}\Lambda = B\hat{O}A + A\hat{O}\Lambda = 60^o + 90^o = 150^o$

Άρα οι επίκεντρες γωνίες $K\hat{O}\Gamma$ και $B\hat{O}\Lambda$ είναι ίσες.
Οπότε τα τόξα $\overset{\frown}{K\Gamma}$ και $\overset{\frown}{B\Lambda}$ είναι ίσα, άρα και οι αντίστοιχες χορδές $K\Gamma$ και ΛB είναι ίσες, δηλαδή $K\Gamma = \Lambda B$.

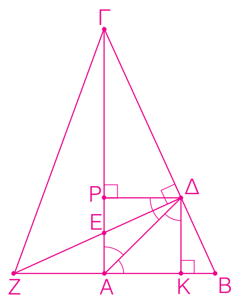
95 Θέμα 1894

α. i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο:
- $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ έχουμε $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow \hat{B} = 90^o - \hat{\Gamma}$
- $\overset{\Delta}{\Delta E\Gamma}$ έχουμε $\Delta\hat{E}\Gamma + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow \Delta\hat{E}\Gamma = 90^o - \hat{\Gamma}$

Οπότε $\hat{B} = \Delta\hat{E}\Gamma$.

ii. Τα ορθογώνια τρίγωνα $P\Delta E$ και $K\Delta B$ έχουν:
- $\Delta\hat{E}\Gamma = \hat{B}$
- $\Delta P = \Delta K$, αφού η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$

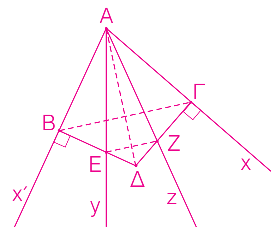
Οπότε είναι ίσα, άρα $\Delta E = \Delta B$.



β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta E\Gamma$ και ΔBZ έχουν:
- $\Delta\hat{E}\Gamma = \hat{B}$, από το **α.i.**
- $\Delta E = \Delta B$, από το **α.ii.**

Οπότε τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα $\Delta\Gamma = \Delta Z$.
Επομένως, το τρίγωνο $\Delta\Gamma Z$ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο.
Άρα $\Delta\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{Z}\Gamma$ και $\Delta\hat{\Gamma}Z + \Delta\hat{Z}\Gamma = 90^o \Leftrightarrow 2\Delta\hat{\Gamma}Z = 90^o \Leftrightarrow \Delta\hat{\Gamma}Z = 45^o$.

96 Θέμα 1849



α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΑΕ και ΓΑΖ έχουν:
- $AB = A\Gamma$
- $B\hat{A}E = \Gamma\hat{A}Z$

Οπότε είναι ίσα, άρα $AE = AZ$.
Επομένως το τρίγωνο ΕΑΖ είναι ισοσκελές.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ έχουν:
- $AB = A\Gamma$
- ΑΔ κοινή

Οπότε είναι ίσα, άρα $B\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}\Gamma$.

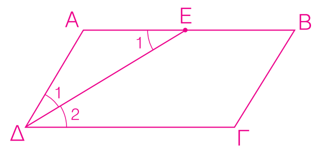
Επομένως η ΑΔ είναι η διχοτόμος της $x'\hat{A}x$.

γ. Έστω Κ το σημείο τομής των ΑΔ και ΒΓ .
Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΚ είναι διχοτόμος άρα και ύψος.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΓ είναι $\Gamma\hat{A}K + A\hat{\Gamma}K = 90^o \Leftrightarrow \Gamma\hat{A}\Delta = 90^o - A\hat{\Gamma}K$.
Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΓ , οπότε $A\hat{\Gamma}B = A\hat{B}\Gamma$.
Είναι $\Gamma\hat{B}\Delta = 90^o - A\hat{B}\Gamma = 90^o - A\hat{\Gamma}B = 90^o - A\hat{\Gamma}K$.
Άρα $\Gamma\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{B}\Delta$.

17. Παραλληλόγραμμα

Θέμα 2

97 Θέμα 1538



α. Είναι:
- $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, αφού η ΒΕ διχοτόμος
- $\hat{E}_1 = \hat{\Delta}_2$, ως εντός εναλλάξ.

Οπότε $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$ άρα το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

β. Έχουμε:
- $A\Delta = AE$, αφού το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές
- $AB = 2A\Delta \Leftrightarrow AB = 2AE$

Οπότε το Ε είναι το μέσο του ΑΒ .

98 Θέμα 1610

α. Είναι $H\hat{B}Z = 180^o - \hat{B} = 180^o - \hat{\Delta} = E\hat{\Delta}\Theta$.

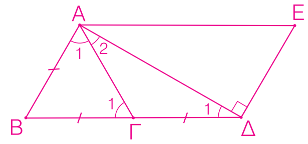
β. Είναι:
- $\Gamma\hat{Z}E = A\hat{E}Z$, ως εντός εναλλάξ
- $B\hat{Z}H = \Gamma\hat{Z}E$, ως κατακορυφήν
- $\Delta\hat{E}\Theta = A\hat{E}Z$, ως κατακορυφήν

Οπότε $B\hat{Z}H = \Delta\hat{E}\Theta$.

γ. Είναι $A\Delta = B\Gamma$ και $AE = \Gamma Z$.
Οπότε $\Delta E = A\Delta - AE = B\Gamma - \Gamma Z = BZ$.
Τα τρίγωνα ΔΕΘ και ΒΖΗ έχουν:
- $\Delta E = BZ$
- $H\hat{B}Z = E\hat{\Delta}\Theta$
- $B\hat{Z}H = \Delta\hat{E}\Theta$

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ) , άρα $BH = \Theta\Delta$.

99 Θέμα 1637



α. Είναι:
- $\hat{A}_1 = \hat{B} = \hat{\Gamma}_1 = 60^o$
- $A\hat{\Gamma}\Delta = 180^o - \hat{\Gamma}_1 = 180^o - 60^o = 120^o$
- $\Gamma A = \Gamma\Delta$, άρα $\hat{A}_2 = \hat{\Delta}_1$

Στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι $A\hat{\Gamma}\Delta + \hat{\Delta}_1 + \hat{A}_2 = 180^o \Leftrightarrow 120^o + \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_1 = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{\Delta}_1 = 60^o \Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 = 30^o$.

Οπότε $\hat{A}_2 = \hat{\Delta}_1 = 30^o$ και $B\hat{A}\Delta = 60^o + 30^o = 90^o$.

β. Είναι:
- $B\hat{A}\Delta = 90^o$, οπότε $BA \perp A\Delta$ και $E\Delta \perp A\Delta$, άρα $AB // \Delta E$
- $B\Gamma = \Delta E \Leftrightarrow AB = \Delta E$

Άρα το $AB\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο.

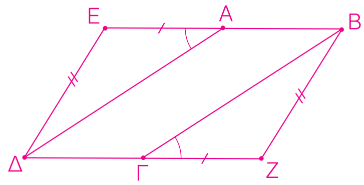
100 Θέμα 1654

α. Επειδή τα $AB\Delta\Gamma$ και $B\Delta EZ$ είναι παραλληλόγραμμα έχουμε $A\Gamma // = B\Delta$ και $B\Delta // = ZE$ αντίστοιχα. Άρα $A\Gamma // = ZE$, οπότε το $A\Gamma EZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Τα τρίγωνα ABZ και $\Gamma\Delta E$ έχουν:
- $AB = \Gamma\Delta$, αφού το $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο
- $BZ = \Delta E$, αφού το $BZE\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο
- $AZ = \Gamma E$, αφού το $AZE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο

Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ) , οπότε $A\hat{B}Z = \Gamma\hat{\Delta}E$.

101 Θέμα 1687



α. Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma Z$ έχουν:
- $A\Delta = B\Gamma$, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου.
- $AE = \Gamma Z$, αφού $AE = AB$, $\Gamma\Delta = \Gamma Z$ και $AB = \Gamma\Delta$, ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου.
- $B\hat{\Gamma}Z = E\hat{A}\Delta$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{A}$, $\hat{\Gamma}$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

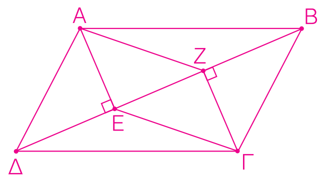
Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Από την ισότητα των τριγώνων $A\Delta E$ και $B\Gamma Z$ έχουμε $BZ = E\Delta$.

Είναι $EB = 2AB = 2\Gamma\Delta = \Delta Z$.

Οπότε το τετράπλευρο $EBZ\Delta$ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

102 Θέμα 1628



α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $EA\Delta$ και $Z\Gamma B$ έχουν:
- $A\Delta = B\Gamma$, αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο
- $A\hat{\Delta}E = \Gamma\hat{B}Z$ ως εντός εναλλάξ των παράλληλων $A\Delta$, $B\Gamma$ που τέμνονται από τη $B\Delta$.

Άρα είναι ίσα, οπότε $AE = \Gamma Z$.

β. Είναι:
- $AE \perp B\Delta$ και $\Gamma Z \perp B\Delta$, οπότε $AE // \Gamma Z$
- $AE = \Gamma Z$ (από το **α.** ερώτημα)

Άρα το $AE\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

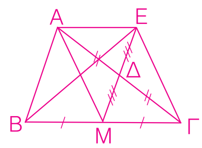
103 Θέμα 1678

α. Είναι:
- $ΓΟ \perp ΟΑ$ και $ΒΑ \perp ΟΑ$, οπότε $ΟΓ // ΑΒ$
- $ΟΓ = ΑΒ$

Άρα το $ΑΒΟΓ$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε τα $ΑΟ$ και $ΒΓ$ διχοτομούνται.

β. Το ορθογώνιο τρίγωνο $ΟΑΓ$ είναι ισοσκελές, αφού $ΟΑ = ΟΓ = ρ$, οπότε $Ο\hat{Α}Γ = Ο\hat{Γ}Α = 45^o$.
Το $ΑΒΟΓ$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε:
- $Α\hat{Β}Ο = Ο\hat{Γ}Α = 45^o$
- $Γ\hat{Α}Β = Γ\hat{Ο}Β = 90^o + 45^o = 135^o$

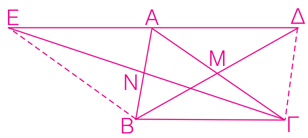
104 Θέμα 1559



α. Είναι $ΔΑ = ΔΓ$ και $ΔΕ = ΔΜ$.
Οπότε το $ΑΜΓΕ$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

β. Είναι $ΑΕ // = ΜΓ$, οπότε $ΑΕ // = ΒΜ$.
Άρα το ΑΕΜΒ είναι παραλληλόγραμμο .
Οπότε οι διαγώνιοί του $ΒΕ$ και $ΑΜ$ διχοτομούνται.
Άρα η $ΒΕ$ διέρχεται από το μέσο της $ΑΜ$.

105 Θέμα 1533



α. Είναι $ΜΑ = ΜΓ$ και $ΜΔ = ΜΒ$, οπότε το $ΑΔΓΒ$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοι του διχοτομούνται. Άρα $ΑΔ // ΒΓ$.

Είναι $ΝΑ = ΝΒ$ και $ΝΕ = ΓΝ$, οπότε το $ΑΕΒΓ$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Άρα $ΑΕ // ΒΓ$.

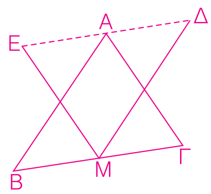
β. Από το **α.** ερώτημα αποδείξαμε ότι από το σημείο $Α$ διέρχονται τα τμήματα $ΑΕ$ και $ΑΔ$ που είναι παράλληλα στη $ΒΓ$.
Όμως από ένα σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική παράλληλη σ' αυτήν, οπότε τα τμήματα $ΑΔ$ και $ΑΕ$ έχουν τον ίδιο φορέα.
Άρα τα σημεία $Ε$, $Α$ και $Δ$ είναι συνευθειακά.

106 Θέμα 1600

α. Επειδή $ΑΑ' \perp ΒΔ$ και $ΓΓ' \perp ΒΔ$, έχουμε $ΑΑ' // ΓΓ'$.
β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΑ'Δ$ και $ΓΓ'Β$ έχουν:
- $ΑΔ = ΒΓ$, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου
- $Α\hat{Δ}Α' = Γ\hat{Β}Γ'$, ως εντός εναλλάξ των παράλληλων $ΑΔ$, $ΒΓ$ που τέμνονται από τη $ΒΔ$

Άρα είναι ίσα, οπότε $ΑΑ' = ΓΓ'$.
γ. Από το **α.** και **β.** ερώτημα έχουμε
$ΑΑ' // = ΓΓ'$, οπότε το $ΑΓ'ΓΑ'$ είναι παραλληλόγραμμο.

107 Θέμα 1535

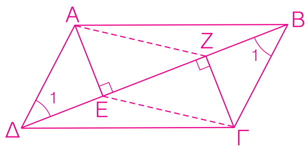


α.
- Επειδή $ΜΔ // = ΑΒ$, το $ΑΔΜΒ$ είναι παραλληλόγραμμο. Οπότε $ΔΑ = ΜΒ$.
- Αφού $ΜΕ // = ΑΓ$, το $ΑΕΜΓ$ είναι παραλληλόγραμμο. Οπότε $ΑΕ = ΜΓ$.
- Επειδή $ΜΒ = ΜΓ$, έχουμε $ΑΔ = ΑΕ$.

β. Τα τετράπλευρα ΑΔΜΒ, ΑΕΜΓ είναι παραλληλόγραμμα, οπότε $ΑΔ // ΒΓ$ και $ΑΕ // ΒΓ$.
Επειδή από το Α διέρχεται μοναδική παράλληλη της ΒΓ, τα τμήματα ΑΔ και ΑΕ βρίσκονται στον ίδιο φορέα. Άρα τα $Δ$, $Α$, $Ε$ είναι συνευθειακά.

γ. Είναι $ΔΕ = ΑΔ + ΑΕ = ΒΜ + ΜΓ = ΒΓ$.

108 Θέμα 1534



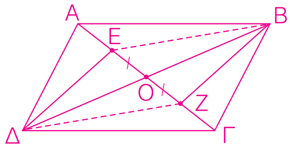
α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta E$ και ΓBZ έχουν:
- $A\Delta = B\Gamma$, αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο
- $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$, ως εντός εναλλάξ των παράλληλων $A\Delta$ και $B\Gamma$ που τέμνονται από τη $B\Delta$

Άρα είναι ίσα.

β. Επειδή $AE \perp B\Delta$ και $\Gamma Z \perp B\Delta$, έχουμε $AE \parallel \Gamma Z$.
Αφού τα τρίγωνα $A\Delta E$, ΓBZ είναι ίσα, έχουμε $AE = \Gamma Z$.

Άρα $AE \,//\!= \Gamma Z$, οπότε το $AE\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

109 Θέμα 1539



α. Τα τρίγωνα $O\Delta E$ και OBZ έχουν:
- $O\Delta = OB$
- $OE = OZ$
- $\Delta\hat{O}E = B\hat{O}Z$, ως κατακορυφήν γωνίες

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $\Delta E = BZ$.

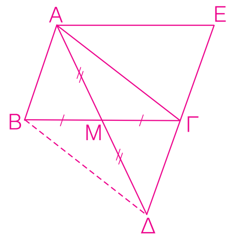
β. Είναι $OE = OZ$ και $OB = O\Delta$.
Οπότε το ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

110 Θέμα 1618

α. Τα τρίγωνα AOB και $\Gamma O\Delta$ έχουν:
- $OB = O\Delta$, αφού O μέσο του $B\Delta$
- $A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta$, ως κατακορυφήν
- $\hat{B} = \hat{\Delta}$, ως εντός εναλλάξ

Άρα είναι ίσα (ΓΠΓ) και έχουν: $AB = \Gamma\Delta$, $OA = O\Gamma$, $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.
β. Επειδή τα τρίγωνα AOB και $\Gamma O\Delta$ είναι ίσα, έχουμε $AB = \Gamma\Delta$.
Οπότε $AB \,//\!= \Gamma\Delta$, επομένως το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

111 Θέμα 1701

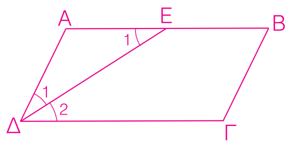


α. Είναι $MB = M\Gamma$ και $MA = M\Delta$, οπότε το $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

β. Είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AE \parallel B\Gamma$, οπότε το $AE\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο.

Επομένως $B\Gamma = AE$, οπότε $BM = \dfrac{B\Gamma}{2} = \dfrac{AE}{2}$.

112 Θέμα 1557



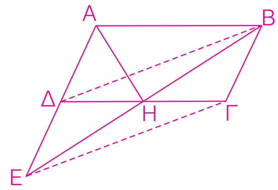
α. Είναι E το μέσο του AB και $AB = 2B\Gamma \Leftrightarrow 2AE = 2B\Gamma \Leftrightarrow AE = B\Gamma$.

Αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε $B\Gamma = A\Delta$.
Άρα $AE = A\Delta$, οπότε το τρίγωνο $EA\Delta$ είναι ισοσκελές.

β. Είναι:
- $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$, αφού το τρίγωνο $EA\Delta$ είναι ισοσκελές με $AE = A\Delta$.
- $\hat{\Delta}_2 = \hat{E}_1$, ως εντός εναλλάξ

Οπότε $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, άρα η ΔE είναι διχοτόμος της $\hat{\Delta}$.

113 Θέμα 1531

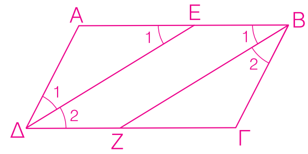


α. Είναι $AB=2B\Gamma \Leftrightarrow AB=2A\Delta \Leftrightarrow AB=AE$.
Άρα το τρίγωνο BAE είναι ισοσκελές με $AB=AE$.

β. Είναι $\Delta E=A\Delta$ και $A\Delta //= B\Gamma$.
Οπότε $\Delta E //= B\Gamma$, άρα το $\Delta E\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Επειδή το $\Delta E\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο, οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, άρα $EH=HB$.
Οπότε η AH είναι διάμεσος του τριγώνου BAE .

114 Θέμα 1609



α. Τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $B\Gamma Z$ έχουν:
- $A\Delta=B\Gamma$
- $\hat{\Delta}_1=\hat{B}_2$, ως μισά των ίσων γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$
- $\hat{A}=\hat{\Gamma}$

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ).

β. Επειδή $AB=\Gamma\Delta$ και $AE=\Gamma Z$, αφού τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα, έχουμε $BE=\Delta Z$, ως διαφορές ίσων τμημάτων.
Αφού $BE //= \Delta Z$ το ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

115 Θέμα 1642

α. Επειδή $\Delta B=\Delta M$ και $\Delta A=\Delta E$, το $ABEM$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

β. Επειδή το $ABEM$ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε $ME=AB$.

Είναι $B\Gamma=2AB \Leftrightarrow AB=\dfrac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow AB=M\Gamma \Leftrightarrow ME=M\Gamma$.

Θέμα 4

116 Θέμα 1785

α. Επειδή $AK=A\Lambda$ το τρίγωνο $AK\Lambda$ είναι ισοσκελές, οπότε η διάμεσος AM είναι και διχοτόμος της $\hat{A}$, οπότε $\Delta\hat{A}E=\Lambda\hat{A}M$.

Είναι $\Lambda\hat{A}M=\Delta\hat{E}A$, ως εντός εναλλάξ, οπότε $A\hat{E}\Delta=\Delta\hat{A}E$.
Άρα $A\Delta=\Delta E$.

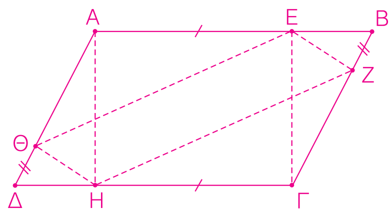
β. Είναι $B\Gamma+\Gamma E=A\Delta+\Gamma E=\Delta E+\Gamma E=\Delta\Gamma=AB$.

γ. Είναι:
- $\hat{A}+\hat{B}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{B}=180^\circ-\hat{A}$, ως εντός και επί τα αυτά μέρη
- $\hat{A}+A\hat{\Lambda}K+A\hat{K}\Lambda=180^\circ \Leftrightarrow A\hat{\Lambda}K+A\hat{\Lambda}K=180^\circ-\hat{A} \Leftrightarrow 2A\hat{\Lambda}K=\hat{B}$

Άρα $\hat{B}=2A\hat{\Lambda}K$.

117 Θέμα 1839

α. Επειδή $AE //= \Gamma H$ το $AE\Gamma H$ είναι παραλληλόγραμμο.



β. Τα τρίγωνα $\Delta H\Theta$ και BEZ έχουν:
- $\Delta H=BE$, αφού $\Delta H=\Delta\Gamma-H\Gamma=AB-AE=BE$
- $\hat{\Delta}=\hat{B}$, ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου
- $\Delta\Theta=BZ$, από υπόθεση

Οπότε είναι ίσα $(\Pi\Gamma\Pi)$, άρα $\Theta H=EZ$, (1).

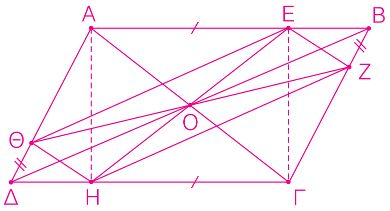
Τα τρίγωνα $ΑΘΕ$ και $ΓΗΖ$ έχουν:

- $ΑΕ = ΓΗ$, από υπόθεση
- $\widehat{Α} = \widehat{Γ}$, ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου
- $ΑΘ = ΓΖ$, αφού $ΑΘ = ΑΔ - ΘΔ = ΒΓ - ΒΖ = ΓΖ$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $ΘΕ = ΗΖ$.

Επομένως το τετράπλευρο $ΕΖΗΘ$ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Έστω $Ο$ το μέσον της $ΑΓ$.



- Επειδή το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, άρα η $ΒΔ$ διέρχεται από το $Ο$.
- Επειδή το $ΑΕΓΗ$ είναι παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, άρα η $ΕΗ$ διέρχεται από το $Ο$ που είναι το μέσον της $ΑΓ$.
- Επειδή το $ΕΖΗΘ$ είναι παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, άρα η $ΘΖ$ διέρχεται από το μέσον της $ΕΗ$ που είναι το $Ο$.

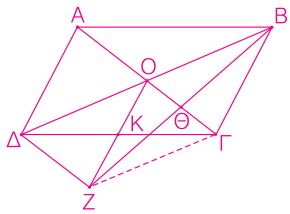
Άρα οι $ΑΓ$, $ΒΔ$, $ΕΗ$ και $ΖΘ$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

118 Θέμα 1877

α. Επειδή $ΚΟ = ΚΖ$ και $ΚΔ = ΚΓ$, το $ΟΓΖΔ$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $ΓΖ // = ΟΔ$.
Οπότε $ΓΖ // = ΟΒ$, επομένως το $ΟΒΓΖ$ είναι παραλληλόγραμμο.
Άρα τα $ΟΓ$ και $ΒΖ$ διχοτομούνται.

β. Επειδή το $ΟΔΖΓ$ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε $ΔΖ = ΟΓ$ και αφού $ΟΓ = ΑΟ$, έχουμε $ΑΟ = ΔΖ$.

γ. Τα τρίγωνα $ΑΟΒ$ και $ΔΖΓ$ έχουν:



- $ΟΑ = ΔΖ$
- $ΟΒ = ΓΖ$
- $ΑΒ = ΓΔ$

Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ).

119 Θέμα 1857

α. Είναι:
- $Β\hat{Α}Δ = Δ\hat{Α}Ε$, αφού $ΑΔ$ διχοτόμος της $\hat{Α}$
- $Β\hat{Α}Δ = Α\hat{Δ}Ε$, ως εντός εναλλάξ

Άρα $Δ\hat{Α}Ε = Α\hat{Δ}Ε$, οπότε το τρίγωνο $ΑΕΔ$ είναι ισοσκελές.

β. Στο ισοσκελές τρίγωνο $ΑΕΔ$ η $ΕΚ$ είναι διάμεσος, οπότε είναι και ύψος.
Άρα η $ΕΚ$ είναι η μεσοκάθετος του $ΑΔ$.

γ. Τα τρίγωνα $ΑΚΒ$, $ΚΔΖ$ έχουν:
- $ΚΑ = ΚΔ$
- $Α\hat{Κ}Β = Δ\hat{Κ}Ζ$
- $Β\hat{Α}Κ = Κ\hat{Δ}Ζ$, ως εντός εναλλάξ

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ).

δ. Επειδή τα τρίγωνα $ΑΚΒ$ και $ΚΔΖ$ είναι ίσα, έχουμε $ΚΒ = ΚΖ$.
Επειδή $ΚΑ = ΚΔ$ και $ΚΒ = ΚΖ$, το $ΑΖΔΒ$ είναι παραλληλόγραμμο.

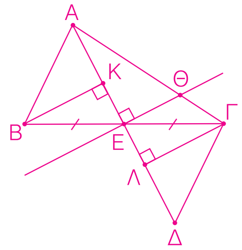
120 Θέμα 1890

α. i. Έχουμε $ΕΒ = ΕΓ$ και $ΕΑ = ΕΔ$, οπότε το $ΑΒΔΓ$ είναι παραλληλόγραμμο, επομένως $ΑΒ = ΓΔ$. Άρα η απόσταση των χωριών $Α$ και $Β$ είναι ίση με την απόσταση των χωριών $Γ$ και $Δ$.

ii. Επειδή το $ΑΒΔΓ$ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε $ΑΒ // ΓΔ$, οπότε οι δρόμοι $ΑΒ$ και $ΓΔ$ όσο και να προεκταθούν αποκλείεται να συναντηθούν.

iii. Φέρουμε $ΒΚ \perp ΑΔ$ και $ΓΛ \perp ΑΔ$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΒΚΕ$ και $ΓΛΕ$ έχουν:
- $ΕΒ = ΕΓ$
- $Β\hat{Ε}Κ = Γ\hat{Ε}Λ$



Οπότε είναι ίσα, άρα $ΒΚ = ΓΛ$.

Δηλαδή τα χωριά $Β$, $Γ$ ισαπέχουν από το δρόμο $ΑΔ$.

β. Για να ισαπέχει κάποιο σημείο από τα $Α$ και $Δ$, θα πρέπει να ανήκει στη μεσοκάθετο του $ΑΔ$.

Αφού το σημείο αυτό ανήκει στο δρόμο $ΑΓ$, θα είναι το σημείο τομής $Θ$ της $ΑΓ$ με τη μεσοκάθετο του $ΑΔ$.

121 Θέμα 1882

α. Στο τρίγωνο $ΑΕΜ$ η $ΑΔ$ είναι διχοτόμος και ύψος, οπότε είναι ισοσκελές.

Είναι:
- $Α\hat{Ε}Μ = Α\widehat{Μ}Ε$, αφού $ΑΕ = ΑΜ$
- $Α\hat{Ε}Μ = Μ\widehat{Λ}Β$, ως εντός εναλλάξ
- $Α\widehat{Μ}Ε = Β\widehat{Μ}Λ$, ως κατακορυφήν.

Άρα $Β\widehat{Μ}Λ = Μ\widehat{Λ}Β$, οπότε το τρίγωνο $ΒΜΛ$ είναι ισοσκελές.

Είναι:
- $\widehat{Κ} = Γ\widehat{Α}Δ$, ως εντός εναλλάξ.
- $Γ\widehat{Α}Δ = Δ\widehat{Α}Β$, γιατί η $ΑΔ$ είναι διχοτόμος της $\widehat{Α}$.

Άρα $Δ\widehat{Α}Β = \widehat{Κ}$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ισοσκελές.

β. Από τα ισοσκελή τρίγωνα $ΑΕΜ$ και $ΜΒΛ$ και επειδή το $Μ$ είναι μέσο του $ΑΒ$, έχουμε $ΑΕ = ΑΜ = ΜΒ = ΒΛ$.

Οπότε $ΑΕ = // ΒΛ$, άρα το $ΑΛΒΕ$ είναι παραλληλόγραμμο.

122 Θέμα 1746

α. Το άθροισμα των γωνιών του εξαγώνου είναι $(2 \cdot 6 - 4)$ ορθές, δηλαδή $(2 \cdot 6 - 4) \cdot 90^\circ = 8 \cdot 90^\circ = 720^\circ$.

Οπότε $\hat{α} + \hat{γ} + \hat{ε} + \hat{β} + \hat{δ} + \hat{ζ} = 720^\circ \Rightarrow \hat{α} + \hat{γ} + \hat{ε} + \hat{α} + \hat{γ} + \hat{ε} = 720^\circ \Rightarrow 2(\hat{α} + \hat{γ} + \hat{ε}) = 720^\circ \Rightarrow \hat{α} + \hat{γ} + \hat{ε} = 360^\circ$.

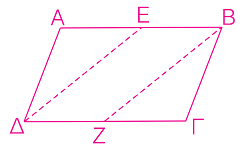
β. i. Είναι $\hat{Α} + \hat{Η} = \hat{α} + 180^\circ - Η\hat{Ζ}Ε - Η\hat{Ε}Ζ = \hat{α} + 180^\circ - (180^\circ - \hat{ζ}) - (180^\circ - \hat{δ}) = \hat{α} + 180^\circ - 180^\circ + \hat{ζ} - 180^\circ + \hat{δ}$

$$= \hat{α} + \hat{ζ} + \hat{δ} - 180^\circ = \hat{α} + \hat{ε} + \hat{γ} - 180^\circ = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$$

ii. Επειδή οι γωνίες $\hat{Α}$, $\hat{Η}$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη και παραπληρωματικές, προκύπτει $ΑΘ // ΗΔ$.

Όμοια έχουμε ότι $\hat{Α} + \hat{Θ} = 180^\circ$, οπότε $ΑΗ // ΘΔ$. Άρα το $ΑΘΔΗ$ είναι παραλληλόγραμμο.

123 Θέμα 1730



α. • Επειδή το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε $ΑΒ // = ΓΔ \Rightarrow \dfrac{ΑΒ}{2} // = \dfrac{ΓΔ}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow ΕΒ // = ΔΖ$, άρα το $ΔΕΒΖ$ είναι παραλληλόγραμμο.

Οπότε ο ισχυρισμός 1 είναι αληθής.

- Είναι:
  - $Α\hat{Ε}Δ = Ε\hat{Δ}Γ$, ως εντός εναλλάξ
  - $Ε\hat{Δ}Γ = Β\hat{Ζ}Γ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη

Επομένως $Α\hat{Ε}Δ = Β\hat{Ζ}Γ$. Άρα ο ισχυρισμός 2 είναι αληθής.

- Ο ισχυρισμός 3 δεν είναι αληθής.

β. Ο ισχυρισμός 3 είναι αληθής, αν και μόνο αν $A\hat{\Delta}E = E\hat{\Delta}\Gamma$ και $A\hat{B}Z = Z\hat{B}\Gamma$.

Επειδή $AB // \Gamma\Delta$ έχουμε $E\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{E}\Delta$, δηλαδή $A\hat{\Delta}E = A\hat{E}\Delta$.

Οπότε το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές με $AE = A\Delta \Leftrightarrow \frac{AB}{2} = A\Delta \Leftrightarrow AB = 2A\Delta$.

Στην περίπτωση αυτή και η BZ είναι η διχοτόμος της $\hat{B}$.
Άρα η ζητούμενη σχέση είναι $AB = 2A\Delta$.

124 Θέμα 1805

α. i. • Το τρίγωνο $B\Gamma Z$ είναι ισοσκελές, οπότε $B\hat{\Gamma}Z = B\hat{Z}\Gamma$ και η $\hat{B}$ είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο $B\Gamma Z$, οπότε $\hat{B} = B\hat{\Gamma}Z + B\hat{Z}\Gamma = 2B\hat{\Gamma}Z$.

• Το τρίγωνο $\Delta\Gamma E$ είναι ισοσκελές, οπότε $\Delta\hat{\Gamma}E = \Delta\hat{E}\Gamma$ και η $\hat{\Delta}$ είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο $\Delta\Gamma E$, οπότε $\hat{\Delta} = \Delta\hat{\Gamma}E + \Delta\hat{E}\Gamma = 2\Delta\hat{\Gamma}E$.

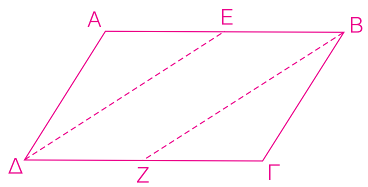
Έχουμε $\hat{B} = \hat{\Delta} \Leftrightarrow 2B\hat{\Gamma}Z = 2\Delta\hat{\Gamma}E \Leftrightarrow B\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{\Gamma}E$.

ii. Είναι $B\hat{\Gamma}Z + B\hat{\Gamma}\Delta + \Delta\hat{\Gamma}E = B\hat{Z}\Gamma + B\hat{\Gamma}\Delta + B\hat{Z}\Gamma = 2B\hat{Z}\Gamma + B\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{B}\Gamma + B\hat{\Gamma}\Delta = 180^o$.
Άρα τα Z , Γ , E είναι συνευθειακά.

β. Το λάθος είναι ότι θεώρησε ως δεδομένο ότι τα σημεία Z , Γ , E είναι συνευθειακά, ώστε να αποδείξει ότι $B\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{E}\Gamma$.

125 Θέμα 1731

α. • Είναι $EB // \Delta Z$ και $AB = \Gamma\Delta \Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Rightarrow EB = \Delta Z$.



Οπότε το ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.
Άρα ο ισχυρισμός 1 είναι αληθής.

• Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma Z$ έχουν:
- $A\Delta = B\Gamma$
- $AE = \Gamma Z$, ως μισά ίσων τμημάτων
- $\hat{A} = \hat{\Gamma}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα ο ισχυρισμός 2 είναι αληθής.

β. Έστω ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΖΓ είναι ισοσκελή.

Τότε θα ισχύει $A\Delta = AE \Leftrightarrow A\Delta = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow AB = 2A\Delta$.

Και αντιστρόφως, αν $AB = 2A\Delta$, τότε $A\Delta = AE$, οπότε τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΖΓ θα είναι ισοσκελή.
Άρα τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΖΓ είναι ισοσκελή αν και μόνο αν η μία πλευρά του παραλληλογράμμου είναι διπλάσια της άλλης.

126 Θέμα 1810

α. Επειδή:
- $M\Delta // = AB$, το $ABM\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $A\Delta // B\Gamma$, (1)
- $ME // = A\Gamma$, το $A\Gamma ME$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $AE // B\Gamma$, (2)

Από το A διέρχεται μόνο μία παράλληλη προς τη $B\Gamma$, οπότε από τις (1) και (2) έχουμε ότι τα σημεία Δ , A , E είναι συνευθειακά.

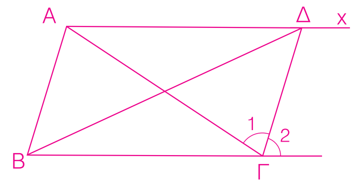
β. Επειδή τα $ABM\Delta$ και $A\Gamma ME$ είναι παραλληλόγραμμα, έχουμε $\Delta A = MB$ και $AE = M\Gamma$.

Είναι $\Delta E = \Delta A + AE = MB + M\Gamma = B\Gamma$.

Άρα $\Pi_{M\Delta E} = M\Delta + ME + \Delta E = AB + A\Gamma + B\Gamma = \Pi_{AB\Gamma}$.

γ. Το λάθος του μαθητή βρίσκεται στον ισχυρισμό του ότι $A\hat{\Delta}Z = \hat{A}_2$, θεωρώντας ότι η ευθεία ΔE διέρχεται από το A . Δηλαδή θεώρησε δεδομένο ότι τα σημεία Δ , A , E είναι συνευθειακά.

127 Θέμα 1709



α. Επειδή $Α\Delta // = ΒΓ$, το $ΑΒΓ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Άρα η $Β\Delta$ διέρχεται από το μέσο του τμήματος $ΑΓ$.

β. Επειδή $ΑΒ // Γ\Delta$, είναι $\hat{Γ}_1 = \hat{Α}$ ως εντός εναλλάξ.

Έχουμε $\hat{Γ}_{εξ} = 2\hat{Α} \Leftrightarrow \hat{Γ}_1 + \hat{Γ}_2 = 2\hat{Α} \Leftrightarrow \hat{Α} + \hat{Γ}_2 = 2\hat{Α} \Leftrightarrow \hat{Γ}_2 = \hat{Α}$.

Άρα η $Γ\Delta$ είναι διχοτόμος της $\hat{Γ}_{εξ}$.

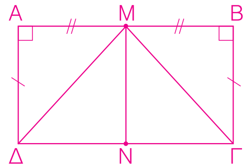
γ. Είναι $\hat{Γ}_{εξ} = \hat{Α} + \hat{Β}$, οπότε $\hat{Γ}_{εξ} = 2\hat{Α} \Leftrightarrow \hat{Α} + \hat{Β} = 2\hat{Α} \Leftrightarrow \hat{Β} = \hat{Α}$.

Άρα το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές.

18. Ορθογώνιο

Θέμα 2

128 Θέμα 1599



α. Τα τρίγωνα $ΑΜ\Delta$ και $ΜΒΓ$ είναι ορθογώνια και έχουν:

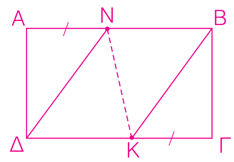
- $Α\Delta = ΒΓ$, ως απέναντι πλευρές ορθογωνίου
- $ΑΜ = ΜΒ$, διότι το $Μ$ είναι μέσο του $ΑΒ$

Άρα είναι ίσα, οπότε $Μ\Delta = ΜΓ$.

β. Στο ισοσκελές $ΜΓ\Delta$ η $ΜΝ$ είναι διάμεσος, οπότε και ύψος.

Άρα η ευθεία $ΜΝ$ είναι η μεσοκάθετος του $Γ\Delta$.

129 Θέμα 1692



α. Επειδή το $ΑΒΓ\Delta$ είναι ορθογώνιο, έχουμε $\hat{Α} = \hat{Γ} = 90^\circ$ και $Α\Delta = ΒΓ$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΝ\Delta$ και $ΒΓΚ$ έχουν:

- $Α\Delta = ΒΓ$
- $ΑΝ = ΓΚ$

Οπότε είναι ίσα.

β. Επειδή το $ΑΒΓ\Delta$ είναι ορθογώνιο, έχουμε $ΑΒ // = Γ\Delta$.

Είναι $ΑΝ = ΚΓ$, οπότε $ΒΝ = ΑΒ - ΑΝ = Γ\Delta - ΓΚ = Κ\Delta$

Επομένως $ΝΒ // = Κ\Delta$.

Άρα το $ΝΒΚ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

130 Θέμα 1653

α. Είναι:

- $ΑΒ = Γ\Delta$, (1) και $ΑΒ // Γ\Delta$, (2) ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $ΑΒΓ\Delta$.
- $ΑΕ = Γ\Delta$, (3) και $ΑΕ // Γ\Delta$, (4) ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου $ΑΓ\Delta Ε$.

Από τις (2), (4) έχουμε $ΑΒ // ΑΕ$, οπότε τα $Β$, $Α$ και $Ε$ είναι συνευθειακά.

Επειδή $ΑΒ = ΑΕ$, από τις (1), (3) έχουμε ότι $Α$ είναι μέσο του $ΒΕ$.

β. Στο τρίγωνο $ΒΕΓ$ το $ΓΑ$ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

γ. Είναι:

- $Β\hat{Γ}Α = Γ\hat{Α}\Delta$, ως εντός εναλλάξ
- $Γ\hat{Α}\Delta = Α\hat{\Delta}Ε$, ως εντός εναλλάξ

Άρα $Β\hat{Γ}Α = Α\hat{\Delta}Ε$.

131 Θέμα 1668

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Delta M$ και $\Gamma E M$ έχουν:
- $M\Delta = ME$
- $MB = M\Gamma$

Οπότε είναι ίσα, άρα $B\Delta = \Gamma E$.

β. Είναι $B\Delta \perp B\Gamma$ και $\Gamma E \perp B\Gamma$, οπότε $B\Delta // \Gamma E$.

Επειδή $B\Delta // = \Gamma E$, το $B\Delta E\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο και αφού επιπλέον είναι $\Delta \hat{B} \Gamma = 90^{o}$, είναι ορθογώνιο.

132 Θέμα 1683

α. Είναι $A\hat{O}\Gamma = B\hat{O}\Delta$, οπότε $\overset{\frown}{A\Gamma} = \overset{\frown}{B\Delta}$, άρα $A\Gamma = \Delta B$.

β. Στο τετράπλευρο $A\Gamma B\Delta$ οι διαγώνιοι AB και $\Gamma\Delta$ διχοτομούνται και είναι ίσες.
Άρα το $A\Gamma B\Delta$ είναι ορθογώνιο.

Θέμα 4

133 Θέμα 1729

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο:
- $A\Delta\Gamma$ είναι $\Delta\hat{\Gamma}A = 30^{o}$, οπότε $\Delta\hat{A}\Gamma = 60^{o}$
- $\Delta A E$ είναι $\Delta\hat{A}\Gamma = 60^{o}$, οπότε $A\hat{\Delta}E = 30^{o}$

Οι διαγώνιοι $A\Gamma$ και $B\Delta$ του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ είναι ίσες και διχοτομούνται, άρα $O\Gamma = \dfrac{A\Gamma}{2} = \dfrac{B\Delta}{2} = O\Delta$.

Επομένως το τρίγωνο $O\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση $\Delta\Gamma$, οπότε $O\hat{\Delta}\Gamma = O\hat{\Gamma}\Delta = 30^{o}$.

Είναι: $A\hat{\Delta}E + E\hat{\Delta}O + O\hat{\Delta}\Gamma = 90^{o} \Leftrightarrow 30^{o} + E\hat{\Delta}O + 30^{o} = 90^{o} \Leftrightarrow E\hat{\Delta}O = 30^{o}$.

Επομένως $A\hat{\Delta}E = E\hat{\Delta}O = O\hat{\Delta}\Gamma = 30^{o}$.

Άρα η γωνία $A\hat{\Delta}\Gamma$ χωρίζεται από τις ΔE και ΔB σε τρεις ίσες γωνίες.

β. Το τρίγωνο $OA\Delta$ είναι ισοσκελές με $OA = O\Delta$ και είναι $\Delta\hat{A}\Gamma = 60^{o}$ οπότε $\Delta\hat{A}E = 60^{o}$.
Άρα το ισοσκελές τρίγωνο $OA\Delta$ είναι ισόπλευρο με $OA = O\Delta = A\Delta$.
Όμως $A\Delta = B\Gamma$, οπότε $OA = B\Gamma$.
Τα ορθογώνια τρίγωνα AZO και $AB\Gamma$ έχουν:
- $OA = B\Gamma$
- $A\hat{\Gamma}B = 90^{o} - 30^{o} = 60^{o} = Z\hat{A}O$

Άρα είναι ίσα.

134 Θέμα 1822

α. Το $AHM\Delta$ είναι ορθογώνιο, αφού $\hat{\Delta} = \hat{M} = \hat{H} = 90^{o}$.

Άρα $\Delta\hat{A}H = 90^{o}$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο EMB έχουμε $\hat{E} = 90^{o} - \hat{B} \Rightarrow \hat{E} = 90^{o} - \hat{\Gamma}$, αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
Είναι $A\hat{\Theta}E = M\hat{\Theta}\Gamma$, ως κατακορυφήν και $M\hat{\Theta}\Gamma = 90^{o} - \hat{\Gamma}$ από το ορθογώνιο τρίγωνο $M\Theta\Gamma$,
οπότε $A\hat{\Theta}E = 90^{o} - \hat{\Gamma}$.
Επομένως $\hat{E} = A\hat{\Theta}E$, άρα το τρίγωνο $A\Theta E$ είναι ισοσκελές.

γ. Το $A\Delta MH$ είναι ορθογώνιο, οπότε $MH = A\Delta$.
Το τρίγωνο $A\Theta E$ είναι ισοσκελές, οπότε το ύψος AH είναι και διάμεσος, άρα $\Theta H = HE$.
Είναι $M\Theta + ME = MH - H\Theta + MH + HE = 2MH - H\Theta + H\Theta = 2A\Delta$.

135 Θέμα 1833

α. Επειδή $MA = M\Delta$ και $M\Gamma = MB$, το $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή επιπλέον έχει $\hat{A} = 90^o$ είναι ορθογώνιο.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο KEB έχουμε $K\hat{E}B = 90^o - K\hat{B}E \Leftrightarrow K\hat{E}B = 90^o - \frac{\hat{B}}{2}$.

γ. Είναι $\Delta\hat{B}E = 90^o - E\hat{B}A = 90^o - \frac{\hat{B}}{2}$.

Οπότε $\Delta\hat{B}E = K\hat{E}B$. Άρα $\Delta E = B\Delta$.

136 Θέμα 1800

α. Στο τετράπλευρο $MEH\Theta$ είναι $\hat{E} = \hat{H} = \hat{\Theta} = 90^o$, οπότε είναι ορθογώνιο.

β. Είναι $M\Theta \perp BH$ και $\Gamma H \perp BH$, άρα $M\Theta // A\Gamma$.

Οπότε $B\hat{M}\Theta = \hat{\Gamma}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη και αφού $\hat{\Gamma} = \hat{B}$ έχουμε $B\widehat{M}\Theta = \hat{B}$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΘBM και ΔBM έχουν:
- MB κοινή
- $B\hat{M}\Theta = \hat{B}$

Οπότε είναι ίσα, άρα $B\Theta = M\Delta$.

γ. Είναι $M\Delta + ME = B\Theta + \Theta H = BH$.

137 Θέμα 1879

α. Επειδή το σημείο K είναι το μέσο της χορδής $\Gamma\Delta$, έχουμε $OK \perp \Gamma\Delta$.

Είναι $AB // \Delta\Gamma$ και $\Delta E \perp AB$, άρα $\Delta E \perp \Delta\Gamma$.

Στο ΔKOE είναι $\hat{\Delta} = \hat{E} = \hat{K} = 90^o$, οπότε είναι ορθογώνιο.

Άρα $EO = \Delta K$ και αφού $\Delta K = K\Gamma$ έχουμε $EO = K\Gamma$.

Επομένως $EO // = K\Gamma$, άρα το $K\Gamma OE$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Στο ισοσκελές τρίγωνο $O\Gamma\Delta$ $(O\Gamma = O\Delta)$, η OK είναι διάμεσος, οπότε είναι και διχοτόμος, άρα $K\hat{O}\Gamma = \frac{\Delta\hat{O}\Gamma}{2}$.

Οι γωνίες $\Delta\hat{E}K$ και $K\hat{O}\Gamma$ είναι ίσες, ως οξείες με πλευρές παράλληλες, άρα $\Delta\hat{E}K = K\hat{O}\Gamma$.

Επομένως $\Delta\hat{E}K = \frac{\Delta\hat{O}\Gamma}{2}$.

γ. Είναι $KE = O\Delta$, ως διαγώνιοι του ορθογωνίου ΔEOK και $O\Delta = OB$, ως ακτίνες του κύκλου.

Άρα $KE = OB$.

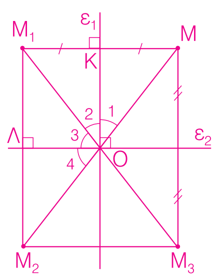
Στο ορθογώνιο τρίγωνο OBK, η KB είναι υποτείνουσά του, οπότε $OB < KB$.

Άρα $KE < KB$

2ος τρόπος

Είναι $KO \perp AB$ και $EO < AO = OB$, άρα για τα πλάγια τμήματα KE και KB έχουμε $KE < KB$.

138 Θέμα 1733



α. i. Η ευθεία ε_1 είναι η μεσοκάθετος του MM_1 , οπότε $OM = OM_1$.

ii. Στο ισοσκελές τρίγωνο OMM_1 η διάμεσος OK είναι και διχοτόμος, άρα $M\hat{O}M_1 = 2\hat{O}_2$.

Επειδή στο τρίγωνο M_1OM_2 η $O\Lambda$ είναι διάμεσος και ύψος το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Άρα η $O\Lambda$ είναι και διχοτόμος και ισχύει $M_1\hat{O}M_2 = 2\hat{O}_3$.

Τότε $M\hat{O}M_2 = M\hat{O}M_1 + M_1\hat{O}M_2 = 2\hat{O}_2 + 2\hat{O}_3 = 2(\hat{O}_2 + \hat{O}_3) = 2 \cdot 90^o = 180^o$.

Αφού η γωνία $M\hat{O}M_2$ είναι ευθεία γωνία, τα σημεία M, O και M_2 είναι συνευθειακά.

iii. Το $KM_1\Lambda O$ είναι ορθογώνιο, αφού έχει τρεις ορθές γωνίες $\hat{K} = \hat{\Lambda} = \hat{O} = 90^o$.

Επειδή το $KM_1\Lambda O$ είναι ορθογώνιο έχουμε $\hat{M}_1 = 90^o$, οπότε το τρίγωνο MM_1M_2 είναι ορθογώνιο.

β. Τα M_1 και M_3 είναι τα συμμετρικά του M ως προς τις ε_1 και ε_2 . Από το **α.ii.** ερώτημα έχουμε ότι τα M_1 , O και M_3 είναι συνευθειακά. Είναι

$OM_1 = OM = OM_2 = OM_3$, οπότε στο $MM_1M_2M_3$ οι διαγώνιοι διχοτομούνται και είναι ίσες, άρα είναι ορθογώνιο.

139 Θέμα 1891

α. Είναι:

- $A\hat{\Delta}T = T\hat{\Delta}E$ και $T\hat{\Delta}E = A\hat{T}\Delta$, ως εντός εναλλάξ, οπότε $A\hat{\Delta}T = A\hat{T}\Delta$, άρα το τρίγωνο $A\Delta T$ είναι ισοσκελές με $A\Delta = AT$.
- $\Gamma\hat{B}E = E\hat{B}T$ και $E\hat{B}T = B\hat{E}\Gamma$, ως εντός εναλλάξ, οπότε $\Gamma\hat{B}E = B\hat{E}\Gamma$.

Άρα το τρίγωνο $B\Gamma E$ είναι ισοσκελές με $\Gamma B = \Gamma E$.

Είναι $BT = AB - AT = AB - A\Delta = \Gamma\Delta - B\Gamma = \Gamma\Delta - \Gamma E = \Delta E$

Επειδή $BT // = \Delta E$, το ΔEBT είναι παραλληλόγραμμο.

β. • Στο ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta T$ η διχοτόμος του AN είναι και ύψος, οπότε $AN \perp \Delta T$, άρα $M\hat{N}K = 90^o$, και $\Delta T // BE$, οπότε είναι $AN \perp BE$, άρα $N\hat{K}\Lambda = 90^o$.

- Στο ισοσκελές τρίγωνο $B\Gamma E$ η διχοτόμος της $\Gamma\Lambda$ είναι και ύψος, οπότε $\Gamma\Lambda \perp BE$, άρα $M\hat{\Lambda}K = 90^o$.

Επειδή το $K\Lambda MN$ έχει τρεις ορθές γωνίες, είναι ορθογώνιο.

γ. Το ΔEBT είναι παραλληλόγραμμο και τα N , Λ είναι τα μέσα των τμημάτων ΔT , BE που είναι ίσα.
Άρα $NT // = B\Lambda$, οπότε το $TB\Lambda N$ είναι παραλληλόγραμμο, επομένως $N\Lambda // AB$.

δ. Είναι $N\Lambda = BT = AB - AT = AB - A\Delta$.

140 Θέμα 1714

α. Επειδή στο $\Gamma HZ\Delta$ οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και είναι ίσες, είναι ορθογώνιο.

β. Όμοια το $A\Gamma\Delta B$ είναι ορθογώνιο.

Είναι $B\hat{\Delta}Z = B\hat{\Delta}\Gamma + \Gamma\hat{\Delta}Z = 90^o + 90^o = 180^o$, οπότε τα B , Δ , Z είναι συνευθειακά.

γ. Το $\Gamma\Theta\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού έχει τις απέναντι πλευρές ίσες.

Οπότε $\Theta\Delta // = \Gamma E \Rightarrow 2\Theta\Delta // = 2\Gamma E \Rightarrow A\Delta // = \Gamma Z$, άρα το $A\Gamma Z\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

141 Θέμα 1816

α. Επειδή $\Gamma Z \perp K\Delta$ και $AB \perp K\Delta$, έχουμε $\Gamma Z // AB$, οπότε $\hat{B} = Z\hat{\Gamma}\Delta$, ως εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη.

β. Είναι $\Delta\hat{\Gamma}E = \hat{\Gamma} = \hat{B} = Z\hat{\Gamma}\Delta$, οπότε η $\Gamma\Delta$ είναι η διχοτόμος της $Z\hat{\Gamma}E$.

γ. Τα ορθογώνια τρίγωνα $Z\Delta\Gamma$ και $E\Delta\Gamma$ έχουν:
- $\Gamma\Delta$ κοινή
- $Z\hat{\Gamma}\Delta = \Delta\hat{\Gamma}E$

Οπότε είναι ίσα, άρα το $\overset{\Delta}{\Delta Z E}$ είναι ισοσκελές.

δ. Το $KZ\Gamma H$ είναι ορθογώνιο, αφού έχει $\hat{K} = \hat{H} = \hat{Z} = 90^o$, οπότε $H\Gamma = KZ$.

Είναι $\Delta K - \Delta E = \Delta K - \Delta Z = KZ = H\Gamma$.

19. Ρόμβος

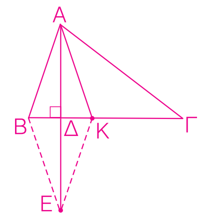
Θέμα 2

142 Θέμα 1681

α. Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του, οπότε η $ΕΑ$ είναι η διχοτόμος της $\hat{Α}$, επομένως το $Ε$ ισαπέχει από τις πλευρές $ΑΒ$ και $ΑΓ$ της $\hat{Α}$.

β. Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούνται κάθετα, άρα $ΕΑ$ είναι η μεσοκάθετος του $ΒΓ$, οπότε το $Ε$ ισαπέχει από τα $Β$ και $Γ$.

143 Θέμα 1570



α. Στο τρίγωνο $ΑΒΚ$ το $ΑΔ$ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β. Είναι $ΔΑ = ΔΕ$ και $ΔΒ = ΔΚ$, οπότε το $ΑΚΕΒ$ είναι παραλληλόγραμμο και αφού έχει $ΑΒ = ΑΚ$ είναι ρόμβος.

144 Θέμα 1679

α. Το ΟΜ είναι απόστημα της χορδής ΒΓ, οπότε το Μ είναι μέσο της ΒΓ.

Στο τετράπλευρο ΑΓΟΒ οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και τέμνονται κάθετα.

Άρα το $ΑΓΟΒ$ είναι ρόμβος.

β. Είναι $ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ρ$, $ΟΓ = ΑΓ$ και $ΟΒ = ΑΒ$.

Οπότε τα τρίγωνα $ΟΑΓ$ και $ΟΑΒ$ είναι ισόπλευρα.

Άρα στο $ΑΓΟΒ$ είναι $\hat{Β} = \hat{Γ} = 60^\circ$ και $\hat{Ο} = \hat{Α} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.

145 Θέμα 1630

α. Επειδή η $ΔΕ$ είναι η μεσοκάθετος του $ΑΒ$ έχουμε $ΔΑ = ΔΒ$ και $ΕΑ = ΕΒ$.

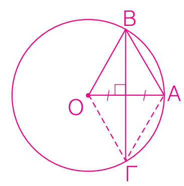
β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΜΔ$ και $ΕΜΒ$ έχουν:

- $ΜΑ = ΜΒ$
- $Δ\hat{Α}Μ = Μ\hat{Β}Ε$ ως εντός εναλλάξ

Οπότε είναι ίσα.

γ. Από το **β.** ερώτημα προκύπτει $ΑΔ = ΕΒ$, οπότε το $ΑΔΒΕ$ έχει όλες τις πλευρές του ίσες, άρα είναι ρόμβος.

146 Θέμα 1584



α. Είναι:
- $ΟΑ = ΟΒ = ρ$
- $ΒΟ = ΒΑ$, αφού η ΒΓ είναι μεσοκάθετος της ΟΑ

Άρα $ΟΑ = ΟΒ = ΒΑ$, οπότε το τρίγωνο $ΟΑΒ$ είναι ισόπλευρο.

β. Το Γ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΟΑ, οπότε $ΓΑ = ΓΟ = ρ$

Επομένως $ΟΒ = ΒΑ = ΑΓ = ΓΟ = ρ$.

Άρα το $ΟΒΑΓ$ είναι ρόμβος.

147 Θέμα 1575

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΖΔ$ και $ΑΕΒ$ έχουν:

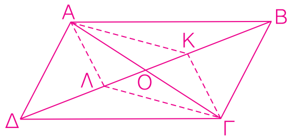
- $ΑΔ = ΑΒ$
- $\hat{Δ} = \hat{Β}$, αφού το $ΑΒΓΔ$ είναι ρόμβος. Άρα είναι ίσα, οπότε $ΑΖ = ΑΕ$.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΖΔ$ και $ΑΕΒ$ έχουν:

- $ΑΖ = ΑΕ$
- $\hat{Δ} = \hat{Β}$, αφού το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο. Οπότε είναι ίσα, άρα $ΑΔ = ΑΒ$. Επομένως το παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, άρα είναι ρόμβος.

Θέμα 4

148 Θέμα 1840



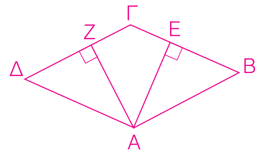
α. Φέρουμε τη διαγώνιο $A\Gamma$ του $AB\Gamma\Delta$. Επειδή $OB=O\Delta$ και $BK=\Delta\Lambda$ είναι
$OB-BK=O\Delta-\Delta\Lambda \Leftrightarrow OK=O\Lambda$.
Αφού $OK=O\Lambda$ και $OA=O\Gamma$, το $AK\Gamma\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

β. Αν το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, τότε $A\Gamma\perp B\Delta$, οπότε και στο παραλληλόγραμμο $AK\Gamma\Lambda$ είναι $A\Gamma\perp K\Lambda$.
Άρα το $AK\Gamma\Lambda$ είναι ρόμβος.

γ. Το παραλληλόγραμμο $AK\Gamma\Lambda$ είναι ορθογώνιο, όταν $A\Gamma=K\Lambda \Leftrightarrow A\Gamma=\frac{1}{3}B\Delta \Leftrightarrow B\Delta=3A\Gamma$.

149 Θέμα 1740

α. Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και $AE\perp B\Gamma$, $AZ\perp\Delta\Gamma$



Απόδειξη πρότασης Π1:

- Έστω ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $AZ\Delta$ και AEB έχουν:
- $A\Delta=AB$
- $\hat{\Delta}=\hat{B}$, αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος

Άρα είναι ίσα, οπότε $AZ=AE$.

Απόδειξη πρότασης Π2:

- Έστω ότι $AE=AZ$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $AZ\Delta$ και AEB έχουν:
- $AZ=AE$
- $\hat{\Delta}=\hat{B}$ αφού το $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο.

Οπότε είναι ίσα, άρα $A\Delta=AB$.
Επομένως το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.

β. Ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, αν και μόνο αν, οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

150 Θέμα 1844

α. Είναι:
- $\Delta A=\Delta\Gamma$, οπότε $\Delta\hat{A}\Gamma=\hat{\Gamma}=\hat{\varphi}$
- $A\hat{\Delta}B$ εξωτερική στο $\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$, οπότε $A\hat{\Delta}B=\Delta\hat{A}\Gamma+\hat{\Gamma}=2\hat{\varphi}$

Επειδή η ΔE είναι η διχοτόμος της $A\hat{\Delta}B$, έχουμε $E\hat{\Delta}A=\frac{A\hat{\Delta}B}{2}=\frac{2\hat{\varphi}}{2}=\hat{\varphi}$.

Επομένως $E\hat{\Delta}A=\Delta\hat{A}\Gamma$ οι οποίες είναι εντός εναλλάξ, άρα $E\Delta\,//\,A\Gamma$.

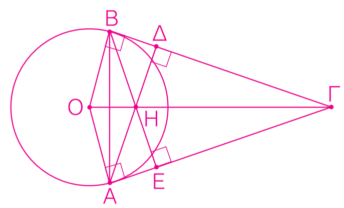
β. Είναι $E\hat{A}\Delta=\Delta\hat{A}Z=\varphi$, αφού η $A\Delta$ διχοτόμος της $\hat{A}$.

Οπότε $E\hat{A}\Delta=E\hat{\Delta}A=\varphi$, άρα το τρίγωνο $EA\Delta$ είναι ισοσκελές.

γ. Επειδή $\Delta E\,//\,AZ$ και $Z\Delta\,//\,AE$, το $AZ\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο οπότε οι διαγώνιοι του $A\Delta$ και EZ διχοτομούνται.

151 Θέμα 1823

α. Είναι $A\Gamma=B\Gamma$ ως εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου που άγονται από το σημείο Γ.
Άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την AB.
Τα ορθογώνια τα τρίγωνα ABE και $AB\Delta$ έχουν:



- AB κοινή
- $A\hat{B}\Delta=B\hat{A}E$, ως γωνίες προσκείμενες στη βάση AB του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε $A\hat{B}E=B\hat{A}\Delta$.

Επομένως το τρίγωνο BHA είναι ισοσκελές με βάση την AB.

β. Είναι:
- $OA = OB = \rho$
- $OA \perp A\Gamma$ και $BE \perp A\Gamma$, οπότε $OA \,//\, BE$
- $OB \perp B\Gamma$ και $A\Delta \perp B\Gamma$, οπότε $OB \,//\, A\Delta$

Επειδή $OA \,//\, BH$ και $OB \,//\, AH$, το $OBHA$ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή $OA = OB$ είναι ρόμβος.

γ. Αφού $OA = OB$, $HA = HB$ και $\Gamma A = \Gamma B$, τα O, H και Γ ανήκουν στη μεσοκάθετο του BA, οπότε είναι συνευθειακά.

152 Θέμα 1869

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $BA\Delta$ $(\hat{B} = 90^\circ)$ και ΓAE $(\hat{\Gamma} = 90^\circ)$ έχουν:
- $AB = \Gamma E$
- $B\Delta = A\Gamma$

Οπότε είναι ίσα, άρα $A\Delta = AE$.

β. Τα τρίγωνα AKZ και $A\Theta K$ έχουν:
- $AZ = A\Theta$ ως μισά ίσων τμημάτων
- AK κοινή
- $Z\hat{A}K = K\hat{A}\Theta$, αφού η Αδ διχοτόμος

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $KZ = K\Theta$.

γ.
- $K\Theta = KZ$, από το **β.** ερώτημα
- $KZ = AZ$, από υπόθεση
- $AZ = A\Theta$, ως μισά ίσων τμημάτων.

Άρα $K\Theta = KZ = AZ = A\Theta$, οπότε το $AZK\Theta$ είναι ρόμβος.

20. Τετράγωνο

Θέμα 2

153 Θέμα 1651

α. i. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο είναι $A\hat{B}\Gamma = 60^\circ$.

Οπότε $A\hat{B}E = A\hat{B}\Gamma + E\hat{B}\Gamma = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$

ii. Επειδή $AB = B\Gamma = BE$, το τρίγωνο ΒΕΑ είναι ισοσκελές οπότε $B\hat{E}A = B\hat{A}E$

Στο τρίγωνο ΒΕΑ έχουμε $B\hat{E}A + B\hat{A}E + A\hat{B}E = 180^\circ \Leftrightarrow 2B\hat{E}A + 150^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2B\hat{E}A = 30^\circ \Leftrightarrow B\hat{E}A = 15^\circ$.

β. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ έχουν:
- $AB = A\Gamma$, ως πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ
- $BE = \Gamma\Delta$, ως πλευρές του τετραγώνου ΒΓΔΕ
- $A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Gamma}B + B\hat{\Gamma}\Delta = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ = A\hat{B}E$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ) οπότε $AE = A\Delta$.
Επομένως το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.

154 Θέμα 1652

α. Είναι $AB = AE$ ως πλευρές τετραγώνου και $AB = A\Gamma$ από υπόθεση. Άρα $AE = A\Gamma$, οπότε το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές.

β. Επειδή το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές έχουμε $A\hat{E}\Gamma = E\hat{\Gamma}A$.

Στο τρίγωνο ΑΕΓ είναι
$$E\hat{A}\Gamma + A\hat{E}\Gamma + E\hat{\Gamma}A = 180^\circ \Leftrightarrow 2E\hat{\Gamma}A + E\hat{A}B + B\hat{A}\Gamma = 180^\circ$$
$$\Leftrightarrow 2E\hat{\Gamma}A + 90^\circ + B\hat{A}\Gamma = 180^\circ$$
$$\Leftrightarrow 2E\hat{\Gamma}A = 90^\circ - B\hat{A}\Gamma$$

155 Θέμα 1643

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΒΖ$ και $ΑΕΔ$ έχουν:

- $ΑΒ = ΑΔ$
- $ΒΖ = ΑΕ$, ως αθροίσματα ίσων τμημάτων.

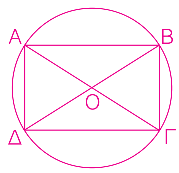
Οπότε είναι ίσα.

β. Επειδή τα τρίγωνα $ΑΒΖ$ και $ΑΕΔ$, είναι ίσα έχουμε $Α\hat{Ε}Δ = Α\hat{Ζ}Β$.

Είναι $Α\hat{Ε}Δ = Ε\hat{Δ}Γ$, ως εντός εναλλάξ, οπότε $Ε\hat{Δ}Γ = Α\hat{Ζ}Β$.

156 Θέμα 1662

α. Είναι $ΟΑ = ΟΓ = ΟΒ = ΟΓ = ρ$.



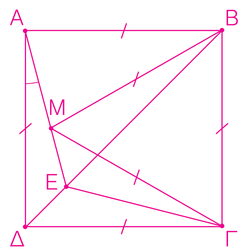
Στο $ΑΒΓΔ$ οι διαγώνιοι διχοτομούνται και είναι ίσες αφού $ΑΓ = ΒΔ = 2ρ$.

Άρα το $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο.

β. Για να είναι το ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ τετράγωνο, πρέπει να είναι και ρόμβος , οπότε πρέπει οι διαγώνιοί του $ΑΓ$ και $ΒΔ$ να είναι και κάθετες.

Θέμα 4

157 Θέμα 1814



α. Το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισόπλευρο, οπότε $Μ\hat{Β}Γ = 60^\circ$

Έχουμε $Α\hat{Β}Μ + Μ\hat{Β}Γ = 90^\circ \Leftrightarrow Α\hat{Β}Μ + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow Α\hat{Β}Μ = 30^\circ$.

Είναι:
- $ΒΜ = ΒΓ$, ως πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου $ΜΒΓ$
- $ΒΑ = ΒΓ$, ως πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

Επομένως $ΒΑ = ΒΜ$, οπότε το τρίγωνο $ΒΑΜ$ είναι ισοσκελές, άρα $Β\hat{Α}Μ = Β\widehat{Μ}Α$.

Στο τρίγωνο ΑΒΜ έχουμε $Α\hat{Β}Μ + Β\hat{Α}Μ + Β\widehat{Μ}Α = 180^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + 2Β\hat{Α}Μ = 180^\circ \Leftrightarrow Β\hat{Α}Μ = 75^\circ$.

Οπότε $Δ\hat{Α}Ε = 90^\circ - Β\hat{Α}Μ = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$.

β. Τα τρίγωνα ΔΑΕ και ΔΕΓ έχουν:

- ΔΕ κοινή
- $ΔΑ = ΔΓ$, ως πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ
- $Α\hat{Δ}Ε = Ε\hat{Δ}Γ$ αφού η διαγώνιος του τετραγώνου διχοτομεί τις γωνίες του.

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

γ. Από την προηγούμενη ισότητα τριγώνων έχουμε $Δ\hat{Α}Ε = Δ\hat{Γ}Ε \Leftrightarrow Δ\hat{Γ}Ε = 15^\circ \quad (1)$.

Επειδή το ΒΓΜ είναι ισόπλευρο είναι $Β\hat{Γ}Μ = 60^\circ$.

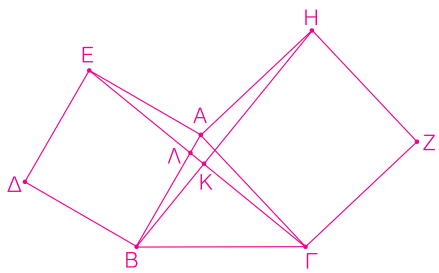
Έχουμε $Δ\hat{Γ}Β = 90^\circ \Leftrightarrow Δ\hat{Γ}Ε + Ε\hat{Γ}Μ + Β\hat{Γ}Μ = 90^\circ \Leftrightarrow 15^\circ + Ε\hat{Γ}Μ + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow Ε\hat{Γ}Μ = 15^\circ$, (2).

Από (1) και 2) έχουμε $Δ\hat{Γ}Ε = Ε\hat{Γ}Μ$, άρα η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $Δ\hat{Γ}Μ$.

158 Θέμα 1788

α. Είναι $Ε\hat{Α}Η = 360^\circ - Ε\hat{Α}Β - Η\hat{Α}Γ - Β\hat{Α}Γ = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - (180^\circ - Α\hat{Β}Γ - Α\hat{Γ}Β)$

$$= Α\hat{Β}Γ + Α\hat{Γ}Β$$



β. Τα τρίγωνα $ΕΑΓ$ και $ΒΑΗ$ έχουν:

- $ΕΑ = ΑΒ$
- $ΑΓ = ΑΗ$
- $Ε\hat{Α}Γ = Β\hat{Α}Η = 90^\circ + Β\hat{Α}Γ$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $ΕΓ = ΒΗ$

γ. Έστω $Κ$ το σημείο τομής των $ΕΓ$, $ΒΗ$ και $Λ$ το σημείο τομής των $ΑΒ$, $ΕΓ$ αρκεί να δείξουμε ότι

$Β\hat{Κ}Λ = 90^o \Leftrightarrow Α\hat{Β}Κ + Β\hat{Λ}Κ = 90^o$, (1)

Επειδή τα τρίγωνα $ΕΑΓ$ και $ΒΑΗ$ είναι ίσα έχουμε $Α\hat{Β}Κ = Α\hat{Ε}Γ$.

Είναι $Β\hat{Λ}Κ = Α\hat{Λ}Ε$, ως κατακορυφήν.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΛ είναι $Α\hat{Ε}Λ + Α\hat{Λ}Ε = 90^o \Leftrightarrow Α\hat{Β}Κ + Β\hat{Λ}Κ = 90^o$.

Οπότε η (1) ισχύει.

159 Θέμα 1795

α. Επειδή $ΜΑ = ΜΛ$ και $ΜΒ = ΜΓ$, το $ΑΓΛΒ$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $ΓΛ = ΑΒ$.

Είναι $ΑΒ = ΑΕ$, ως πλευρές τετραγώνου, οπότε $ΓΛ = ΑΕ$.

β. Είναι:
- $Α\hat{Γ}Λ = \hat{Γ} + Β\hat{Γ}Λ = \hat{Γ} + \hat{Β}$, αφού $Β\hat{Γ}Λ = \hat{Β}$, ως εντός εναλλάξ
- $Ε\hat{Α}Η = 360^o - Ε\hat{Α}Β - Η\hat{Α}Γ - \hat{Α} = 360^o - 90^o - 90^o - \hat{Α} = 180^o - \hat{Α} = \hat{Β} + \hat{Γ}$

Οπότε $Α\hat{Γ}Λ = Ε\hat{Α}Η$.

γ. Τα $\overset{\Delta}{ΑΓΛ}$ και $\overset{\Delta}{ΕΑΗ}$ έχουν:
- $ΑΓ = ΑΗ$
- $ΓΛ = ΑΕ$, από το **α.** ερώτημα
- $Α\hat{Γ}Λ = Ε\hat{Α}Η$, από το **β.** ερώτημα

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $Λ\hat{Α}Γ = Α\hat{Η}Ε$, (1).

Αρκεί να δείξουμε ότι $Α\hat{Ρ}Η = 90^o \Leftrightarrow Ρ\hat{Α}Η + Ρ\hat{Η}Α = 90^o$.

Είναι $Λ\hat{Α}Γ + Γ\hat{Α}Η + Ρ\hat{Α}Η = 180^o \overset{(1)}{\Leftrightarrow} Α\hat{Η}Ε + 90^o + Ρ\hat{Α}Η = 180^o \Leftrightarrow Ρ\hat{Η}Α + Ρ\hat{Α}Η = 90^o$.

160 Θέμα 1734

α. Τα τρίγωνα ΗΔΘ, ΘΑΕ, ΕΒΖ και ΗΓΖ έχουν:
- $ΗΔ = ΑΕ = ΒΕ = ΓΗ$, ως ίσες πλευρές των ίσων ισόπλευρων τριγώνων ΗΔΓ και ΕΑΒ (τα τρίγωνα ΗΔΓ και ΕΑΒ είναι ίσα επειδή έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες με τις πλευρές ΓΔ και ΑΒ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ)
- $ΘΔ = ΘΑ = ΒΖ = ΓΖ$ ως ίσες πλευρές των ίσων ισόπλευρων τριγώνων ΘΔΑ και ΒΓΖ (όπως πριν, τα ΘΔΑ και ΒΓΖ είναι ίσα αφού έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες με τις πλευρές ΑΔ και ΒΓ του ΑΒΓΔ)
- $Η\hat{Δ}Θ = Θ\hat{Α}Ε = Ε\hat{Β}Ζ = Ζ\hat{Γ}Η = 360^o - 90^o - 2 \cdot 60^o = 150^o$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $ΘΗ = ΗΖ = ΖΕ = ΕΘ$.

Επομένως το $ΕΖΗΘ$ είναι ρόμβος.

β. Αν το $ΑΒΓΔ$ είναι τετράγωνο, τότε $ΑΒ = ΑΔ$.

Στα ισόπλευρα τρίγωνα $ΑΔΘ$ και $ΑΕΒ$ είναι $ΑΘ = ΑΔ$ και $ΑΕ = ΑΒ$, οπότε $ΑΘ = ΑΕ$.

Δηλαδή, το τρίγωνο $ΑΘΕ$ είναι ισοσκελές, οπότε $Α\hat{Θ}Ε = Α\hat{Ε}Θ$ και είναι

$Α\hat{Θ}Ε + Α\hat{Ε}Θ + Θ\hat{Α}Ε = 180^o \Leftrightarrow 2Α\hat{Θ}Ε + 150^o = 180^o \Leftrightarrow Α\hat{Θ}Ε = 15^o$.

Όμοια, στο τρίγωνο ΔΘΗ, είναι $Η\hat{Θ}Δ = 15^o$.

Τότε $Ε\hat{Θ}Η = Δ\hat{Θ}Η + Ε\hat{Θ}Α + Α\hat{Θ}Δ = 15^o + 60^o + 15^o = 90^o$.

Επομένως ο ρόμβος έχει μια γωνία ορθή, άρα είναι τετράγωνο.

161 Θέμα 1750

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΝ και ΓΔΜ έχουν:
- $Α Δ = Δ Γ$
- $Α Ν = Γ Μ$

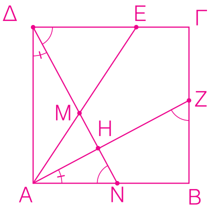
Οπότε είναι ίσα, άρα $Δ Ν = Δ Μ$.

β. Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΝ και ΓΔΜ είναι ίσα, έχουμε $Μ\hat{Δ}Γ = Α\hat{Δ}Ν$.

Είναι $Γ\hat{Δ}Ν = Δ\hat{Ν}Α$, ως εντός εναλλάξ.

Οπότε $Μ\hat{Δ}Γ + Γ\hat{Δ}Ν = Α\hat{Δ}Ν + Δ\hat{Ν}Α = 90^o$, άρα $ΔΝ \perp ΔΜ$.

162 Θέμα 1825



α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο:
- ΑΒΖ ($\hat{Β} = 90^o$), είναι $Α\hat{Ζ}Β + Ζ\hat{Α}Β = 90^o \Leftrightarrow Α\hat{Ζ}Β = 90^o - Ζ\hat{Α}Β$
- ΑΗΝ ($Α\hat{Η}Ν = 90^o$), είναι $Α\hat{Ν}Η + Η\hat{Α}Ν = 90^o \Leftrightarrow Α\hat{Ν}Η = 90^o - Η\hat{Α}Ν \Leftrightarrow Α\hat{Ν}Δ = 90^o - Ζ\hat{Α}Β$

Επομένως, $Α\hat{Ζ}Β = Α\hat{Ν}Δ$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΝ και ΑΒΖ έχουν:
- $ΑΔ = ΑΒ$
- $Α\hat{Ζ}Β = Α\hat{Ν}Δ$

Οπότε είναι ίσα.

β. Στο τρίγωνο ΑΜΝ η ΑΗ είναι ύψος και διχοτόμος.

Οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές, άρα $ΑΜ = ΑΝ$.

Είναι:
- $Ε\hat{Δ}Ν = Α\hat{Ν}Δ$, ως εντός εναλλάξ
- $Α\hat{Ν}Δ = Α\hat{Μ}Ν$, αφού το τρίγωνο ΑΜΝ είναι ισοσκελές
- $Α\hat{Μ}Ν = Δ\hat{Μ}Ε$, ως κατακορυφήν

Άρα $Ε\hat{Δ}Ν = Δ\hat{Μ}Ε$, οπότε $ΔΕ = ΕΜ$.

γ. Είναι:
- $ΑΕ = ΕΜ + ΑΜ = ΔΕ + ΑΝ$.
- $ΑΝ = ΒΖ$, αφού τα τρίγωνα ΑΔΝ και ΑΒΖ είναι ίσα.

Άρα $ΑΕ = ΔΕ + ΒΖ$.

21. Εφαρμογές των παραλληλογράμμων

Θέμα 2

163 Θέμα 1589

α. Είναι $\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} = 180^o \Leftrightarrow \hat{Α} + 40^o + 60^o = 180^o \Leftrightarrow \hat{Α} = 80^o$.

β. Στο τρίγωνο ΑΒΓ , έχουμε:
- Δ , Ε τα μέσα των ΑΒ , ΒΓ , οπότε ΔΕ // ΑΓ
- Ε, Ζ τα μέσα των ΒΓ, ΑΓ οπότε ΕΖ // ΑΒ

γ. Είναι $Β\hat{Δ}Ε = \hat{Α} = 80^o$ και $Β\hat{Ε}Δ = \hat{Γ} = 60^o$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

164 Θέμα 1608

α. Είναι $\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} = 180^o \Leftrightarrow 40^o + 70^o + \hat{Γ} = 180^o \Leftrightarrow \hat{Γ} = 70^o$.

Οπότε $\hat{Β} = \hat{Γ}$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΓ$.

β. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι Δ μέσο ΑΒ , Ε μέσο ΑΓ , οπότε $ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow 9 = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow ΒΓ = 18$

γ. Είναι: • $A\Gamma = 2E\Gamma = 2\cdot 16 = 32$ και

• $AB = A\Gamma = 32$

Η περίμετρος είναι $\Pi = 32+32+18 = 82$.

165 Θέμα 1613

α. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα Δ , E είναι τα μέσα των AB , $A\Gamma$, οπότε $B\Gamma // \Delta E$.

β. Επειδή τα Δ , E είναι τα μέσα των AB, $A\Gamma$ έχουμε $\Delta E = \dfrac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow 9 = \dfrac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 18$.

γ. Είναι $A\Delta = \Delta B = 10$, $E\Gamma = AE = 8$, οπότε $AB = 20$ και $A\Gamma = 16$ άρα:

- $\Pi_{AB\Gamma} = AB + B\Gamma + A\Gamma = 20+18+16 = 54$
- $\Pi_{\Delta E\Gamma B} = \Delta E + E\Gamma + \Gamma B + B\Delta = 9+8+18+10 = 45$

Επομένως $\Pi_{AB\Gamma} > \Pi_{\Delta E\Gamma B}$.

166 Θέμα 1611

α. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι Δ μέσο $B\Gamma$, E μέσο $A\Gamma$, οπότε $\Delta E // AB$.

β.i. Έχουμε $\hat{x} = \hat{B} = 50^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

ii. Επειδή $\Delta E // AB$, είναι $\hat{A} = \Delta\hat{E}\Gamma = 70^\circ$.

Είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + 50^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 180^\circ - 120^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 60^\circ$.

167 Θέμα 1583

α. Έχουμε:

- Στο τρίγωνο OAB είναι Z μέσο OA, H μέσο OB , οπότε $ZH = \dfrac{AB}{2}$
- Στο τρίγωνο $O\Gamma\Delta$ είναι E μέσο $O\Delta$, Θ μέσο $O\Gamma$, οπότε $E\Theta = \dfrac{\Gamma\Delta}{2}$
- Στο τρίγωνο $OB\Gamma$ είναι H μέσο OB, Θ μέσο $O\Gamma$, οπότε $H\Theta = \dfrac{B\Gamma}{2}$
- Στο τρίγωνο $OA\Delta$ είναι E μέσο $O\Delta$, Z μέσο OA , οπότε $EZ = \dfrac{A\Delta}{2}$.

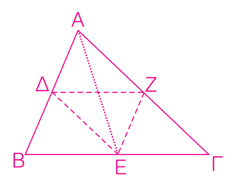
Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο έχουμε $AB = \Gamma\Delta$, άρα $ZH = E\Theta$ και $A\Delta = B\Gamma$, άρα $H\Theta = EZ$. Επομένως το $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Έχουμε $AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A = 40$.

Είναι $EZ + ZH + H\Theta + \Theta E = \dfrac{A\Delta}{2} + \dfrac{AB}{2} + \dfrac{B\Gamma}{2} + \dfrac{\Gamma\Delta}{2} = \dfrac{A\Delta + AB + B\Gamma + \Gamma\Delta}{2} = \dfrac{40}{2} = 20$.

168 Θέμα 1566

α. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα E , Z είναι τα μέσα των ΓB , ΓA , οπότε $EZ \mathbin{//=} \dfrac{AB}{2}$ (1) .



Επομένως $EZ \mathbin{//=} B\Delta$, άρα το ΔBEZ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Από την (1) έχουμε $EZ \mathbin{//=} A\Delta$, οπότε το $ZE\Delta A$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα οι διαγώνιοί του AE και ΔZ διχοτομούνται.

Οπότε η ΔZ διχοτομεί το AE .

169 Θέμα 1564

α. Τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΔΖ έχουν:

- $ΒΕ = ΓΖ$, ως μισά τμήματα των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ.
- $ΒΔ = ΓΔ$, διότι το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ , οπότε είναι και διάμεσός του.
- $\hat{Β} = \hat{Γ}$, ως γωνίες προσκείμενες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ .

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Δ, Ε είναι τα μέσα των ΒΓ, ΑΒ, οπότε $ΔΕ // = \frac{ΑΓ}{2} \Rightarrow ΔΕ // = ΑΖ$.

Άρα το ΑΕΔΖ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή $ΔΕ = ΑΖ = ΑΕ$ είναι ρόμβος, αφού έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

170 Θέμα 1560

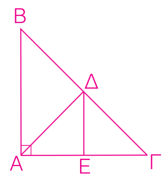
α. Επειδή $ΔΑ = ΔΓ$ και $ΔΕ = ΔΜ$ το ΑΜΓΕ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΜ είναι διάμεσος, οπότε είναι και ύψος, επομένως $Α\hat{Μ}Γ = 90^{o}$.
Άρα το ΑΜΓΕ είναι ορθογώνιο.

β. Είναι $ΔΖ \perp ΑΜ$ και $ΓΜ \perp ΑΜ$ οπότε $ΔΖ // ΓΜ$.
Στο τρίγωνο ΑΜΓ το Δ είναι μέσο του ΑΓ και $ΔΖ // ΜΓ$, οπότε το Ζ είναι μέσο της ΑΜ και

$$ΔΖ = \frac{ΜΓ}{2} \Leftrightarrow ΔΖ = \frac{\frac{ΒΓ}{2}}{2} \Leftrightarrow ΔΖ = \frac{ΒΓ}{4} .$$

171 Θέμα 1542



α. Επειδή $ΔΕ // ΑΒ$ και $ΑΒ \perp ΑΓ$, είναι $ΔΕ \perp ΑΓ$, οπότε το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο.

β. Στο τρίγωνο ΑΒΓ, το Δ είναι το μέσο της ΒΓ και $ΔΕ // ΑΒ$, οπότε το Ε είναι μέσο της ΑΓ και $ΔΕ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΑΓ}{2}$.

Θέμα 4

172 Θέμα 1803

α. Είναι $ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow ΑΓ = ΜΓ$, οπότε το τρίγωνο ΓΑΜ είναι ισοσκελές, άρα $Μ\hat{Α}Γ = Α\hat{Μ}Γ$.

β. Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Λ, Μ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, οπότε $ΜΛ = \frac{ΑΓ}{2} = \frac{ΓΜ}{2} = ΜΚ$.

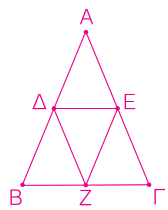
γ. Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Λ, Μ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, οπότε $ΛΜ // ΑΓ$, άρα $Λ\hat{Μ}Α = Μ\hat{Α}Γ$, ως εντός εναλλάξ.

Έχουμε $Μ\hat{Α}Γ = Α\hat{Μ}Γ$, οπότε $Λ\hat{Μ}Α = Α\hat{Μ}Γ$

Άρα η ΑΜ είναι η διχοτόμος της $Λ\hat{Μ}Κ$.

173 Θέμα 1726

α. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και Δ, Ε, Ζ τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα.



Είναι $ΔΖ = \frac{ΑΓ}{2}$ (1) και $ΖΕ = \frac{ΑΒ}{2}$ (2).

Άρα $ΔΖ = ΖΕ$, οπότε το ΔΖΕ είναι ισοσκελές.

β.i. • Διατύπωση

Το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα πλευρών ισόπλευρου τριγώνου είναι ισόπλευρο.

• Απόδειξη

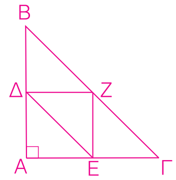
Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ τα $Δ, Ε$ είναι μέσα των $ΑΒ, ΑΓ$, οπότε $ΔΕ=\dfrac{ΒΓ}{2}$ (3).

Επειδή $ΑΒ=ΒΓ=ΑΓ$ από τις (1), (2) και (3) έχουμε $ΖΔ=ΖΕ=ΔΕ$.

Άρα το τρίγωνο $ΔΕΖ$ είναι ισόπλευρο.

ii. • Διατύπωση

Το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα πλευρών ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.



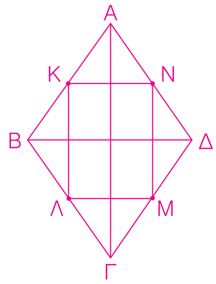
• Απόδειξη

Έστω ότι $\widehat{Α}=90^{\circ}$.

Από το **α.** ερώτημα είναι $ΖΔ=ΖΕ$, άρα το τρίγωνο $ΔΖΕ$ είναι ισοσκελές.

Επειδή $ΖΔ\,//\,ΑΓ$, $ΖΕ\,//\,ΑΒ$ και $ΑΒ\perp ΑΓ$, προκύπτει ότι $ΔΖ\perp ΕΖ$. Άρα $Δ\hat{Ζ}Ε=90^{\circ}$, επομένως το $\overset{\triangle}{ΔΖΕ}$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

174 Θέμα 1798



α. Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ τα $Κ, Λ$ είναι μέσα των $ΑΒ, ΒΓ$, οπότε $ΚΛ\,//\,ΑΓ$.

Στο τρίγωνο $ΑΒΔ$ τα $Κ, Ν$ είναι μέσα των $ΑΒ, ΑΔ$, οπότε $ΚΝ\,//\,ΒΔ$.

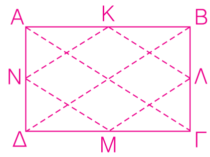
Στο τρίγωνο $ΒΓΔ$ τα $Λ, Μ$ είναι μέσα των $ΒΓ, ΓΔ$, οπότε $ΛΜ\,//\,ΒΔ$.

Στο τρίγωνο $ΑΓΔ$ τα $Μ, Ν$ είναι μέσα των $ΓΔ, ΑΔ$, οπότε $ΜΝ\,//\,ΑΓ$.

Άρα $ΚΛ\,//\,ΜΝ$ και $ΚΝ\,//\,ΛΜ$ και συνεπώς το $ΚΛΜΝ$ είναι παραλληλόγραμμο.

Είναι $ΚΝ\,//\,ΒΔ$, $ΚΛ\,//\,ΑΓ$ και $ΑΓ\perp ΒΔ$, αφού είναι διαγώνιοι του ρόμβου $ΑΒΓΔ$.

Οπότε $ΚΝ\perp ΚΛ$. Άρα το $ΚΛΜΝ$ είναι ορθογώνιο.

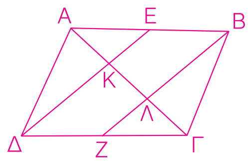


β. Το $ΚΛΜΝ$ είναι παραλληλόγραμμο.

Στα τρίγωνα $ΑΒΔ$, $ΑΒΓ$ τα $Ν$, $Κ$ και $Λ$ είναι τα μέσα των πλευρών $ΑΔ$, $ΑΒ$ και $ΒΓ$, άρα $ΚΝ=\dfrac{ΒΔ}{2}$, $ΚΛ=\dfrac{ΑΓ}{2}$ το $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο, άρα $ΑΓ=ΒΔ$, οπότε $ΚΝ=ΚΛ$.

Άρα το $ΚΛΜΝ$ είναι ρόμβος.

175 Θέμα 1728



α. Επειδή το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο έχουμε

$$ΑΒ\,//=\,ΓΔ \Rightarrow \frac{ΑΒ}{2}\,//=\,\frac{ΓΔ}{2} \Rightarrow ΒΕ\,//=\,ΔΖ .$$

Άρα το $ΔΕΒΖ$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Είναι: • $ΔΕ\,//\,ΒΖ$, οπότε $Α\hat{Ε}Δ=Ε\hat{Β}Ζ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά

• $ΑΒ\,//\,ΓΔ$ οπότε $Ε\hat{Β}Ζ=Β\hat{Ζ}Γ$ ως εντός εναλλάξ

Άρα $Α\hat{Ε}Δ=Β\hat{Ζ}Γ$.

γ. • Στο τρίγωνο $ΑΒΛ$ το $Ε$ είναι το μέσο του $ΑΒ$ και $ΕΚ\,//\,ΒΛ$, οπότε το $Κ$ είναι μέσο του $ΑΛ$, άρα $ΚΑ=ΚΛ$.

• Στο τρίγωνο $ΔΚΓ$ το $Ζ$ είναι το μέσο του $ΓΔ$ και $ΖΛ\,//\,ΔΚ$, οπότε το $Λ$ είναι μέσο του $ΚΓ$, άρα $ΚΛ=ΛΓ$.

Επομένως $ΑΚ=ΚΛ=ΛΓ$ δηλαδή οι $ΔΕ$ και $ΒΖ$ τριχοτομούν την $ΑΓ$.

176 Θέμα 1802

α. • Στο τρίγωνο ΓBN έχουμε τα M, Λ τα μέσα των ΓB, ΓN, οπότε $M\Lambda // BN$.

• Στο τρίγωνο $AM\Lambda$, το K είναι το μέσο του AM και $KN // M\Lambda$, οπότε το N είναι το μέσο του $A\Lambda$.

β. Είναι $K\hat{M}\Gamma = \Gamma\hat{M}\Lambda + \Lambda\hat{M}A = M\hat{B}K + A\hat{K}N$, αφού:

- $M\Lambda // BK$, άρα $\Gamma\widehat{M}\Lambda = M\widehat{B}K$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη
- $M\Lambda // KN$, άρα $\Lambda\widehat{M}A = A\widehat{K}N$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη

γ. Από το **α.** έχουμε $KN = \dfrac{M\Lambda}{2} = \dfrac{\frac{BN}{2}}{2} = \dfrac{BN}{4}$.

Οπότε $BN = 4KN \Leftrightarrow BK + KN = 4KN \Leftrightarrow BK = 3KN$.

177 Θέμα 1868

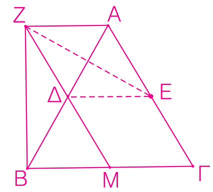
α. Τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και $BM\Delta$ έχουν:
- $\Delta A = \Delta B$
- $\Delta Z = \Delta M$
- $A\hat{\Delta}Z = B\hat{\Delta}M$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Επειδή $\Delta A = \Delta B$ και $\Delta Z = \Delta M$, το $ZAMB$ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Οπότε $ZA // = BM \Rightarrow ZA // = M\Gamma$, άρα το $ZA\Gamma M$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα Δ, E είναι τα μέσα των AB, $A\Gamma$, οπότε $\Delta E // = \dfrac{B\Gamma}{2} \Rightarrow \Delta E // = M\Gamma \Rightarrow \Delta E // = ZA$.

Άρα το $ZAE\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε τα ZE και $A\Delta$ διχοτομούνται.



Είναι:
- $\Delta E = ZA$ και $ZA = M\Gamma$, άρα $\Delta E = M\Gamma$
- $M\Gamma = \dfrac{B\Gamma}{2} = \dfrac{A\Gamma}{2} = AE$

Οπότε $\Delta E = AE$, άρα το $ZAE\Delta$ είναι ρόμβος, επομένως $ZE \perp A\Delta$.

δ. Στο τρίγωνο ZAB η $Z\Delta$ είναι διάμεσος $Z\Delta = \Delta M = \dfrac{A\Gamma}{2} = \dfrac{AB}{2}$.

Οπότε $B\hat{Z}A = 90^{\circ}$, άρα $BZ \perp ZA$.

178 Θέμα 1801

α. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα Δ, E, Z είναι τα μέσα των $B\Gamma$, $A\Gamma$, AB, οπότε $\Delta E // BZ$ και $ZE // B\Delta$.

Άρα το $ZE\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Είναι: • $Z\hat{B}M = M\hat{B}\Delta$ και $M\widehat{B}\Delta = Z\widehat{M}B$, ως εντός εναλλάξ, άρα $Z\widehat{B}M = Z\widehat{M}B$, οπότε το τρίγωνο BZM είναι ισοσκελές.

• $E\hat{N}M = Z\hat{B}M$, ως εντός εναλλάξ και $Z\widehat{B}M = Z\hat{M}B = N\hat{M}E$, άρα $E\widehat{N}M = N\widehat{M}E$.

Οπότε το $\overset{\triangle}{MEN}$ είναι ισοσκελές

γ. Είναι $BZ + NE = ZM + ME = ZE = B\Delta = \Delta\Gamma$.

179 Θέμα 1889

α. Στο τρίγωνο $AB\Delta$ το AH είναι ύψος και διχοτόμος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $AB = A\Delta$ και το AH είναι διάμεσος.

Επειδή $HB = H\Delta$ και $HA = HZ$, το $ABZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται
Επειδή επιπλέον είναι $AB = A\Delta$, το $ABZ\Delta$ είναι ρόμβος.

β. Στο τρίγωνο $ΒΓΔ$ είναι $Η$, $Θ$ τα μέσα των $ΒΔ$, $ΒΓ$, οπότε $ΗΘ // ΓΔ$.

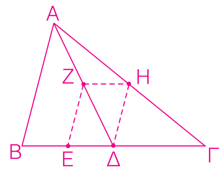
Είναι $ΑΔ // ΒΖ$ οπότε $ΓΔ // ΒΖ$.

Επομένως $ΗΘ // ΒΖ$.

γ. Στο τρίγωνο $ΒΓΔ$ τα $Η$, $Θ$ είναι μέσα των $ΒΔ$, $ΒΓ$ οπότε

$ΗΘ = \frac{ΓΔ}{2} = \frac{ΑΓ - ΑΔ}{2} = \frac{ΑΓ - ΑΒ}{2}$, αφού $ΑΔ = ΑΒ$.

180 Θέμα 1898



α. Στο τρίγωνο $ΑΔΓ$, τα $Ζ$, $Η$ είναι τα μέσα των $ΑΔ$, $ΑΓ$, οπότε

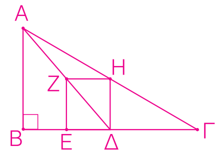
$ΖΗ // = \frac{ΔΓ}{2} \Rightarrow ΖΗ // = \frac{ΒΔ}{2} \Rightarrow ΖΗ // = ΔΕ$, άρα το $ΔΕΖΗ$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Για να είναι το παραλληλόγραμμο $ΔΕΖΗ$ ρόμβος, αρκεί να είναι $ΖΗ = ΖΕ$ (1).

Στο $\overset{\Delta}{ΑΔΒ}$ τα $Ε$, $Ζ$ είναι τα μέσα των $ΒΔ$, $ΑΔ$, οπότε $ΖΕ = \frac{ΑΒ}{2}$.

Η $(1) \Leftrightarrow \frac{ΔΓ}{2} = \frac{ΑΒ}{2} \Leftrightarrow ΔΓ = ΑΒ \Leftrightarrow \frac{ΒΓ}{2} = ΑΒ \Leftrightarrow ΒΓ = 2ΑΒ$.

Οπότε το $ΔΕΖΗ$ είναι ρόμβος, όταν $ΒΓ = 2ΑΒ$.

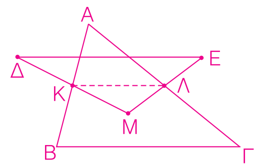


γ. Αν $\hat{Β} = 90^o$, τότε $ΑΒ \perp ΒΓ$.

Επειδή $ΖΕ // ΑΒ$, έχουμε $ΖΕ \perp ΒΓ$, δηλαδή $Ζ\hat{Ε}Γ = 90^o$.

Άρα το παραλληλόγραμμο $ΔΕΖΗ$ είναι ορθογώνιο.

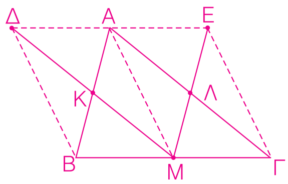
181 Θέμα 1741



α. Τα $Κ$, $Λ$ είναι τα μέσα των πλευρών:

- ΑΒ, ΑΓ στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ οπότε $ΚΛ // ΒΓ$
- ΜΔ, ΜΕ στο τρίγωνο $ΜΔΕ$, οπότε $ΚΛ // ΔΕ$

Άρα $ΔΕ // ΒΓ$.

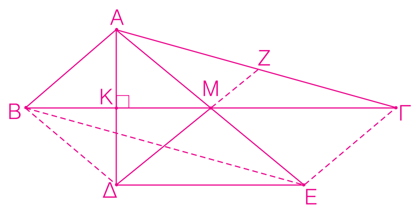


β. • Επειδή $ΚΑ = ΚΒ$ και $ΚΜ = ΚΔ$ το $ΔΑΜΒ$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $ΑΔ // ΒΓ$.

• Επειδή $ΜΛ = ΛΕ$ και $ΛΓ = ΛΑ$ το ΑΕΓΜ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $ΑΕ // ΒΓ$.

Από ο Α διέρχεται μοναδική ευθεία παράλληλη στη ΒΓ, άρα τα $Δ$, $Α$, $Ε$ είναι συνευθειακά.

182 Θέμα 1873



α. Στο τρίγωνο $ΑΔΕ$, τα $Κ$, $Μ$ είναι τα μέσα των $ΑΔ$, $ΑΕ$, οπότε

$ΚΜ // ΔΕ$ και $ΚΜ = \frac{ΔΕ}{2} \Leftrightarrow ΔΕ = 2ΚΜ$.

Είναι $ΚΜ // ΔΕ$ και $ΚΜ \perp ΑΔ$, άρα $ΔΕ \perp ΑΔ$.

β. Επειδή $ΜΑ = ΜΕ$ και $ΜΒ = ΜΓ$, το $ΑΒΕΓ$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Είναι $ΑΒ = ΑΜ$, οπότε το $\overset{\Delta}{ΑΒΜ}$ είναι ισοσκελές και επειδή το $ΑΚ$ είναι ύψος θα είναι και διάμεσος.

Επειδή $ΚΒ = ΚΜ$ και $ΚΑ = ΚΔ$, το $ΑΜΔΒ$ είναι παραλληλόγραμμο και αφού επιπλέον είναι $ΑΔ \perp ΒΜ$ είναι ρόμβος.

δ. Στο $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$ το $Μ$ είναι το μέσο της $ΒΓ$ και η $ΔΜ // ΑΒ$, οπότε τέμνει την $ΑΓ$ στο μέσο της $Ζ$.

183 Θέμα 1723

α. Το $\overset{\Delta}{ABH}$ είναι ισοσκελές, αφού η AE είναι διχοτόμος και ύψος.

β. Επειδή το $\overset{\Delta}{ABH}$ είναι ισοσκελές και η AE είναι διχοτόμος, θα είναι και διάμεσος, οπότε το E είναι μέσο του BH. Στο $\overset{\Delta}{BH\Gamma}$ τα E, M είναι τα μέσα των BH, $B\Gamma$, επομένως $EM // H\Gamma$.

γ. Στο $\overset{\Delta}{BH\Gamma}$ τα E, M είναι τα μέσα των BH, $B\Gamma$, οπότε $EM=\dfrac{H\Gamma}{2}=\dfrac{A\Gamma-AH}{2}=\dfrac{A\Gamma-AB}{2}$.

184 Θέμα 1804

α. • Στο τρίγωνο ΔAB τα M, K είναι τα μέσα των $A\Delta, \Delta B$, οπότε $MK=\dfrac{AB}{2}$.

• Στο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ τα K, N είναι τα μέσα των $\Delta B, B\Gamma$, οπότε και $KN=\dfrac{\Gamma\Delta}{2}$.

Άρα $MK=KN$, αφού $AB=\Gamma\Delta$.

β. Από το **α.** ερώτημα είναι $MK // AB$ και $KN // \Delta Z$.

Επειδή $KM=KN$ έχουμε $K\hat{M}N=K\hat{N}M$.

Είναι:
- $M\hat{E}A=K\hat{M}N$ ως εντός εναλλάξ
- $M\hat{Z}\Delta=K\hat{N}M$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη

Άρα $M\hat{E}A=M\hat{Z}\Delta$.

185 Θέμα 1775

α. Είναι $\Delta N // MB$ και $M\Delta // BN$, οπότε το $MBN\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Είναι $BN=M\Delta=\dfrac{A\Delta}{2}=\dfrac{B\Gamma}{2}$, οπότε το N είναι το μέσο του $B\Gamma$.

Στο τρίγωνο $BE\Gamma$ το N είναι μέσο της $B\Gamma$ και $NZ // BE$, οπότε το Z είναι το μέσο του ΓE.

γ. Είναι $\Delta Z // ME$ και $ME \perp E\Gamma$, άρα $\Delta Z \perp E\Gamma$.

Στο τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ το ΔZ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\Delta E=\Delta\Gamma$.

186 Θέμα 1832

α. i. Στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ τα Δ, M είναι τα μέσα των AB, $A\Gamma$, οπότε $\Delta M //= \dfrac{B\Gamma}{2} \Rightarrow \Delta M //= BE$.

Άρα το $B\Delta ME$ είναι παραλληλόγραμμο.

ii. Επειδή το $B\Delta ME$ είναι παραλληλόγραμμο, προκύπτει $\Delta B=ME$, $\Delta M=BE$.

Είναι $A\hat{\Delta}M=\hat{B}=\Gamma\hat{E}M$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά.

Έχουμε:
- $Z\Delta=\dfrac{AB}{2}=\Delta B=ME$
- $EH=\dfrac{B\Gamma}{2}=BE=\Delta M$.

Τα τρίγωνα $Z\Delta M$ και EMH έχουν:
- $Z\Delta=ME$
- $\Delta M=EH$
- $Z\hat{\Delta}M=M\hat{E}H=90^\circ+\hat{B}$.

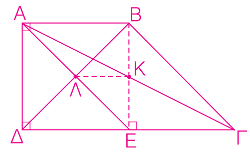
Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Αν τα σημεία Z, Δ, E είναι συνευθειακά, τότε $\Delta E \perp AB$.

Στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ τα Δ, E είναι τα μέσα των AB, $B\Gamma$, οπότε $\Delta E // A\Gamma$.

Άρα $\Gamma A \perp AB$, οπότε $\hat{A}=90^\circ$.

187 Θέμα 1727



α. Οι γωνίες $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ είναι εντός και επί τα αυτά, οπότε
$\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow 4\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=45^o$.

β. Το $AB E\Delta$ έχει τρεις γωνίες ορθές $\hat{A}=\hat{\Delta}=\hat{E}=90^o$, οπότε είναι ορθογώνιο.
Άρα $B\Delta = AE$.

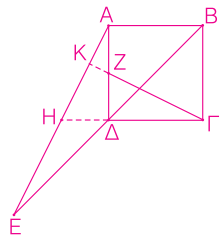
γ. Το $ABE\Delta$ είναι ορθογώνιο, άρα $\Delta E = AB$.
Έχουμε $\Delta\Gamma = 2AB \Leftrightarrow \Delta\Gamma = 2\Delta E$, άρα το E είναι το μέσο του $\Gamma\Delta$, οπότε $AB=\Delta E = E\Gamma$.
Αφού $AB // = E\Gamma$, το $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε το K είναι το μέσο της διαγωνίου του $A\Gamma$.
Επειδή το $ABE\Delta$ είναι ορθογώνιο, το Λ είναι το μέσο της διαγωνίου του AE .
Στο $\overset{\Delta}{AE\Gamma}$ τα K, Λ είναι μέσα των $A\Gamma$, AE οπότε $K\Lambda = \frac{1}{2}E\Gamma = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\Delta = \frac{1}{4}\Gamma\Delta$.

188 Θέμα 1766

α. Στο τρίγωνο EAB το Δ είναι το μέσο του BE και $\Delta H // AB$, οπότε το H είναι μέσο του AE, άρα $\Delta H = \frac{AB}{2}$.

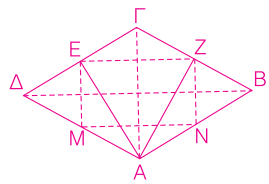
β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta H$ και $Z\Delta\Gamma$ έχουν:
- $A\Delta = \Gamma\Delta$
- $H\Delta = Z\Delta$, ως μισά ίσων τμημάτων

Οπότε είναι ίσα.



γ. Αν η ΓZ τέμνει την AE στο K, αρκεί να δείξουμε ότι
$A\hat{K}Z = 90^o \Leftrightarrow A\hat{Z}K + Z\hat{A}K = 90^o$.
Επειδή τα τρίγωνα $A\Delta H$, $Z\Delta\Gamma$ είναι ίσα έχουμε $Z\hat{A}K = Z\hat{\Gamma}\Delta$.
Είναι $A\hat{Z}K = \Delta\hat{Z}\Gamma$, ως κατακορυφήν.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta Z\Gamma$ είναι $\Delta\hat{Z}\Gamma + Z\hat{\Gamma}\Delta = 90^o \Leftrightarrow A\hat{Z}K + Z\hat{A}K = 90^o$.

189 Θέμα 1743

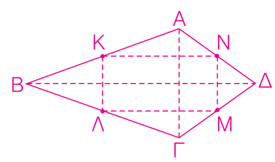


α. i. Επειδή οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του, είναι
$E\hat{\Gamma}A = A\hat{\Gamma}Z = 60^o$.
Τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $AB\Gamma$ είναι ισοσκελή και έχουν μία γωνία 60^o, άρα είναι ισόπλευρα.
Τα ύψη AE, AZ στα ισόπλευρα τρίγωνα είναι και διάμεσοί του, οπότε τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών $\Gamma\Delta$ και ΓB αντίστοιχα.

ii. Στο τρίγωνο $\Gamma B\Delta$ τα E , Z είναι τα μέσα των $\Gamma\Delta$, ΓB , οπότε $EZ // B\Delta$.
Είναι $B\Delta \perp A\Gamma$, άρα $A\Gamma \perp EZ$.

β. Επειδή τα E , Z , M , N είναι τα μέσα των πλευρών του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$, το $EMNZ$ είναι παραλληλόγραμμο.
Στο τρίγωνο $\Delta\Gamma A$ τα E , M είναι τα μέσα των $\Delta\Gamma$, ΔA οπότε $EM // \Gamma A$.
Αφού $\Gamma A \perp EZ$ έχουμε $EM \perp EZ$, επομένως $M\hat{E}Z = 90^o$, οπότε το $EMNZ$ είναι ορθογώνιο.

190 Θέμα 1745



α. Επειδή $BA = B\Gamma$ έχουμε $B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Gamma}A$.
Είναι $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ οπότε $\Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}A$ ως διαφορές ίσων γωνιών.
Άρα το $\overset{\Delta}{\Delta A\Gamma}$ είναι ισοσκελές.

β. Είναι $BA = B\Gamma$ και $\Delta A = \Delta\Gamma$, αφού το τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ είναι ισοσκελές.
Οπότε η $B\Delta$ είναι η μεσοκάθετος του $A\Gamma$, άρα $A\Gamma \perp B\Delta$.

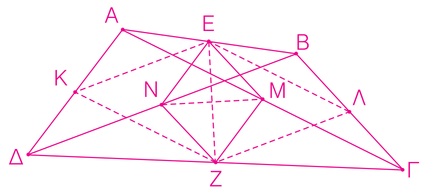
γ. Αν K, Λ, M, N τα μέσα των AB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA, τότε το $K\Lambda MN$ είναι παραλληλόγραμμο.

Επειδή $K\Lambda // A\Gamma$, οπότε $KN // B\Delta$ και $A\Gamma \perp B\Delta$ είναι $K\Lambda \perp KN$, οπότε $\Lambda\hat{K}N = 90^o$.
Άρα το $K\Lambda MN$ είναι ορθογώνιο.

191 Θέμα 1773

α. Στα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $B\Gamma\Delta$, τα E, M και N, Z είναι τα μέσα πλευρών τους αντίστοιχα.

Οπότε $EM // = \frac{B\Gamma}{2}$ και $NZ // = \frac{B\Gamma}{2}$, άρα $EM // = NZ$.



Επομένως το $EMZN$ είναι παραλληλόγραμμο.

Στο $\overset{\Delta}{BA\Delta}$ τα E, N είναι μέσα των AB, $B\Delta$ άρα $EN = \frac{A\Delta}{2} = \frac{B\Gamma}{2} = NZ$.

Επομένως το $EMZN$ είναι ρόμβος.

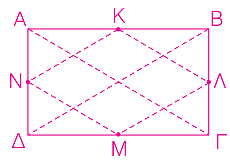
β. Επειδή το $EMZN$ είναι ρόμβος, οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και τέμνονται κάθετα, οπότε η EZ είναι η μεσοκάθετος του MN.

γ. Επειδή τα K, E, Λ, Z είναι τα μέσα των πλευρών του $AB\Gamma\Delta$, το $KE\Lambda Z$ είναι παραλληλόγραμμο. Οπότε έχουμε $KE = \Lambda Z$.

δ. Έστω O το σημείο τομής των διαγωνίων $K\Lambda$, EZ του παραλληλογράμμου $KE\Lambda Z$.
Επειδή το $EMZN$ είναι ρόμβος η διαγώνιος MN θα διέρχεται από το μέσο O του EZ, που διέρχεται και η $K\Lambda$.
Άρα τα $K\Lambda$, MN, EZ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

192 Θέμα 1794

α. Αφού K, Λ, M, N είναι τα μέσα των πλευρών AB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA έχουμε:
$K\Lambda // = \frac{A\Gamma}{2}$, $\Lambda M // = \frac{B\Delta}{2}$ και $MN // = \frac{A\Gamma}{2}$.



Οπότε $K\Lambda // = MN$, άρα το $K\Lambda MN$ είναι παραλληλόγραμμο.

Είναι $A\Gamma = B\Delta \Leftrightarrow \frac{A\Gamma}{2} = \frac{B\Delta}{2} \Leftrightarrow K\Lambda = \Lambda M$.

Άρα το παραλληλόγραμμο $K\Lambda MN$ είναι ρόμβος.

β. Για να είναι το $K\Lambda MN$ ρόμβος, αρκεί $K\Lambda = \Lambda M \Leftrightarrow \frac{A\Gamma}{2} = \frac{B\Delta}{2} \Leftrightarrow A\Gamma = B\Delta$.

Άρα αρκεί το τετράπλευρο να έχει ίσες διαγώνιες

193 Θέμα 1781

α. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα O, Z είναι τα μέσα των $A\Gamma$, $B\Gamma$, οπότε $OZ // AB$, άρα $OZ \perp B\Gamma$.
Στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ τα O, E είναι τα μέσα των $A\Gamma$, $\Gamma\Delta$, οπότε $OE // A\Delta$, άρα $OE \perp \Gamma\Delta$.
Επειδή το $OZ\Gamma E$ έχει τρεις γωνίες ορθές είναι ορθογώνιο. Επιπλέον είναι $\Gamma Z = \Gamma E$, ως μισά ίσων τμημάτων, οπότε το $OZ\Gamma E$ είναι τετράγωνο.

β. Στο τετράγωνο $OZ\Gamma E$ το H είναι το κέντρο του, οπότε $ZH = \frac{1}{2}EZ = \frac{1}{2}O\Gamma = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}A\Gamma = \frac{A\Gamma}{4}$.

γ. Στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ τα Θ, Z είναι τα μέσα των AB, $B\Gamma$, οπότε $\Theta Z // = \frac{A\Gamma}{2} \Rightarrow \Theta Z // = IH$.

Άρα το $I\Theta ZH$ είναι παραλληλόγραμμο

Στο ισοσκελές τρίγωνο $ZO\Gamma$, η ZH είναι διάμεσος οπότε είναι και ύψος, άρα $Z\widehat{H}O = 90^o$.

Επομένως το $I\Theta ZH$ είναι ορθογώνιο.

Στο τετράγωνο $OZ\Gamma E$ έχουμε $ZH = \frac{O\Gamma}{2} \Rightarrow \Theta I = \frac{IH}{2} \Rightarrow \Theta I = \frac{\Theta Z}{2} \Rightarrow \Theta Z = 2\Theta I$. Έχουμε $ZH = \frac{O\Gamma}{2} = \frac{A\Gamma}{4}$.

194 Θέμα 1858

α. Στο τρίγωνο $AB\Delta$ το BK είναι ύψος και διάμεσος. Άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $BA = B\Delta$.

β. Στο τρίγωνο $AB\Delta$, τα Λ, K, N είναι τα μέσα των AB, $A\Delta$, $B\Delta$.

Οπότε $\Lambda K = \frac{B\Delta}{2} = BN$ και $KN = \frac{AB}{2} = \Lambda B$.

Είναι $BA = B\Delta \Leftrightarrow \frac{BA}{2} = \frac{B\Delta}{2} \Leftrightarrow B\Lambda = BN$.

Άρα $BN = B\Lambda = \Lambda K = KN$, οπότε το $B\Lambda KN$ είναι ρόμβος.

γ. • Στο $\overset{\Delta}{AB\Delta}$, τα Λ, N είναι τα μέσα των AB, $B\Delta$, οπότε $\Lambda N \parallel A\Delta$.

• Στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$, τα Λ, M είναι τα μέσα των AB, $A\Gamma$, οπότε $\Lambda M \parallel B\Gamma$.

Επειδή $A\Delta \perp B\Gamma$, είναι $\Lambda M \perp \Lambda N$.

195 Θέμα 1616

α. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ έχουν:
- $AB = A\Gamma = 5$
- $B\Delta = \Gamma E = 5$
- $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}E$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Επειδή τα τρίγωνα $BA\Delta$, $A\Gamma E$ είναι ισοσκελή και τα BK, $\Gamma\Lambda$ είναι ύψη τους αντίστοιχα θα είναι και διάμεσοι, οπότε τα K, Λ είναι μέσα των $A\Delta$, AE.

γ. Στο τρίγωνο $A\Delta E$ τα K, Λ είναι μέσα των $A\Delta$, AE, άρα έχουμε

$$K\Lambda = \frac{\Delta E}{2} = \frac{\Delta B + B\Gamma + \Gamma E}{2} = \frac{AB + B\Gamma + A\Gamma}{2} = \frac{\Pi_{AB\Gamma}}{2} = \frac{12}{2} = 6 .$$

196 Θέμα 1837

α. Στο τρίγωνο ABZ το $B\Delta$ είναι διχοτόμος και ύψος, οπότε το $\overset{\Delta}{ABZ}$ είναι ισοσκελές με $BA = BZ$.

β. • Στο ισοσκελές τρίγωνο ABZ η διχοτόμος του $B\Delta$ είναι και διάμεσος, οπότε το Δ είναι μέσο του AZ.

• Στο τρίγωνο $AZ\Gamma$ τα Δ, M είναι τα μέσα των AZ, $A\Gamma$, οπότε:

• $\Delta M \parallel B\Gamma$

• $\Delta M = \frac{\Gamma Z}{2} = \frac{B\Gamma - BZ}{2} = \frac{B\Gamma - AB}{2}$

γ. Επειδή $\Delta M \parallel B\Gamma$, έχουμε $E\hat{\Delta}M = E\hat{B}\Gamma = \frac{\hat{B}}{2}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά.

22. Βαρύκεντρο – Ορθόκεντρο τριγώνου

Θέμα 4

197 Θέμα 1878

α. Επειδή το Θ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$, η BK είναι διάμεσός του.

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα Z, K είναι τα μέσα των AB, $A\Gamma$, οπότε $ZK \parallel= \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow ZK \parallel= E\Gamma$.

Άρα το $ZK\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Στο τρίγωνο $AB\Delta$ τα Γ, Z είναι τα μέσα των $B\Delta$, AB, οπότε $\Gamma Z \parallel A\Delta \Rightarrow \Gamma\Theta \parallel AH$.

Στο τρίγωνο ABH το Z είναι το μέσο του AB και $Z\Theta \parallel AH$, οπότε Θ το μέσο του BH.

Στο τρίγωνο $BH\Gamma$ τα Θ, E είναι μέσα των BH, $B\Gamma$ οπότε $\Theta E \parallel H\Gamma \Rightarrow A\Theta \parallel H\Gamma$

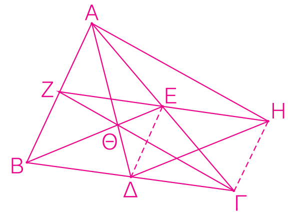
Επομένως το $A\Theta\Gamma H$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα $AH = \Theta\Gamma$.

γ. Στο τρίγωνο ΑΒΗ τα Ζ, Θ είναι μέσα των ΑΒ, ΒΗ οπότε $Z\Theta = \frac{AH}{2} \Leftrightarrow AH = 2Z\Theta$.

198 Θέμα 1820

α. Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Ζ , Ε είναι τα μέσα των ΑΒ , ΑΓ , οπότε $ZE \,//=\, \frac{B\Gamma}{2} \Rightarrow EH \,//=\, B\Delta$.

Άρα το ΕΗΔΒ είναι παραλληλόγραμμο.



β. Επειδή το ΕΗΔΒ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε $\Delta H = BE$.

Είναι $EH = ZE$ και $AE = E\Gamma$, άρα οι διαγώνιες ΑΓ και ΖΗ του ΑΗΓΖ διχοτομούνται.
Επομένως το ΑΗΓΖ είναι παραλληλόγραμμο, άρα $\Gamma Z = AH$.
Είναι $\Pi_{A\Delta H} = A\Delta + \Delta H + AH = A\Delta + BE + \Gamma Z$.

γ. Αν Θ το κοινό σημείο των διαμέσων στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$, και Κ το σημείο τομής των ΔΗ , ΓΖ , τότε στο τρίγωνο:
- ΖΚΗ , το Ε είναι το μέσο του ΖΗ και $E\Theta \,//\, KH$, οπότε $Z\Theta = \Theta K$
- ΒΘΓ , το Δ είναι το μέσο του ΒΓ και $\Delta K \,//\, B\Theta$, οπότε $\Theta K = K\Gamma$

Άρα $Z\Theta = \Theta K = K\Gamma$.

199 Θέμα 1760

α. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ το ύψος ΑΜ είναι και διάμεσος.
Επειδή $MA = MN$ και $MB = M\Gamma$, το ΑΒΝΓ είναι παραλληλόγραμμο.
Αφού επιπλέον $AB = A\Gamma$, το ΑΒΝΓ είναι ρόμβος.

β. Επειδή το ΑΒΝΓ είναι ρόμβος, η ΓΜ είναι η μεσοκάθετος του ΑΝ , οπότε $\Delta A = \Delta N$.
Άρα το τρίγωνο ΑΔΝ είναι ισοσκελές.

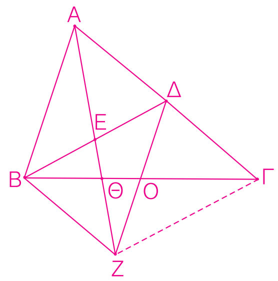
γ. Στο τρίγωνο ΑΔΝ η ΔΜ είναι διάμεσος και $\Gamma\Delta = B\Gamma = 2\Gamma M$.

Είναι:
- $\Gamma M = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2}$
- $\Gamma\Delta + \Gamma M = \Delta M \Leftrightarrow 2\Gamma M + \Gamma M = \Delta M \Leftrightarrow 3\Gamma M = \Delta M \Leftrightarrow \Gamma M = \frac{1}{3}\Delta M$

Οπότε $\Gamma\Delta = \frac{2}{3}\Delta M$, άρα το Γ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΔΝ .

200 Θέμα 1827

α. Είναι $AE = EZ$ και $EB = E\Delta$, οπότε το ΑΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

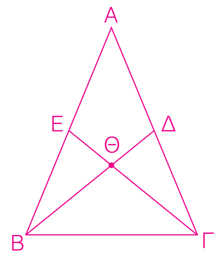


β. Είναι $BZ \,//=\, A\Delta$, οπότε $BZ \,//=\, \Gamma\Delta$.
Άρα το ΒΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Αν Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΒΓ και ΔΖ του παραλληλογράμμου ΒΔΓΖ, τότε το Ο είναι μέσο της ΔΖ.
Οι ΒΟ , ΖΕ είναι διάμεσοι του τριγώνου ΒΔΖ , οπότε το Θ είναι το βαρύκεντρό του.

201 Θέμα 1706

Έστω ΒΔ , ΓΕ οι διάμεσοι του τριγώνου ΑΒΓ .



α. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:
- $AB = A\Gamma$
- $A\Delta = AE$
- $\hat{A}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $B\Delta = \Gamma E$, δηλαδή $\mu_\beta = \mu_\gamma$.

Άρα η Π ισχύει.

β. Διατύπωση

Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\mu_\beta = \mu_\gamma$, τότε $\beta = \gamma$.

Απόδειξη

Έχουμε $\mu_\beta = \mu_\gamma \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}\mu_\beta = \frac{2}{3}\mu_\gamma \\ \frac{1}{3}\mu_\beta = \frac{1}{3}\mu_\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B\Theta = \Gamma\Theta \\ \Theta\Delta = \Theta E \end{cases}$

Τα τρίγωνα ΘΒΕ και ΘΓΔ έχουν:

- $B\Theta = \Gamma\Theta$
- $\Theta E = \Theta\Delta$
- $B\widehat{\Theta}E = \Gamma\widehat{\Theta}\Delta$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $BE = \Gamma\Delta \Rightarrow 2BE = 2\Gamma\Delta \Rightarrow AB = A\Gamma$, δηλαδή $\beta = \gamma$.

γ. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\beta = \gamma$ αν και μόνο αν $\mu_\beta = \mu_\gamma$.

202 Θέμα 1719

α. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο τα ύψη του ΒΚ και ΓΛ είναι διάμεσοί του, οπότε το Ι είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ .

Άρα η ΑΙ θα διέρχεται από το μέσο της ΒΓ .

β. Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Λ, Κ είναι μέσα των ΑΒ, ΑΓ, οπότε $\Lambda K // = \frac{B\Gamma}{2}$.

Στο τρίγωνο ΙΒΓ τα Μ, Ν είναι μέσα των ΙΒ, ΙΓ οπότε $MN // = \frac{B\Gamma}{2}$.

Οπότε $\Lambda K = // MN$, άρα το ΜΛΚΝ είναι παραλληλόγραμμο.

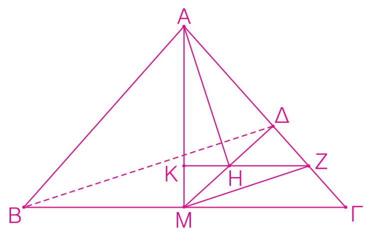
Στο τρίγωνο ΑΒΙ το ΛΜ ενώνει τα μέσα των ΑΒ και ΒΙ οπότε $\Lambda M // AI$.

Τα ΑΙ βρίσκεται στο φορέα του ύψους, άρα $AI \perp B\Gamma$ και επειδή $B\Gamma // \Lambda K$, θα είναι $AI \perp \Lambda K$.

Επομένως $\Lambda M \perp \Lambda K$, οπότε $M\widehat{\Lambda}K = 90^\circ$.

Άρα το ΜΛΚΝ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

203 Θέμα 1843



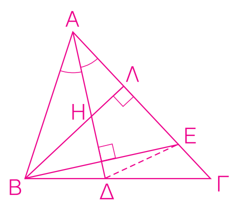
α. Στο τρίγωνο ΜΔΓ , το Η είναι το μέσο του ΔΜ και $HZ // M\Gamma$, οπότε το Ζ είναι μέσο του ΓΔ, άρα $HZ = \frac{M\Gamma}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$.

β. Στο τρίγωνο ΒΔΓ , τα Μ , Ζ είναι τα μέσα των ΒΓ , ΔΓ , οπότε $MZ // B\Delta$.

γ. Επειδή $ZK // B\Gamma$ και $B\Gamma \perp AM$, είναι $ZK \perp AM$.

Στο $\overset{\Delta}{AMZ}$ το Η είναι το ορθόκεντρό του, οπότε $AH \perp MZ$. Επειδή $AH \perp MZ$ και $MZ // B\Delta$, έχουμε $AH \perp B\Delta$.

204 Θέμα 1887



α. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ έχουν:

- $AB = AE$
- ΑΔ κοινή
- $B\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}E$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Επειδή $AB = AE$ και $\Delta B = \Delta E$, η ΑΔ είναι η μεσοκάθετος του ΒΕ .

γ. Στο τρίγωνο ΑΒΕ , το Η είναι το ορθόκεντρό του, οπότε $EH \perp AB$.

205 Θέμα 1748

α. Οι διαγώνιοι του τετραγώνου είναι κάθετες, οπότε:

- στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΕ είναι $\hat{\omega} = 90^o - O\hat{E}A$.
- στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΚΕ είναι $\hat{\varphi} = 90^o - O\hat{E}A$.

Άρα $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΕ και ΟΒΖ έχουν:

- $OA = OB$
- $\omega = \varphi$

Οπότε είναι ίσα, άρα $BZ = AE$ και $OZ = OE$.

Επειδή $O\Gamma = OB$ και $OZ = OE$ έχουμε $OZ + O\Gamma = OE + OB \Rightarrow \Gamma Z = BE$.

γ. Στο τρίγωνο ΕΑΒ τα ΒΖ και ΑΟ είναι τα ύψη του, άρα το Ζ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΕΑΒ . Οπότε το ΕΖ είναι στο φορέα του τρίτου ύψους του τριγώνου, άρα $EZ \perp AB$.

206 Θέμα 1777

α. i. • Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Μ , Ν είναι τα μέσα των ΑΒ , ΑΓ , οπότε $MN = \dfrac{B\Gamma}{2}$.

• Στο τρίγωνο ΗΒΓ τα Λ , Κ είναι τα μέσα των ΗΒ , ΗΓ οπότε $\Lambda K = \dfrac{B\Gamma}{2}$. Άρα $MN = \Lambda K$.

ii. Στα τρίγωνα ΒΑΗ και ΓΑΗ τα Μ, Λ και Ν , Κ είναι τα μέσα των πλευρών τους.

Οπότε $M\Lambda // \dfrac{AH}{2}$ και $NK // = \dfrac{AH}{2}$. Άρα $M\Lambda = NK = \dfrac{AH}{2}$.

iii. Επειδή $M\Lambda // = \dfrac{AH}{2}$ και $NK // = \dfrac{AH}{2}$, έχουμε $M\Lambda // = NK$, οπότε το ΜΝΚΛ είναι παραλληλόγραμμο.

Επειδή το Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ , έχουμε $AH \perp B\Gamma$.

Επειδή $M\Lambda // AH$ και $AH \perp B\Gamma$ είναι $M\Lambda \perp B\Gamma$.

Αφού $\Lambda K // B\Gamma$, έχουμε $M\Lambda \perp MN$, άρα $N\hat{M}\Lambda = 90^o$. Επομένως το ΜΝΚΛ είναι ορθογώνιο.

β. • Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Μ , Ο είναι τα μέσα πλευρών του, οπότε $MO // A\Gamma$.

• Στο τρίγωνο ΗΒΓ τα Ο , Κ είναι τα μέσα πλευρών του, οπότε $OK // BH$.

Επειδή $BH \perp A\Gamma$, είναι και $OK \perp MO$, οπότε $M\hat{O}K = 90^o$.

207 Θέμα 1764

α. Είναι $A\Delta // = B\Gamma$ και $\Delta A = AE$, οπότε $AE // = B\Gamma$, άρα το ΑΕΒΓ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Επειδή $BA \perp \Delta E$ και $\Delta A = AE$ η ΒΑ είναι η μεσοκάθετος του ΕΔ , οπότε $B\Delta = BE$.

Είναι $A\Gamma = 2B\Gamma \Leftrightarrow B\Delta = 2A\Delta \Leftrightarrow B\Delta = \Delta E$.

Οπότε $B\Delta = \Delta E = EB$, άρα το τρίγωνο ΒΕΔ είναι ισόπλευρο.

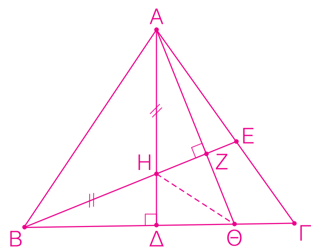
γ. Στο $\overset{\triangle}{EB\Delta}$, τα ΕΟ και ΒΑ είναι ύψη, οπότε το Ζ είναι το ορθόκεντρό του. Άρα $\Delta Z \perp EB$.

208 Θέμα 1754

α. i. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΗΔΒ και ΗΖΑ έχουν:

- $HB = HA$
- $B\hat{H}\Delta = A\hat{H}Z$.

Άρα είναι ίσα.



ii. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΗΔΘ και ΗΖΘ έχουν:

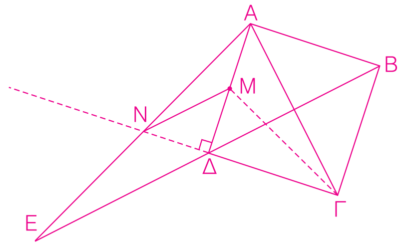
- ΗΘ κοινή
- $H\Delta = HZ$ από το **i.** ερώτημα.

Άρα είναι ίσα, οπότε $\Delta\Theta = \Theta Z$.

iii. Στο τρίγωνο $ΑΒΘ$ το $Η$ είναι το ορθόκεντρό του, οπότε $ΘΗ \perp ΑΒ$ και επειδή $ΗΑ = ΗΒ$ η $ΘΗ$ είναι η μεσοκάθετος του $ΑΒ$.

β. Τα $ΑΖ$ και $ΒΔ$ είναι ύψη του τριγώνου $ΑΗΒ$ που τέμνονται στο $Θ$.
Άρα το $Θ$ είναι το ορθόκεντρο του τρίγωνου $ΑΗΒ$.

209 Θέμα 1780



α. Στο τρίγωνο $ΕΑΒ$ το $Δ$ είναι μέσο του $ΒΕ$ και $ΔΝ // ΑΒ$.

Επομένως το $Ν$ είναι μέσο του $ΑΕ$, οπότε $ΔΝ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΑΔ}{2} = ΔΜ$.

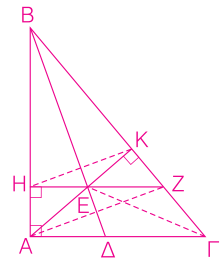
β. Το τρίγωνο $ΔΝΜ$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε $\hat{Δ} = 90^{\circ}$ και $Δ\widehat{Ν}Μ = Ν\widehat{Μ}Δ = 45^{\circ}$.

γ. i. Στο τρίγωνο $ΑΔΕ$ τα $Ν$, $Μ$ είναι μέσα των $ΑΕ$, $ΑΔ$, οπότε $ΜΝ // ΔΕ \Rightarrow ΜΝ // ΒΔ$.

Επειδή $ΑΓ \perp ΒΔ$, έχουμε $ΜΝ \perp ΑΓ$.

ii. Στο τρίγωνο $ΑΝΓ$ τα $ΑΔ$ και $ΝΜ$ είναι ύψη του, άρα το $Μ$ είναι το ορθόκεντρό του. Οπότε $ΓΜ \perp ΑΝ$.

210 Θέμα 1865



α. i. Επειδή η $ΒΕ$ είναι διχοτόμος της $\hat{Β}$ έχουμε $ΕΗ = ΕΚ$.
Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΕΗΑ$ και $ΕΚΖ$ έχουν:
- $ΕΗ = ΕΚ$
- $Η\hat{Ε}Α = Κ\hat{Ε}Ζ$

Οπότε είναι ίσα.

ii. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΗΒΕ$ και $ΚΒΕ$ έχουν:
- $ΒΕ$ κοινή
- $Η\hat{Β}Ε = Κ\hat{Β}Ε$

Επομένως είναι ίσα, οπότε $ΒΗ = ΒΚ$.

Άρα το τρίγωνο $ΒΚΗ$ είναι ισοσκελές.

iii. Στο τρίγωνο $ΑΒΖ$ τα $ΑΚ$ και $ΖΗ$ είναι ύψη του, άρα το $Ε$ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου.

Οπότε $ΒΔ \perp ΑΖ$.

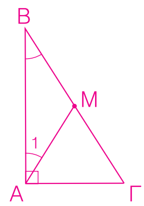
β. Αν το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές, το ύψος του $ΑΚ$ είναι και διχοτόμος του.

Επομένως το $Ε$ είναι το έγγεντρο του τριγώνου. Άρα η $ΓΕ$ είναι διχοτόμος της $\hat{Γ}$.

23. Διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου

Θέμα 2

211 Θέμα 1647

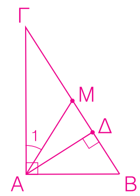


α. Είναι $\hat{Β} + \hat{Γ} = 90^{\circ} \Leftrightarrow 35^{\circ} + \hat{Γ} = 90^{\circ} \Leftrightarrow \hat{Γ} = 55^{\circ}$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ η $ΑΜ$ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, οπότε $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2} \Rightarrow ΑΜ = ΜΒ$. Είναι $ΑΜ = ΜΒ$ οπότε $\hat{Α}_1 = \hat{Β} = 35^{\circ}$ και

$\hat{Α}_1 + \hat{Β} + Α\widehat{Μ}Β = 180^{\circ} \Leftrightarrow 35^{\circ} + 35^{\circ} + Α\widehat{Μ}Β = 180^{\circ} \Leftrightarrow Α\widehat{Μ}Β = 110^{\circ}$.

212 Θέμα 1690



α. Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου $ΑΒΓ$ ($\hat{Α} = 90^{\circ}$) ισχύει ότι:

$\hat{Β} + \hat{Γ} = 90^{\circ} \Leftrightarrow \hat{Β} = 90^{\circ} - \hat{Γ}$

Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου $ΑΔΓ$ ισχύει ότι:

$Γ\widehat{Α}Δ + \hat{Γ} = 90^{\circ} \Leftrightarrow Γ\widehat{Α}Δ = 90^{\circ} - \hat{Γ}$.

Οπότε $\hat{Β} = Γ\hat{Α}Δ$

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A}=90^o)$ η ΑΜ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα.

Οπότε $AM=\dfrac{B\Gamma}{2}=M\Gamma$, άρα $\hat{\Gamma}=\hat{A}_1$.

Η γωνία $A\hat{M}\Delta$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΜΓ , οπότε $A\hat{M}\Delta=\hat{\Gamma}+\hat{A}_1=2\hat{\Gamma}$.

213 Θέμα 1586

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΟΑ η ΒΜ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα.

Άρα $BM=\dfrac{OA}{2}=MA$. Άρα το τρίγωνο ΒΜΑ είναι ισοσκελές.

β. Επειδή $BM=MO$ έχουμε $O\hat{B}M=B\hat{O}M$.

Η γωνία $B\hat{M}A$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΟΒΜ , οπότε $B\widehat{M}A=O\hat{B}M+B\hat{O}M=x\hat{O}A+x\hat{O}A=2\cdot x\hat{O}A$.

214 Θέμα 1633

α. • Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A}=90^o)$ η ΑΜ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε

$AM=\dfrac{B\Gamma}{2}=M\Gamma$, άρα $M\hat{A}\Gamma=\hat{\Gamma}=25^o$.

Η γωνία $A\hat{M}B$ είναι εξωτερική στο $\overset{\triangle}{AM\Gamma}$, οπότε $A\hat{M}B=\hat{\Gamma}+M\hat{A}\Gamma=2\hat{\Gamma}=50^o$.

• Είναι $\hat{B}+\hat{\Gamma}=90^o \Leftrightarrow \hat{B}+25^o=90^o \Leftrightarrow \hat{B}=65^o$.

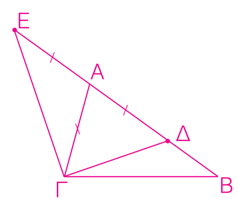
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΗΑΒ είναι $H\hat{A}B+\hat{B}=90^o \Leftrightarrow H\hat{A}B+65^o=90^o \Leftrightarrow H\hat{A}B=25^o$.

• Η γωνία $A\hat{\Delta}B$ είναι εξωτερική του $\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$, οπότε $A\hat{\Delta}B=\hat{\Gamma}+\Delta\hat{A}\Gamma=\hat{\Gamma}+\dfrac{\hat{A}}{2}=25^o+45^o=70^o$.

β. Είναι: • $M\hat{A}\Delta=\Delta\hat{A}\Gamma-M\hat{A}\Gamma=\dfrac{\hat{A}}{2}-M\hat{A}\Gamma=45^o-25^o=20^o$

• $\Delta\hat{A}H=\Delta\hat{A}B-H\hat{A}B=\dfrac{\hat{A}}{2}-H\hat{A}B=45^o-25^o=20^o$

215 Θέμα 1702



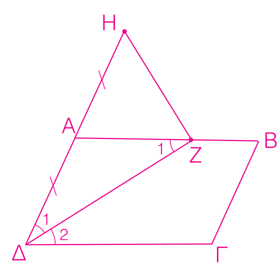
α. Στο τρίγωνο ΔΓΕ είναι $A\Gamma=\dfrac{\Delta E}{2}$, οπότε η διάμεσος ΑΓ είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί.

Οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Γ , άρα $\Delta\Gamma\perp E\Gamma$.

β. Επειδή $A\Gamma=A\Delta$ το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές, οπότε $A\hat{\Delta}\Gamma=A\hat{\Gamma}\Delta$.

Η $E\hat{A}\Gamma$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΑΔΓ , οπότε $E\hat{A}\Gamma=A\hat{\Delta}\Gamma+A\hat{\Gamma}\Delta=2A\hat{\Delta}\Gamma$.

216 Θέμα 1537



α. Είναι:

• $\hat{\Delta}_1=\hat{\Delta}_2$, αφού ΔΖ διχοτόμος

• $\hat{\Delta}_2=\hat{Z}_1$ ως εντός εναλλάξ . Άρα $\hat{\Delta}_1=\hat{Z}_1$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές.

β. Στο $\overset{\triangle}{\Delta ZH}$ είναι $ZA=\dfrac{\Delta H}{2}$, οπότε η ΖΑ είναι διάμεσος και ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί.

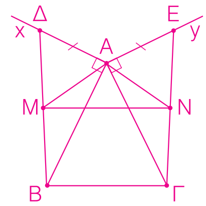
Άρα το $\overset{\triangle}{\Delta ZH}$ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία $\hat{Z}$.

217 Θέμα 1551

α. Στο $\overset{\triangle}{\Delta\Gamma B}$ είναι $\Gamma A = \dfrac{B\Delta}{2}$, οπότε η ΓA είναι διάμεσος και ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί. Οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{\Gamma} = 90^\circ$.

β. Στο $\overset{\triangle}{B\Delta E}$ τα A, Γ είναι τα μέσα των $B\Delta$, ΔE, οπότε $A\Gamma // BE$ και $A\Gamma = \dfrac{BE}{2}$.

218 Θέμα 1555



α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ έχουν:
- $A\Delta = AE$
- $AB = A\Gamma$

Άρα είναι ίσα, οπότε $B\Delta = \Gamma E$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο:
- $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ ($\hat{A} = 90^\circ$) η AM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $AM = \dfrac{B\Delta}{2}$ (1).
- $\overset{\triangle}{A\Gamma E}$ ($\hat{A} = 90^\circ$) η AN είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $AN = \dfrac{\Gamma E}{2}$ (2).

Επειδή $B\Delta = \Gamma E$ από τις (1) και (2) προκύπτει $AM = AN$, οπότε το $\overset{\triangle}{AMN}$ είναι ισοσκελές.

219 Θέμα 1680

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔAB και $EA\Gamma$ έχουν:
- $AB = A\Gamma$
- $\Delta\hat{A}B = E\hat{A}\Gamma$

Άρα είναι ίσα, οπότε $B\Delta = \Gamma E$.

β.i. Στα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta B\Gamma$ και $EB\Gamma$ οι $M\Delta$ και ME είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε $M\Delta = \dfrac{B\Gamma}{2}$ και $ME = \dfrac{B\Gamma}{2}$. Άρα $M\Delta = ME$.

ii. Τα $\overset{\triangle}{MA\Delta}$ και $\overset{\triangle}{MAE}$ έχουν:
- $A\Delta = AE$
- $M\Delta = ME$
- MA κοινή

Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ), οπότε $\Delta\hat{M}A = E\hat{M}A$.

Επομένως η AM διχοτομεί τη γωνία $\Delta\hat{M}E$.

220 Θέμα 1675

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα KEB και $\Lambda Z\Gamma$ έχουν:
- $KB = \Lambda\Gamma$
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, αφού το $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελές.

Άρα είναι ίσα.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο:
- $\overset{\triangle}{EBK}$ ($\hat{E} = 90^\circ$) η EH είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $EH = \dfrac{KB}{2}$ (1).
- $\overset{\triangle}{Z\Gamma\Lambda}$ ($\hat{Z} = 90^\circ$) η $Z\Theta$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $Z\Theta = \dfrac{\Gamma\Lambda}{2}$ (2).

Επειδή $KB = \Gamma\Lambda$ από τις (1) και (2) προκύπτει $EH = Z\Theta$.

221 Θέμα 1655

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ η AM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$. Άρα το $\overset{\Delta}{MA\Gamma}$ είναι ισοσκελές, επομένως $M\hat{A}\Gamma = M\hat{\Gamma}A$ (1) .

β. Επειδή $Ax // B\Gamma$, είναι $x\hat{A}\Gamma = M\hat{\Gamma}A$ (2) , ως εντός εναλλάξ.

Από τις (1) , (2) προκύπτει $M\hat{A}\Gamma = x\hat{A}\Gamma$, άρα η $A\Gamma$ είναι διχοτόμος της $M\hat{A}x$.

222 Θέμα 1685

α. Στα ορθογώνια τρίγωνα $BA\Gamma$ $(\hat{B} = 90^\circ)$ και $\Delta A\Gamma$ $(\hat{\Delta} = 90^\circ)$, οι BZ , ΔZ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε $BZ = \frac{A\Gamma}{2}$ και $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2}$.

Επομένως $BZ = \Delta Z$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $B\widehat{A}\Gamma + A\widehat{\Gamma}B = 90^\circ \Leftrightarrow B\widehat{A}\Gamma + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow B\widehat{A}\Gamma = 60^\circ$.

Στο ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι $\Delta\widehat{A}\Gamma = A\widehat{\Gamma}\Delta = 45^\circ$.

Είναι:
- $B\hat{A}\Delta = B\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}\Delta = 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ$
- $B\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Gamma}B + A\hat{\Gamma}\Delta = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$

223 Θέμα 1615

α. Στο $\overset{\Delta}{AEB}$ είναι $E\Delta = \frac{AB}{2}$, οπότε η διάμεσός του $E\Delta$ είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί.

Άρα $A\hat{E}B = 90^\circ$, επομένως το $\overset{\Delta}{AEB}$ είναι ορθογώνιο.

β. Στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ η BE είναι διάμεσος και ύψος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

γ. Στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ τα Δ , E είναι τα μέσα των AB , $A\Gamma$, οπότε $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} \Rightarrow B\Gamma = 2\Delta E = 2 \cdot 10 = 20$.

Η περίμετρος Π του $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ είναι: $\Pi = AB + B\Gamma + A\Gamma = 20 + 20 + 16 = 56$.

224 Θέμα 1614

α. Στο $\overset{\Delta}{AEB}$ είναι $E\Delta = \frac{AB}{2}$, οπότε η διάμεσός του $E\Delta$ είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί.

Άρα $A\hat{E}B = 90^\circ$, επομένως το $\overset{\Delta}{AEB}$ είναι ορθογώνιο.

β. Στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ τα Δ , E είναι τα μέσα των AB , $A\Gamma$, οπότε $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} \Rightarrow B\Gamma = 2\Delta E = 2 \cdot 10 = 20$.

γ. Είναι $\Pi_{AB\Gamma} = AB + A\Gamma + B\Gamma = 20 + 16 + 20 = 56$.

225 Θέμα 1671

α. Στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ τα Δ , E είναι μέσα των $B\Gamma$, AB , οπότε $\Delta E = \frac{A\Gamma}{2} \Rightarrow A\Gamma = 2\Delta E = 2 \cdot 1 = 2$.

β. Επειδή το $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο $(\hat{A} = 90^\circ)$ και $\hat{B} = 30^\circ$, είναι $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} \Rightarrow B\Gamma = 2 \cdot 2 = 4$.

γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ $(\hat{A} = 90^\circ)$ η $A\Delta$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $A\Delta = \frac{B\Gamma}{2} = 2$.

226 Θέμα 1548

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(\hat{Α}=90^\circ)$ η $ΑΜ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $ΑΜ=\frac{ΒΓ}{2}=ΜΓ$. Άρα $Μ\hat{Α}Γ=\hat{Γ}$.

Στο $\overset{\Delta}{ΜΑΓ}$ είναι $Α\widehat{Μ}Γ+\hat{Γ}+Μ\hat{Α}Γ=180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ+\hat{Γ}+\hat{Γ}=180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{Γ}=60^\circ \Leftrightarrow \hat{Γ}=30^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι $\hat{Γ}=30^\circ$, επομένως $ΑΒ=\frac{ΒΓ}{2}=4\text{ cm}$.

β. Στο ισοσκελές τρίγωνο $ΑΜΓ$ το $ΜΔ$ είναι ύψος του, άρα είναι και διάμεσος. Οπότε το $Δ$ είναι μέσο του $ΑΓ$. Στο $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$ τα $Μ$, $Δ$ είναι μέσα των $ΒΓ$ και $ΑΓ$, οπότε $ΜΔ=\frac{ΑΒ}{2}=2\text{ cm}$.

227 Θέμα 1638

α. Επειδή $ΔΒ=ΔΓ$ είναι $\hat{Β}=Δ\hat{Γ}Β=\frac{\hat{Γ}}{2}$, οπότε $\hat{Γ}=2\hat{Β}$.

Είναι $\hat{Β}+\hat{Γ}=90^\circ \Leftrightarrow \hat{Β}+2\hat{Β}=90^\circ \Leftrightarrow 3\hat{Β}=90^\circ \Leftrightarrow \hat{Β}=30^\circ$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΓΔ$ είναι $Α\hat{Γ}Δ=30^\circ$, οπότε $ΑΔ=\frac{ΓΔ}{2}=1\text{ cm}$.

Άρα $ΑΒ=ΑΔ+ΔΒ=1+2=3\text{ cm}$.

228 Θέμα 1686

α. • Επειδή το $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές και το $ΑΕ$ είναι διάμεσος θα είναι και ύψος, οπότε $Α\hat{Ε}Γ=90^\circ$.

• Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΕΓ$ $(\hat{Ε}=90^\circ)$ η $ΕΔ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $ΕΔ=\frac{ΑΓ}{2}=ΔΓ$, επομένως το $\overset{\Delta}{ΕΔΓ}$ είναι ισοσκελές.

• Είναι $\hat{Γ}=\hat{Β}=30^\circ$, $Δ\hat{Ε}Γ=\hat{Γ}=30^\circ$.

Στο $\overset{\Delta}{ΔΕΓ}$ είναι $Ε\hat{Δ}Γ+Δ\hat{Ε}Γ+\hat{Γ}=180^\circ \Leftrightarrow Ε\hat{Δ}Γ+30^\circ+30^\circ=180^\circ \Leftrightarrow Ε\hat{Δ}Γ=120^\circ$.

β. Είναι:

• $Ε\hat{Α}Δ=90^\circ-\hat{Γ}=90^\circ-30^\circ=60^\circ$

• $ΕΔ=ΔΑ$, οπότε $Α\hat{Ε}Δ=Ε\hat{Α}Δ=60^\circ$.

Επομένως $Α\hat{Δ}Ε=180^\circ-60^\circ-60^\circ=60^\circ$.

Άρα το $\overset{\Delta}{ΑΔΕ}$ είναι ισόπλευρο.

229 Θέμα 1606

α. Είναι $\hat{Β}=2\hat{Γ}$ και $\hat{Β}+\hat{Γ}=90^\circ \Leftrightarrow 2\hat{Γ}+\hat{Γ}=90^\circ \Leftrightarrow 3\hat{Γ}=90^\circ \Leftrightarrow \hat{Γ}=30^\circ$.

Οπότε $\hat{Β}=2\cdot 30^\circ=60^\circ$.

β. Επειδή στο $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$ είναι $\hat{Α}=90^\circ$ και $ΑΜ$ διάμεσος προς την υποτείνουσα, προκύπτει $ΑΜ=\frac{ΒΓ}{2}=ΜΓ$.

Οπότε το $\overset{\Delta}{ΑΜΓ}$ είναι ισοσκελές,.

γ. Είναι $ΜΑ=ΜΓ$ άρα $Μ\hat{Α}Γ=\hat{Γ}=30^\circ$

Στο $\overset{\Delta}{ΑΜΓ}$ είναι $Α\widehat{Μ}Γ+\hat{Γ}+Μ\hat{Α}Γ=180^\circ \Leftrightarrow Α\widehat{Μ}Γ+30^\circ+30^\circ=180^\circ \Leftrightarrow Α\widehat{Μ}Γ=120^\circ$

230 Θέμα 1704

α. Οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{B}$ είναι εντός και επί τα αυτά, οπότε $\hat{A}+\hat{B}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}+120^\circ=180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}=60^\circ$.

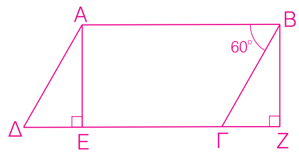
Οι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου είναι ίσες, οπότε $\hat{\Gamma}=\hat{A}=60^\circ$. Άρα $\hat{A}=\hat{\Gamma}=60^\circ$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΓΔ η ΕΖ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $EZ=\frac{\Gamma\Delta}{2}=\frac{AB}{2}=AK$.

γ. Επειδή $EZ=Z\Gamma$, είναι $Z\hat{E}\Gamma=\hat{\Gamma}=60^\circ$.

Άρα $E\hat{Z}\Gamma=60^\circ$.

231 Θέμα 1691



α. Είναι $BZ\perp\Gamma\Delta$ και $AB//\Gamma\Delta$ οπότε $AB\perp BZ$.

Άρα $Z\hat{B}\Gamma=A\hat{B}Z-\hat{B}=90^\circ-60^\circ=30^\circ$, οπότε $\Gamma Z=\frac{B\Gamma}{2}=\frac{A\Delta}{2}$.

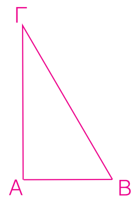
β. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ έχουν:

- $A\Delta=B\Gamma$
- $AE=BZ$, ως αποστάσεις παραλλήλων

Άρα είναι ίσα.

γ. Το ΑΒΖΕ είναι ορθογώνιο, γιατί έχει $\hat{B}=\hat{Z}=\hat{E}=90^\circ$.

232 Θέμα 1631



α. Είναι:
- $\hat{A}+\hat{\Gamma}=120^\circ \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}=120^\circ \Leftrightarrow 4\hat{\Gamma}=120^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=30^\circ$
- $\hat{A}=3\hat{\Gamma}=3\cdot 30^\circ=90^\circ$
- $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ+\hat{B}+30^\circ=180^\circ \Leftrightarrow \hat{B}=60^\circ$

Άρα $\hat{A}=90^\circ$, $\hat{B}=60^\circ$ και $\hat{\Gamma}=30^\circ$.

β. Επειδή το $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο $(\hat{A}=90^\circ)$ και $\hat{\Gamma}=30^\circ$, προκύπτει $AB=\frac{B\Gamma}{2}=\frac{2}{2}=1$ cm .

233 Θέμα 1649

α. Είναι $\hat{B}=2\hat{\Gamma}$ και $\hat{B}+\hat{\Gamma}=90^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}=90^\circ \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma}=90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=30^\circ$.

Οπότε $\hat{B}=2\cdot 30^\circ=60^\circ$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ είναι $B\hat{A}\Delta+\hat{B}=90^\circ \Leftrightarrow B\hat{A}\Delta+60^\circ=90^\circ \Leftrightarrow B\hat{A}\Delta=30^\circ$

γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΑΔ είναι $B\hat{A}\Delta=30^\circ$, οπότε $B\Delta=\frac{AB}{2}$.

234 Θέμα 1619

α. Επειδή $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ είναι:

- $\omega=B\hat{A}K=60^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.
- $\varphi=180^\circ-90^\circ=90^\circ$, ως εντός και επί τα αυτά μέρη.

β. Είναι $A\hat{K}B=180^\circ-\hat{\varphi}=180^\circ-90^\circ=90^\circ$.

Άρα το τρίγωνο $\overset{\Delta}{ABK}$ είναι ορθογώνιο.

γ. Το $\overset{\Delta}{ABK}$ είναι ορθογώνιο $(\hat{K}=90^\circ)$ και $K\hat{B}A+K\hat{A}B=90^\circ \Leftrightarrow K\hat{B}A+60^\circ=90^\circ \Leftrightarrow K\hat{B}A=30^\circ$.

Επομένως $KA=\frac{AB}{2}=3$.

235 Θέμα 1625

α. Είναι $\Delta\hat{A}Z = \frac{\hat{A}_{\varepsilon\xi}}{2} = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΓ $(\hat{\Delta} = 90^\circ)$ η ΔΖ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2} = AZ$.

Άρα το $\overset{\Delta}{A\Delta Z}$ είναι ισοσκελές με $\Delta\hat{A}Z = 60^\circ$, οπότε είναι ισόπλευρο.

β. Στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ τα Ε , Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ , ΑΓ , οπότε $EZ = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{AB}{2} = AE$.

Είναι $AE = \frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma}{2} = \Delta Z$ και $\Delta Z = A\Delta$, οπότε $EZ = AE = \Delta Z = A\Delta$.

Άρα το ΑΔΖΕ είναι ρόμβος.

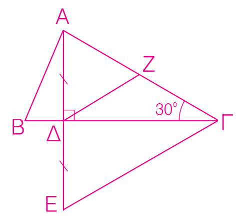
236 Θέμα 1543

α. Οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{\Delta}$ είναι εντός και επί τα αυτά, οπότε $\widehat{A} + \widehat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + \widehat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Delta} = 60^\circ$.

Η ΔΕ είναι διχοτόμος της $\widehat{\Delta}$, οπότε $A\hat{\Delta}E = \frac{\widehat{\Delta}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΔ $(\hat{Z} = 90^\circ)$ είναι $A\hat{\Delta}E = 30^\circ$, οπότε $AZ = \frac{A\Delta}{2} = \frac{\frac{AB}{2}}{2} = \frac{AB}{4}$.

237 Θέμα 1567



α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΓ $(\hat{\Delta} = 90^\circ)$ η ΔΖ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2}$.

β. Στο $\overset{\Delta}{AE\Gamma}$ η ΓΔ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε είναι ισοσκελές και η ΓΔ διχοτόμος του.

Επομένως $A\hat{\Gamma}E = 2\hat{\Gamma} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$.

Άρα το $\overset{\Delta}{A\Gamma E}$ είναι ισοσκελές με μία γωνία 60° , οπότε είναι ισόπλευρο.

Θέμα 4

238 Θέμα 1812

α. Επειδή οι ΜΔ , ΜΕ είναι διχοτόμοι των γωνιών $B\hat{M}A$, $A\hat{M}\Gamma$ έχουμε $\Delta\widehat{M}A = \frac{B\widehat{M}A}{2}$ και $A\widehat{M}E = \frac{A\widehat{M}\Gamma}{2}$.

Οπότε $\Delta\hat{M}E = \Delta\widehat{M}A + A\widehat{M}E = \frac{B\widehat{M}A}{2} + \frac{A\widehat{M}\Gamma}{2} = \frac{B\widehat{M}A + A\widehat{M}\Gamma}{2} = \frac{B\widehat{M}\Gamma}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.

β. Στα ορθογώνια τρίγωνα ΔΜΕ $(\hat{M} = 90^\circ)$ και ΔΑΕ $(\hat{A} = 90^\circ)$, οι ΜΚ , ΚΑ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε $MK = \frac{\Delta E}{2}$, $KA = \frac{\Delta E}{2}$.

Άρα $MK = KA$.

239 Θέμα 1738

α. Επειδή $\hat{B}=2\hat{\Gamma}$ και η $B\Delta$ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ έχουμε $\Delta\hat{B}\Gamma=\frac{\hat{B}}{2}=\frac{2\hat{\Gamma}}{2}=\hat{\Gamma}$, οπότε το $\overset{\triangle}{B\Delta\Gamma}$ είναι ισοσκελές.

β. Είναι $M\hat{N}\Gamma=\Delta\hat{B}\Gamma$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

Οπότε $M\hat{N}\Gamma=\hat{\Gamma}$, επομένως το $\overset{\triangle}{MN\Gamma}$ είναι ισοσκελές.

γ. Στο ισοσκελές τρίγωνο $MN\Gamma$ είναι $MN=M\Gamma=\frac{A\Gamma}{2}$.

Στο $\overset{\triangle}{AN\Gamma}$, η NM είναι διάμεσος και ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί.

Οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{N}=90^o$. Άρα $AN\perp B\Gamma$.

240 Θέμα 1831

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι:

- $\hat{B}=2\hat{\Gamma}$
- $\hat{B}+\hat{\Gamma}=90^o\Leftrightarrow 2\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}=90^o\Leftrightarrow 3\hat{\Gamma}=90^o\Leftrightarrow\hat{\Gamma}=30^o$, οπότε $\hat{B}=2\cdot 30^o=60^o$
- $E\hat{B}\Delta=180^o-\hat{B}=180^o-60^o=120^o$

Το $\overset{\triangle}{BE\Delta}$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{\Delta}=\hat{E}$ και $E\hat{\Delta}B+\hat{\Delta}+\hat{E}=180^o\Leftrightarrow 120^o+\hat{E}+\hat{E}=180^o\Leftrightarrow 2\hat{E}=60^o\Leftrightarrow\hat{E}=30^o$.

Άρα $\hat{\Delta}=\hat{E}=30^o$ και $E\hat{B}\Delta=120^o$.

β.i. Το $\overset{\triangle}{A\Delta B}$ είναι ορθογώνιο $(\hat{\Delta}=90^o)$ με $B\hat{A}\Delta=90^o-\hat{B}=90^o-60^o=30^o$.

Οπότε $B\Delta=\frac{AB}{2}\Leftrightarrow BE=\frac{AB}{2}$.

ii. Είναι $AE=AB+BE=AB+\frac{AB}{2}=\frac{3AB}{2}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ $(\hat{A}=90^o)$ είναι $\hat{\Gamma}=30^o$.

Οπότε $AB=\frac{B\Gamma}{2}\Leftrightarrow B\Gamma=2AB$.

Είναι $\Delta\Gamma=B\Gamma-B\Delta=2AB-BE=2AB-\frac{AB}{2}=\frac{3AB}{2}$. Άρα $AE=\Gamma\Delta$.

241 Θέμα 1824

α. Στα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ οι διχοτόμοι BK, $\Gamma\Lambda$ είναι ύψη και διάμεσοι, οπότε τα K, Λ είναι μέσα των $A\Delta$, AE.

β. Στο τρίγωνο $A\Delta E$ τα K, Λ είναι τα μέσα των $A\Delta$, AE, οπότε $K\Lambda//\Delta E$.

Στο $\overset{\triangle}{A\Delta B}$ το K είναι μέσο της $A\Delta$ και $KM//\Delta B$, οπότε το M είναι μέσο της AB.

Στο $\overset{\triangle}{A\Gamma E}$ το Λ είναι μέσο της AE και $\Lambda N//\Gamma E$, οπότε το N είναι μέσο της $A\Gamma$.

Στα ορθογώνια τρίγωνα KAB και $\Lambda A\Gamma$ οι MK, $N\Lambda$ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, επομένως

$KM=\frac{AB}{2}=MA$ και $\Lambda N=\frac{A\Gamma}{2}=NA$.

Άρα τα $\overset{\triangle}{KMA}$, $\overset{\triangle}{AN\Lambda}$ είναι ισοσκελή.

γ. Τα M, N είναι τα μέσα των πλευρών AB, $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$, οπότε $MN=\frac{B\Gamma}{2}$.

Είναι $K\Lambda=KM+MN+N\Lambda=\frac{AB}{2}+\frac{B\Gamma}{2}+\frac{A\Gamma}{2}=\frac{AB+A\Gamma+B\Gamma}{2}$

242 Θέμα 1870

α. i. Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta B$ και $AE\Gamma$ έχουν:

- $A\Delta = AE$
- $AB = A\Gamma$

Οπότε είναι ίσα.

ii. Στα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta B$ $(\hat{A} = 90^o)$ και $AE\Gamma$ $(\hat{A} = 90^o)$, οι AZ, AH είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε $AZ = \frac{B\Delta}{2}$ και $AH = \frac{E\Gamma}{2}$.

Επειδή τα $\overset{\Delta}{A\Delta B}$, $\overset{\Delta}{AE\Gamma}$ είναι ίσα έχουμε $B\Delta = E\Gamma$.

Οπότε $AZ = AH$, επομένως το $\overset{\Delta}{ZAH}$ είναι ισοσκελές.

iii. Επειδή τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $AE\Gamma$ είναι ίσα έχουν $B\Delta = E\Gamma$ και $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}E$.

Τα τρίγωνα MBZ και ΓHM έχουν:

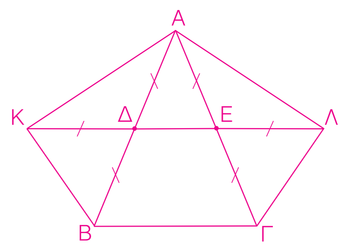
- $MB = M\Gamma$
- $BZ = H\Gamma$, ως μισά των ίσων πλευρών ΔB και $E\Gamma$
- $Z\hat{B}M = M\hat{\Gamma}H$, ως αθροίσματα ίσων γωνιών αφού $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}E$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $MZ = MH$.

Επειδή $AZ = AH$ και $MZ = MH$ η AM είναι η μεσοκάθετος του ZH.

β. Το λάθος είναι ότι οι γωνίες $\Delta\hat{A}B$ και $E\hat{A}\Gamma$ δεν είναι κατακορυφήν, αφού το $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ είναι οξυγώνιο οπότε οι πλευρές τους δεν είναι αντικείμενες ημιευθείες.

243 Θέμα 1808



α. Είναι $K\Delta = A\Delta = \frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma}{2} = AE = \Lambda E$.

β. Στο $\overset{\Delta}{AKB}$ είναι $K\Delta = \frac{AB}{2}$, οπότε η διάμεσος $K\Delta$ είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί.

Οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{K} = 90^o$.

- Στο τρίγωνο $A\Lambda\Gamma$ είναι $\Lambda E = \frac{A\Gamma}{2}$, οπότε η διάμεσος είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί. Οπότε το τρίγωνο $A\Lambda\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\Lambda = 90^o$.

γ. Τα $\overset{\Delta}{A\Delta K}$ και $\overset{\Delta}{AE\Lambda}$ έχουν:

- $A\Delta = AE$
- $\Delta K = E\Lambda$
- $A\hat{\Delta}K = A\hat{E}\Lambda$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $A\hat{\Delta}E$ και $A\hat{E}\Delta$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $AK = A\Lambda$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα AKB και $A\Lambda\Gamma$ έχουν:

- $AK = A\Lambda$
- $AB = A\Gamma$

Οπότε είναι ίσα.

244 Θέμα 1771

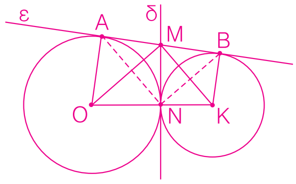
α. Είναι:

- $MA = MN$, ως εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο (O, ρ_1)
- $MB = MN$, ως εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο (K, ρ_2)

Οπότε $MA = MB$, άρα το M είναι το μέσο του AB .

β. Οι MO και MK είναι διακεντρικές ευθείες οπότε είναι οι διχοτόμοι των γωνιών $A\hat{M}N$ και $B\hat{M}N$. Οπότε:

- $O\widehat{M}N = \dfrac{A\widehat{M}N}{2}$, $N\widehat{M}K = \dfrac{N\widehat{M}B}{2}$
- $O\widehat{M}K = O\widehat{M}N + N\widehat{M}K = \dfrac{A\widehat{M}N + N\widehat{M}B}{2} = \dfrac{A\widehat{M}B}{2} = \dfrac{180^o}{2} = 90^o$



γ. Η NM είναι διάμεσος στο τρίγωνο ANB και $NM = MA = \dfrac{AB}{2}$.

Άρα το τρίγωνο ANB είναι ορθογώνιο με $A\hat{N}B = 90^o$.

245 Θέμα 1796

α. Οι ακτίνες στα σημεία επαφής είναι κάθετες στις εφαπτόμενες, άρα $KA \perp OA$ και $KB \perp OB$.

Στα ορθογώνια τρίγωνα AOK $(\hat{A} = 90^o)$ και BOK $(\hat{B} = 90^o)$ οι AE , BE είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε $AE = \dfrac{OK}{2}$ και $BE = \dfrac{OK}{2}$.

Άρα $AE = BE$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο OAK είναι

$AK = \rho = EK = \dfrac{OK}{2}$, οπότε $A\hat{O}K = 30^o$.

γ. Είναι $AE = \dfrac{OK}{2}$ και $AK = \dfrac{OK}{2}$ άρα $AE = AK$.

Οπότε $AE = AK = KB = BE$, άρα το $AKBE$ είναι ρόμβος.

246 Θέμα 1811

α. Οι $B\Delta$, $A\Delta$ είναι οι διχοτόμοι των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών $B\widehat{A}\Gamma$ και $A\widehat{B}E$, οπότε

$B\widehat{A}\Delta + A\widehat{B}\Delta = \dfrac{B\widehat{A}\Gamma}{2} + \dfrac{A\widehat{B}E}{2} = \dfrac{B\widehat{A}\Gamma + A\widehat{B}E}{2} = \dfrac{180^o}{2} = 90^o$

Στο τρίγωνο $AB\Delta$ είναι $B\widehat{A}\Delta + A\widehat{B}\Delta + B\widehat{\Delta}A = 180^o \Leftrightarrow 90^o + B\widehat{\Delta}A = 180^o \Leftrightarrow B\widehat{\Delta}A = 90^o$

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔAB $(\hat{\Delta} = 90^o)$ η ΔM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $\Delta M = \dfrac{AB}{2} = AM$.

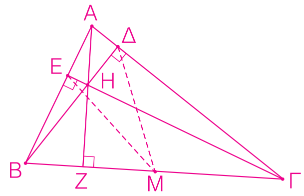
Άρα $M\hat{\Delta}A = M\hat{A}\Delta$ (1) . Στο τρίγωνο $MA\Delta$ η γωνία $B\hat{M}\Delta$ είναι εξωτερική, οπότε

$B\hat{M}\Delta = M\hat{\Delta}A + M\hat{A}\Delta \overset{(1)}{=} 2M\hat{\Delta}A$.

γ. Έχουμε $\Gamma\hat{A}\Delta = M\hat{A}\Delta \overset{(1)}{=} M\hat{\Delta}A$, οπότε οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες, άρα $M\Delta \parallel \varepsilon$.

247 Θέμα 1716

α. i. Στα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΓ και ΕΒΓ τα ΔΜ, ΕΜ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε $ΔΜ=\frac{ΒΓ}{2}$ και $ΕΜ=\frac{ΒΓ}{2}$. Άρα $ΜΔ=ΜΕ$.



ii. Επειδή το Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε $ΑΗ\perp ΒΓ$.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΔ είναι $Α\widehat{Η}Δ+Η\widehat{Α}Δ=90^o \Leftrightarrow Α\widehat{Η}Δ=90^o-Η\widehat{Α}Δ$, (1).
Έστω Ζ το σημείο τομής της ΑΗ με τη ΒΓ.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΓ είναι
$\widehat{Γ}+Ζ\widehat{Α}Γ=90^o \Leftrightarrow \widehat{Γ}=90^o-Ζ\widehat{Α}Γ \Leftrightarrow \widehat{Γ}=90^o-Η\widehat{Α}Δ$ (2).

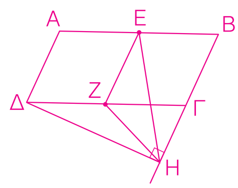
Από τις (1), (2) έχουμε $Α\hat{Η}Δ=\hat{Γ}$.

2ος τρόπος

Οι γωνίες $Α\widehat{Η}Δ$ και $\widehat{Γ}$ είναι οξείες και έχουν πλευρές κάθετες, άρα $Α\widehat{Η}Δ=\widehat{Γ}$.

β. Στο τρίγωνο ΑΒΗ το ύψος στην ΑΒ είναι το ΗΕ και το ύψος στην ΒΗ είναι το ΑΔ, οι φορείς των οποίων τέμνονται στο Γ. Άρα το ορθόκεντρο του $\overset{\triangle}{ΑΒΗ}$ είναι το Γ.

248 Θέμα 1759



α. Είναι $ΑΒ\,//=\,ΓΔ$, οπότε $\frac{ΑΕ}{2}\,//=\,\frac{ΔΓ}{2}$, άρα $ΑΕ\,//=\,ΔΖ$, επομένως το ΑΕΖΔ.
Είναι παραλληλόγραμμο.
Αφού επιπλέον $ΑΔ=\frac{ΑΒ}{2}=ΑΕ$, το ΑΕΖΔ είναι ρόμβος.

β. Επειδή το ΑΕΖΔ είναι ρόμβος, έχουμε $ΕΖ=ΑΔ=\frac{ΑΒ}{2}=\frac{ΓΔ}{2}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΗΓ $(\hat{Η}=90^o)$, η ΗΖ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $ΗΖ=\frac{ΓΔ}{2}$.

Άρα $ΕΖ=ΗΖ$, οπότε το $\overset{\triangle}{ΕΖΗ}$ είναι ισοσκελές.

γ. Επειδή $ΕΖ=ΗΖ$, έχουμε $Ζ\hat{Η}Ε=Ζ\hat{Ε}Η$. Αφού $ΕΖ\,//\,ΒΓ$, είναι $Ζ\hat{Ε}Η=Ε\hat{Η}Β$ ως εντός εναλλάξ.
Άρα $Ζ\hat{Η}Ε=Ε\hat{Η}Β$, οπότε η ΗΕ είναι η διχοτόμος της $Ζ\hat{Η}Γ$.

249 Θέμα 1787

α. Είναι $ΔΜ=\frac{ΔΓ}{2}=\frac{ΑΒ}{2}=ΒΓ=ΑΔ$, οπότε $Δ\hat{Α}Μ=Δ\hat{Μ}Α$.

Επειδή $ΑΒ\,//\,ΓΔ$, είναι $Δ\hat{Μ}Α=Μ\hat{Α}Β$, ως εντός εναλλάξ.
Άρα $Δ\hat{Α}Μ=Μ\hat{Α}Β$, οπότε η ΑΜ είναι η διχοτόμος της $Δ\hat{Α}Β$.

β. Τα $\overset{\triangle}{ΜΔΕ}$ και $\overset{\triangle}{ΜΓΗ}$ έχουν:

- $ΜΔ=ΜΓ$
- $Δ\hat{Μ}Ε=Η\hat{Μ}Γ$
- $Ε\hat{Δ}Μ=Μ\hat{Γ}Η$, ως εντός εναλλάξ.

Άρα είναι ίσα (ΓΠΓ), οπότε $ΜΕ=ΜΗ$.
Επομένως το Μ είναι το κοινό μέσο των ΓΔ και ΕΗ.

γ. Το $\overset{\triangle}{ΕΑΗ}$ είναι ορθογώνιο $(\hat{Α}=90^o)$ και η ΑΜ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $ΑΜ=\frac{ΗΕ}{2}=ΜΕ$.

Άρα $\hat{Ε}=Ε\hat{Α}Μ$. και αφού $Ε\hat{Α}Μ=Δ\hat{Μ}Α$ έχουμε $\hat{Ε}=Δ\widehat{Μ}Α$.

250 Θέμα 1881

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΔΒ$ η $ΔΜ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $ΔΜ = \frac{ΑΒ}{2} = ΜΒ$.

Επομένως το $\overset{\Delta}{ΔΜΒ}$ είναι ισοσκελές, άρα $\hat{Β} = Μ\hat{Δ}Β$.

Είναι $Μ\hat{Δ}Β = Γ\hat{Δ}Ε$ ως κατακορυφήν και $Γ\hat{Δ}Ε = \hat{Ε}$, αφού $ΓΔ = ΓΕ$.

Άρα $\hat{Β} = \hat{Ε}$.

β. • Η γωνία $Α\hat{Γ}Β$ είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου $ΓΕΔ$, οπότε $Α\hat{Γ}Β = \hat{Ε} + Γ\hat{Δ}Ε = 2\hat{Ε} \overset{α.}{=} 2\hat{Β}$

• Η γωνία $Α\hat{Μ}Δ$ είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου $ΜΔΒ$, οπότε $Α\hat{Μ}Δ = \hat{Β} + Μ\hat{Δ}Β = 2\hat{Β}$.

Άρα $\hat{Γ} = 2\hat{Β} = Α\widehat{Μ}Δ$

γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΓΔ$ είναι $ΓΔ < ΑΓ$ είναι $ΓΔ = ΓΕ$, οπότε $ΓΕ < ΑΓ$.

251 Θέμα 1862

α. Το $Ο$ είναι μέσο της $ΑΓ$, οπότε στο $\overset{\Delta}{ΑΕΓ}$ η $ΕΟ$ είναι διάμεσος και ύψος.
Επομένως το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές.

β. Είναι $ΒΓ // = ΑΔ$, οπότε $ΒΓ // = ΔΕ$.

Επομένως το $ΒΓΕΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.

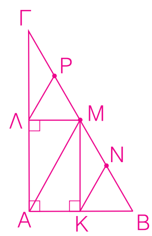
γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΟΑΕ$ $(\hat{Ο} = 90^\circ)$, η $ΟΔ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε

$ΟΔ = \frac{ΑΕ}{2} = ΔΑ$, (1).

Επειδή $ΟΔ = ΟΒ$ και $ΔΑ = ΒΓ$, από την (1) έχουμε $ΟΒ = ΒΓ$.

Οπότε το $\overset{\Delta}{ΒΟΓ}$ είναι ισοσκελές.

252 Θέμα 1813



α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΚΒΜ$, η $ΚΝ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε

$ΚΝ = \frac{ΜΒ}{2} = ΝΜ$.

Άρα $Ν\hat{Κ}Μ = Ν\hat{Μ}Κ$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(\hat{Α} = 90^\circ)$ η $ΑΜ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα,

οπότε $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2} = ΜΒ$.

Άρα το $ΜΑΒ$ είναι ισοσκελές και επειδή το $ΜΚ$ είναι ύψος θα είναι και η διχοτόμος της $Ν\hat{Μ}Α$.

γ. Έχουμε $ΚΝ = \frac{ΜΒ}{2}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΛΜΓ$, η $ΛΡ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $ΛΡ = \frac{ΜΓ}{2}$.

Οπότε $ΚΝ + ΛΡ = \frac{ΜΒ + ΜΓ}{2} = \frac{ΒΓ}{2} = ΑΜ$.

253 Θέμα 1880

α. • Στο τρίγωνο $B\Delta K$ είναι $\Delta K = KB$, οπότε $\hat{B} = B\hat{\Delta}K$ και η γωνία $\Delta\hat{K}\Lambda$ είναι εξωτερική, άρα $\Delta\hat{K}\Lambda = \hat{B} + B\hat{\Delta}K = 2\hat{B}$.

• Στο τρίγωνο $E\Lambda\Gamma$ είναι $E\Lambda = \Lambda\Gamma$, οπότε $\Lambda\hat{E}\Gamma = \hat{\Gamma}$ και η γωνία $E\hat{\Lambda}K$ είναι εξωτερική, άρα $E\hat{\Lambda}K = \hat{\Gamma} + \Lambda\hat{E}\Gamma = 2\hat{\Gamma}$.

β. Στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ τα Δ, E είναι τα μέσα των AB, $A\Gamma$, οπότε $\Delta E // B\Gamma$, άρα $\Delta E // K\Lambda$ (1) και $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$.

Είναι $\Delta\hat{K}\Lambda + E\hat{\Lambda}K = 2\hat{B} + 2\hat{\Gamma} = 2(\hat{B} + \hat{\Gamma}) = 2 \cdot 90^{o} = 180^{o}$.

Επειδή οι $\Delta\hat{K}\Lambda$, $E\hat{\Lambda}K$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των $K\Delta$, $E\Lambda$ που τέμνονται από την $K\Lambda$ και είναι παραπληρωματικές, έχουμε $\Delta K // E\Lambda$ (2).

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι το $\Delta E\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.

Είναι:
- $KB = K\Delta = E\Lambda = \Lambda\Gamma$.
- $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{BK + K\Lambda + \Lambda\Gamma}{2} = \frac{\Delta K + \Delta E + \Delta K}{2}$

Οπότε $2\Delta E = 2\Delta K + \Delta E \Leftrightarrow \Delta E = 2\Delta K$.

254 Θέμα 1859

α. i. Επειδή $M \in \mu_1$, έχουμε $MA = MB = \frac{B\Gamma}{2}$.

Οπότε στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η διάμεσος AM είναι το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^{o}$.

ii. Στο $A\Lambda MK$ είναι $\hat{K} = \hat{A} = \hat{\Lambda} = 90^{o}$, οπότε είναι ορθογώνιο.

iii. Επειδή το $A\Lambda MK$ είναι ορθογώνιο, οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και είναι $K\Lambda = AM$.

Οπότε $\Lambda\Theta = \frac{K\Lambda}{2} = \frac{AM}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$.

β. Στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ τα K, Λ είναι τα μέσα των AB, $A\Gamma$, οπότε $K\Lambda // B\Gamma$, άρα $K\Theta // BI$.

Στο ορθογώνιο $A\Lambda MK$ είναι $K\Theta = \Lambda\Theta = \frac{B\Gamma}{4} = BI$.

Οπότε $K\Theta // = BI$, άρα το $K\Theta IB$ είναι παραλληλόγραμμο.

255 Θέμα 1710

α. i. Επειδή $O\Gamma = \Gamma\Delta = O\Delta$, το $\overset{\Delta}{O\Gamma\Delta}$ είναι ισόπλευρο, άρα $\Gamma\hat{O}\Delta = 60^{o}$.

ii. Επειδή το τρίγωνο $O\Gamma\Delta$ είναι ισόπλευρο είναι $O\hat{\Gamma}\Delta = O\hat{\Delta}\Gamma = 60^{o}$

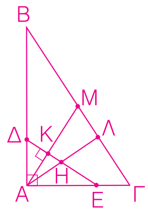
• Στο τρίγωνο ΓOA είναι $O\Gamma = A\Gamma$, οπότε $\Gamma\hat{O}A = \hat{A}$ και η γωνία $O\hat{\Gamma}\Delta$ είναι εξωτερική, άρα $O\hat{\Gamma}\Delta = \hat{A} + \Gamma\hat{O}A \Leftrightarrow 60^{o} = 2\hat{A} \Leftrightarrow \hat{A} = 30^{o}$

• Στο τρίγωνο $BO\Delta$ είναι $O\Delta = \Delta B$, οπότε $\Delta\hat{O}B = \hat{B}$ και η γωνία $O\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εξωτερική, άρα $O\hat{\Delta}\Gamma = \hat{B} + \Delta\hat{O}B \Leftrightarrow 60^{o} = 2\hat{B} \Leftrightarrow \hat{B} = 30^{o}$.

Άρα $O\hat{A}\Gamma = O\hat{B}\Delta = 30^{o}$.

β. Επειδή $\hat{A} = \hat{B}$ το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές με $OA = OB$. Στο ισοσκελές τρίγωνο OAB η διάμεσος OM είναι και ύψος, άρα $OM \perp AB$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο MOA $(\hat{M} = 90^{o})$ είναι $\hat{A} = 30^{o}$, οπότε $OM = \frac{OA}{2} \Leftrightarrow 2OM = OA$.

256 Θέμα 1806



α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ $(\hat{A}=90^o)$ η AM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα.

Οπότε $AM=\frac{B\Gamma}{2}=MB$, άρα $\hat{B}=B\hat{A}M$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta E$ $(\hat{A}=90^o)$, η AH είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα.

Οπότε $AH=\frac{\Delta E}{2}=H\Delta$, άρα $A\hat{\Delta}H=\Delta\hat{A}H$.

γ. Έστω ότι η AH τέμνει την $B\Gamma$ στο Λ .

Στο τρίγωνο $AB\Lambda$ είναι $B\hat{A}\Lambda+\hat{B}=\Delta\hat{A}H+B\hat{A}M=A\hat{\Delta}K+\Delta\hat{A}K=90^o$, αφού το τρίγωνο $KA\Delta$ είναι ορθογώνιο.

Άρα $B\hat{\Lambda}A=90^o$, οπότε $AH\perp B\Gamma$.

257 Θέμα 1713

α. i. Είναι $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow 2\hat{B}+\hat{B}=180^o \Leftrightarrow 3\hat{B}=180^o \Leftrightarrow \hat{B}=60^o$.

Οπότε $A\hat{B}Z=\frac{\hat{B}}{2}=30^o$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ είναι $\hat{B}+B\hat{A}\Delta=90^o \Leftrightarrow 60^o+B\hat{A}Z=90^o \Leftrightarrow B\hat{A}Z=30^o$.

Επειδή $A\hat{B}Z=B\hat{A}Z$, το $\overset{\Delta}{ZAB}$ είναι ισοσκελές με $AZ=BZ$.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔBZ $(\hat{\Delta}=90^o)$ είναι $Z\hat{B}\Delta=30^o$,

οπότε $Z\Delta=\frac{BZ}{2} \Leftrightarrow A\Delta-AZ=\frac{BZ}{2} \Leftrightarrow A\Delta-BZ=\frac{BZ}{2} \Leftrightarrow 2A\Delta-2BZ=BZ \Leftrightarrow 2A\Delta=3BZ \Leftrightarrow A\Delta=\frac{3}{2}BZ$

β. Επειδή το $\overset{\Delta}{AZE}$ είναι ισόπλευρο, έχουμε $Z\hat{A}E=60^o$, οπότε:

- $\hat{A}=30^o+60^o=90^o$
- $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow 90^o+60^o+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=30^o$

258 Θέμα 1763

α. i. Στα ορθογώνια τρίγωνα EAB και $EA\Delta$ $(\hat{E}=90^o)$, οι EK και $E\Lambda$ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα.

Οπότε $EK=\frac{AB}{2}=AK$ και $E\Lambda=\frac{A\Delta}{2}=A\Lambda$.

Άρα τα τρίγωνα KEA και ΛEA είναι ισοσκελή, οπότε $A\hat{E}K=E\hat{A}K$ και $\Lambda\hat{E}A=E\hat{A}\Lambda$.

Είναι $K\hat{E}\Lambda=K\hat{E}A+\Lambda\hat{E}A=E\hat{A}K+E\hat{A}\Lambda=K\hat{A}\Lambda=90^o$.

ii. Στο $\overset{\Delta}{AB\Delta}$ τα K, Λ είναι τα μέσα των AB, $A\Delta$, οπότε $K\Lambda=\frac{B\Delta}{2}$. Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο έχουμε $B\Delta=A\Gamma$, οπότε $K\Lambda=\frac{A\Gamma}{2}$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $BA\Gamma$ $(\hat{B}=90^o)$ έχουμε $B\hat{A}\Gamma=30^o$, οπότε $B\Gamma=\frac{A\Gamma}{2}\overset{\alpha.ii.}{=}K\Lambda$.

259 Θέμα 1866

α. Είναι:
- $\Delta A=\Delta B$, αφού το τρίγωνο ΔAB είναι ισοσκελές
- $\Gamma A=\Gamma B$, αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο

Άρα η $\Delta\Gamma$ είναι η μεσοκάθετος του AB .

β. Επειδή η ΓΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ, θα είναι και διχοτόμος των γωνιών $\hat{\Delta}$ και $\hat{\Gamma}$, δηλαδή $A\hat{\Delta}\Theta = \Theta\hat{\Delta}B = 60^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΘΔ η ΘΖ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $\Theta Z = \frac{A\Delta}{2} = ZA$.

Οπότε $Z\hat{\Theta}\Delta = A\hat{\Delta}\Theta = 60^\circ$.

Στο ΑΘΓ, είναι: $A\hat{\Gamma}\Theta + \Theta\hat{A}\Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow A\hat{\Gamma}\Theta + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow A\hat{\Gamma}\Theta = 30^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΘΓ η ΘΗ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $\Theta H = \frac{A\Gamma}{2} = H\Gamma$.

Οπότε $H\hat{\Theta}\Gamma = A\hat{\Gamma}\Theta = 30^\circ$.

Είναι $Z\hat{\Theta}\Delta + Z\hat{\Theta}H + H\hat{\Theta}\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + Z\hat{\Theta}H + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow Z\hat{\Theta}H = 90^\circ$.

2ος τρόπος

- Στο ισοσκελές τρίγωνο ΔΑΒ έχουμε $\hat{\Delta} = 120^\circ$, οπότε $\Delta\hat{B}A = 30^\circ$, άρα $\Delta\hat{B}\Gamma = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$.
- Στο $\overset{\triangle}{A\Delta B}$, τα Ζ, Θ είναι τα μέσα των ΑΔ, ΑΒ, οπότε ΖΘ // ΒΔ
- Στο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, τα Θ, Η είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ, οπότε ΘΗ // ΒΓ

Επειδή $\Delta B \perp B\Gamma$ είναι και $Z\Theta \perp \Theta H$, οπότε $Z\hat{\Theta}H = 90^\circ$.

γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΘΔ είναι $\Theta\hat{\Delta}A + \Delta\hat{A}\Theta = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \Delta\hat{A}\Theta = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta\hat{A}\Theta = 30^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΑΖ ($\hat{K} = 90^\circ$), είναι $\hat{A} = 30^\circ$, οπότε $ZK = \frac{AZ}{2} = \frac{A\Delta}{4}$.

260 Θέμα 1871

α. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\hat{A} = 120^\circ$, έχουμε:

- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$
- $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + \hat{B} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B} = 60^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 30^\circ$
- $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 30^\circ$
- $B\hat{A}\Delta = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$

Άρα $\hat{B} = B\hat{A}\Delta$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ ($\Delta\hat{A}\Gamma = 90^\circ$), έχουμε $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, οπότε $A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2} \overset{\alpha.}{\Leftrightarrow} B\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow \Gamma\Delta = 2B\Delta$.

γ. Είναι $\Delta\Gamma = 2\Delta B \Leftrightarrow 2\Delta K = 2\Delta B \Leftrightarrow \Delta K = \Delta B$.

Στο $\overset{\triangle}{ABK}$ τα Λ, Δ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΚ, οπότε ΛΔ // ΑΚ.

δ. Από το **γ.** ερώτημα είναι και $\Lambda\Delta = \frac{AK}{2} \Leftrightarrow AK = 2\Lambda\Delta$.

261 Θέμα 1872

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) έχουμε $\hat{B} = 60^\circ$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$.

Είναι $\Gamma\hat{B}Z = \frac{\hat{B}}{2} = 30^\circ$, οπότε $\Gamma\hat{B}Z = \hat{\Gamma}$, άρα το τρίγωνο ΒΖΓ είναι ισοσκελές.

β. • Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΖ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι $Z\hat{B}A = \frac{\hat{B}}{2} = 30^\circ$ και ΑΜ η διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $AZ = \frac{BZ}{2}$ και $AM = \frac{BZ}{2}$.

Άρα ΑΜ = ΑΖ.

• Στο $\overset{\triangle}{B\Gamma Z}$ τα Κ, Μ είναι τα μέσα των ΒΓ, ΒΖ, οπότε ΚΜ // ΓΖ και $KM = \frac{\Gamma Z}{2} \overset{\alpha.}{=} \frac{BZ}{2} = AZ$.

Άρα ΚΜ //= ΑΖ, οπότε το ΑΜΚΖ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή ΑΜ = ΑΖ, είναι ρόμβος.

γ. Στο **β.** ερώτημα έχουμε $KM = \frac{\Gamma Z}{2} \Leftrightarrow ZA = \frac{\Gamma Z}{2} \Leftrightarrow \Gamma Z = 2ZA$.

δ. Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Lambda B\Gamma$ $(\hat{\Lambda} = 90^o)$ έχουν:

- $B\Gamma$ κοινή
- $B\hat{\Gamma}A = \Gamma\hat{B}\Lambda$ $(=30^o)$

Οπότε είναι ίσα, άρα $B\Lambda = A\Gamma$.

262 Θέμα 1721

α. Οι ακτίνες στα σημεία επαφής είναι κάθετες στην εφαπτόμενη, άρα $KB \perp \varepsilon$ και $\Lambda\Gamma \perp \varepsilon$.
Είναι $\Delta\Gamma \perp B\Gamma$ και $K\Delta // B\Gamma$, οπότε $K\Delta \perp \Gamma\Delta$.

Άρα στο $B\Gamma\Delta K$ είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^o$, οπότε είναι ορθογώνιο.

β. Επειδή το $B\Gamma\Delta K$ είναι ορθογώνιο, έχουμε $\Gamma\Delta = BK = \rho$.

Είναι:
- $\Lambda\Delta = \Lambda\Gamma - \Gamma\Delta = 3\rho - \rho = 2\rho$.
- $K\Lambda = KA + A\Lambda = \rho + 3\rho = 4\rho$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ $(\hat{\Delta} = 90^o)$ είναι $\Lambda\Delta = 2\rho = \frac{4\rho}{2} = \frac{K\Lambda}{2}$, οπότε $\Delta\hat{K}\Lambda = 30^o$.

γ. Επειδή $K\Delta // B\Gamma$, έχουμε $\hat{E} = \Delta\hat{K}\Lambda = 30^o$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Gamma E\Lambda$ $(\hat{\Gamma} = 90^o)$ είναι $\hat{E} = 30^o$, οπότε $\Gamma\Lambda = \frac{E\Lambda}{2} \Leftrightarrow 3\rho = \frac{E\Lambda}{2} \Leftrightarrow E\Lambda = 6\rho$.

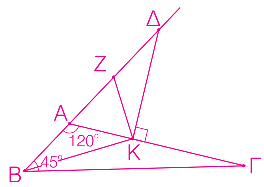
263 Θέμα 1761

α. Είναι $\Delta\hat{A}K = 180^o - 120^o = 60^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{KA\Delta}$ είναι $A\hat{\Delta}K + \Delta\hat{A}K = 90^o \Leftrightarrow A\hat{\Delta}K + 60^o = 90^o \Leftrightarrow A\hat{\Delta}K = 30^o$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $KA\Delta$ $(\hat{K} = 90^o)$, είναι $\hat{\Delta} = 30^o$, οπότε $AK = \frac{A\Delta}{2} = \frac{2AB}{2} = AB$.

Άρα το $\overset{\Delta}{KAB}$ είναι ισοσκελές.



γ. Το Z είναι το μέσο της $A\Delta$, οπότε $AZ = \frac{A\Delta}{2} = AB$.

Οπότε στο $\overset{\Delta}{ZKB}$ η KA είναι διάμεσος και $KA = AB = \frac{BZ}{2}$, άρα $Z\hat{K}B = 90^o$.

δ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $KA\Delta$, η KZ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $KZ = \frac{A\Delta}{2} = AK$

Τα ορθογώνια τρίγωνα $KA\Delta$ και KZB έχουν:
- $A\Delta = BZ$
- $AK = KZ$

Άρα είναι ίσα, οπότε $KB = K\Delta$. Επομένως το K ανήκει στη μεσοκάθετο του $B\Delta$.

264 Θέμα 1835

α. i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ $(\hat{A} = 90^o)$ έχουμε $\hat{\Gamma} = 30^o$, οπότε $AB = \frac{B\Gamma}{2} = BM$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ABE , MBE έχουν:
- $AB = MB$
- BE κοινή

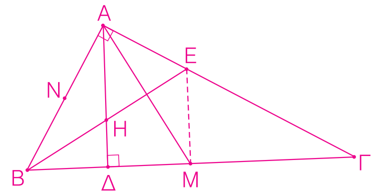
Οπότε είναι ίσα, επομένως $A\hat{B}E = E\hat{B}M$. Άρα η BE είναι η διχοτόμος της $\hat{B}$.

ii. Επειδή η BE είναι η διχοτόμος της $\hat{B}$, έχουμε $AE = EM$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $EM\Gamma$ $(\hat{M} = 90^o)$ είναι $\hat{\Gamma} = 30^o$, οπότε $EM = \frac{\Gamma E}{2} \Leftrightarrow AE = \frac{\Gamma E}{2}$.

iii. Επειδή $BA = BM$ και $EA = EM$, η BE είναι η μεσοκάθετος του AM .

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(\hat{Α}=90^o)$ η $ΑΜ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $ΑΜ=\frac{ΒΓ}{2}=ΜΒ$.

Επομένως το $\overset{\Delta}{ΜΑΒ}$ είναι ισοσκελές με κορυφή $Μ$, άρα η διάμεσος $ΜΝ$ είναι και ύψος.
Αφού επιπλέον το $Η$ είναι το ορθόκεντρο του $\overset{\Delta}{ΑΒΜ}$ το ύψος $ΜΝ$ διέρχεται από το $Η$, άρα τα $Μ, Η$ και $Ν$ είναι συνευθειακά.



265 Θέμα 1782

α. i. Επειδή τα $Δ$, $Ε$, $Ζ$ είναι τα μέσα των πλευρών του $ΑΒΓ$ έχουμε $ΕΖ//ΑΒ$, $ΔΖ//ΑΓ$, οπότε το $ΑΔΖΕ$ είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον είναι $\hat{Α}=90^o$, οπότε το $ΑΔΖΕ$ είναι ορθογώνιο.

ii. Επειδή το $ΑΔΖΕ$ είναι ορθογώνιο, έχουμε $ΑΖ=ΔΕ$, οπότε $ΑΘ=ΘΕ$. Στο $\overset{\Delta}{ΑΖΓ}$, τα $Θ$, $Ε$ είναι τα μέσα πλευρών του, οπότε $ΘΕ=\frac{ΖΓ}{2}=\frac{\frac{ΒΓ}{2}}{2}=\frac{ΒΓ}{4}$.

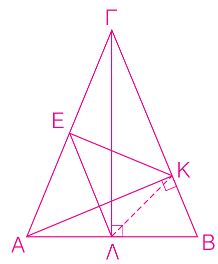
β. i. Στο ορθογώνιο $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$, η $ΑΖ$ είναι διάμεσος, οπότε $ΑΖ=\frac{ΒΓ}{2}=ΖΓ$, άρα $\hat{Γ}=Γ\hat{Α}Ζ$. Η $Α\hat{Ζ}Β$ είναι εξωτερική του $\overset{\Delta}{ΑΖΓ}$, οπότε $Α\hat{Ζ}Β=\hat{Γ}+Γ\hat{Α}Ζ=2\hat{Γ}=60^o$.

ii. Επειδή $Α\hat{Ζ}Β=60^o$ και $ΑΖ=ΖΒ$ το $\overset{\Delta}{ΑΒΖ}$ είναι ισόπλευρο, οπότε το ύψος του $ΑΚ$ είναι και διάμεσος.

Άρα $ΒΚ=\frac{ΒΖ}{2}=\frac{\frac{ΒΓ}{2}}{2}=\frac{ΒΓ}{4}$.

266 Θέμα 1895

α. Στα ορθογώνια τρίγωνα $ΚΑΓ$ $(\hat{Κ}=90^o)$ και $ΛΓΑ$ $(\hat{Λ}=90^o)$, οι $ΚΕ$, $ΛΕ$ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε $ΚΕ=\frac{ΑΓ}{2}$ (2) και $ΛΕ=\frac{ΑΓ}{2}$.
Άρα $ΚΕ=ΛΕ$, οπότε το τρίγωνο $ΚΕΛ$ είναι ισοσκελές.



β. Είναι:
- $Λ\hat{Κ}Ε=Κ\hat{Λ}Ε$, αφού $ΚΕ=ΛΕ$
- $Λ$, $Ε$ μέσα $ΑΒ$, $ΑΓ$ οπότε $ΕΛ//ΒΓ$, άρα $Κ\hat{Λ}Ε=Λ\hat{Κ}Β$, ως εντός εναλλάξ.

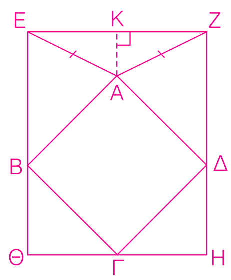
Επομένως $Λ\hat{Κ}Ε=Λ\hat{Κ}Β$. Άρα η $ΚΛ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Β\hat{Κ}Ε$.

267 Θέμα 1850

α. i. Επειδή το σημείο $Α$ βρίσκεται στη μεσοκάθετο του $ΕΖ$, έχουμε $ΑΕ=ΑΖ$, οπότε $Α\hat{Ε}Ζ=Α\hat{Ζ}Ε$.
Επομένως $Α\hat{Ε}Β=Α\hat{Ζ}Δ$, ως διαφορές ίσων γωνιών.
Τα τρίγωνα $ΑΕΒ$ και $ΑΖΔ$ έχουν $Α\hat{Ε}Β=Α\hat{Ζ}Δ$ και $Ε\hat{Β}Α=Ζ\hat{Δ}Α=45^o$, οπότε έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες, δηλαδή $Ε\hat{Α}Β=Ζ\hat{Α}Δ$.
Τα τρίγωνα $ΑΕΒ$ και $ΑΖΔ$ έχουν:
- $ΑΕ=ΑΖ$
- $Α\hat{Ε}Β=Α\hat{Ζ}Δ$
- $Ε\hat{Α}Β=Ζ\hat{Α}Δ$

Άρα είναι ίσα (ΓΠΓ).

ii. Επειδή τα τρίγωνα ΕΑΒ και ΖΑΔ είναι ίσα, έχουμε $ΑΒ=ΑΔ$.
Οι γωνίες πρόσκρουσης και ανάκλασης είναι 45^o, οπότε
$Α\hat{Β}Ε=Θ\hat{Β}Γ=Β\hat{Γ}Θ=Δ\hat{Γ}Η=Η\hat{Δ}Γ=Α\hat{Δ}Ζ=45^o$
Άρα $Α\hat{Β}Γ=Β\hat{Γ}Δ=Γ\hat{Δ}Α=90^o$. Επομένως το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.
Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες, επομένως είναι τετράγωνο.



β. Έστω ΑΚ η απόσταση του Α από την πλευρά ΕΖ. Είναι $ΑΖ = 2ΑΚ \Leftrightarrow ΑΚ = \frac{ΑΖ}{2}$.

Άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΖ μια κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας, επομένως $Α\hat{Ζ}Κ = 30^o$.

Επειδή $ΑΕ = ΑΖ$ έχουμε $Α\hat{Ζ}Κ = Α\hat{Ε}Ζ = 30^o$.

Στο τρίγωνο ΑΕΖ , είναι $Ε\hat{Α}Ζ + Α\hat{Ε}Ζ + Α\hat{Ζ}Κ = 180^o \Leftrightarrow Ε\hat{Α}Ζ + 30^o + 30^o = 180^o \Leftrightarrow Ε\hat{Α}Ζ = 120^o$

268 Θέμα 1742

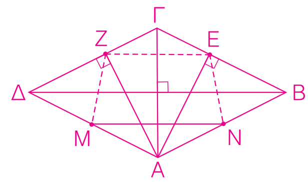
α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΕΒ έχουν:

- $ΑΒ = ΑΔ$, ως πλευρές ρόμβου
- $\hat{Β} = \hat{Δ}$, ως απέναντι γωνίες ρόμβου

Άρα είναι ίσα, οπότε $ΑΖ = ΑΕ$, επομένως το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισοσκελές.

β. Επειδή τα $\overset{\triangle}{ΖΑΔ}$ και $\overset{\triangle}{ΕΑΒ}$ είναι ίσα, έχουμε $ΔΖ = ΒΕ$.
Οπότε και $ΓΖ = ΓΕ$, αφού $ΓΔ = ΓΒ$.
Επειδή $ΑΖ = ΑΕ$ και $ΓΖ = ΓΕ$, η ΑΓ είναι η μεσοκάθετος του ΖΕ .

γ. Στο $\overset{\triangle}{ΑΒΔ}$, τα Μ , Ν είναι τα μέσα των ΑΔ , ΑΒ, οπότε $ΜΝ // ΒΔ$.



Είναι:
- $ΖΕ \perp ΑΓ$, αφού η ΑΓ μεσοκάθετος του ΖΕ
- $ΒΔ \perp ΑΓ$, ως διαγώνιοι του ρόμβου

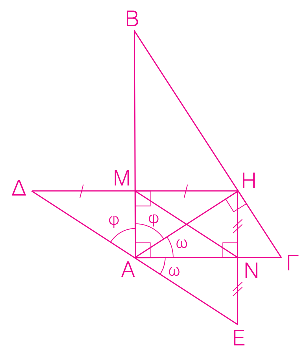
Άρα έχουμε $ΖΕ // ΒΔ$, οπότε $ΖΕ // ΜΝ$.

Στα ορθογώνια τρίγωνα ΖΑΔ ($\hat{Ζ} = 90^o$) , ΕΑΒ ($\hat{Ε} = 90^o$) , οι ΖΜ , ΕΝ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε $ΖΜ = \frac{ΑΔ}{2}$ και $ΕΝ = \frac{ΑΒ}{2}$.

Είναι $ΑΔ = ΑΒ$, οπότε $ΖΜ = ΕΝ$.

269 Θέμα 1737

α. Στο $\overset{\triangle}{ΑΔΗ}$ το ΑΜ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε είναι ισοσκελές με βάση τη ΔΗ , άρα $ΑΗ = ΑΔ$.
Όμοια το $\overset{\triangle}{ΑΕΗ}$ είναι ισοσκελές, οπότε $ΑΗ = ΑΕ$. Άρα $ΑΗ = ΑΔ = ΑΕ$.



β. Το ΑΜΗΝ είναι ορθογώνιο, αφού έχει τρεις ορθές γωνίες, οπότε $Μ\hat{Η}Ν = 90^o$, άρα το τρίγωνο ΕΗΔ είναι ορθογώνιο.

γ. Στα ισοσκελή τρίγωνα ΑΔΗ και ΑΗΕ οι ΑΜ , ΑΝ είναι ύψη άρα και διχοτόμοι τους.

Οπότε $Δ\hat{Α}Μ = Μ\hat{Α}Η = φ$ και $Ε\hat{Α}Ν = Η\hat{Α}Ν = ω$.

Είναι $Δ\hat{Α}Ε = 2φ + 2ω = 2(φ + ω) = 2Β\hat{Α}Γ = 2 \cdot 90^o = 180^o$.

Άρα τα Ε , Α , Δ είναι συνευθειακά.

Στο τρίγωνο ΔΗΕ τα Μ , Ν είναι μέσα των ΗΔ και ΗΕ οπότε $ΜΝ = \frac{ΔΕ}{2}$.

24. Τραπέζιο

Θέμα 2

270 Θέμα 1549

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΗΒΓ$ είναι $\hat{B}+Η\hat{Γ}Β=90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ+Η\hat{Γ}Β=90^\circ \Leftrightarrow Η\hat{Γ}Β=30^\circ$.

Οπότε $ΗΒ=\frac{ΒΓ}{2}=\frac{4ΓΔ}{2}=2ΓΔ$.

β. Το $ΔΓΗΑ$ έχει $\hat{Δ}=\hat{Α}=\hat{Η}=90^\circ$, οπότε είναι ορθογώνιο, άρα $ΓΔ=ΑΗ$.

Είναι $ΗΒ=2ΓΔ \Leftrightarrow ΓΔ=\frac{1}{2}ΗΒ \Leftrightarrow ΑΗ=\frac{1}{2}ΗΒ$.

271 Θέμα 1612

α. Είναι $Π_{ΑΒΓ}=ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ=2\cdot 9+30+2\cdot 10=68$.

β. Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ τα $Δ$, $Ε$ είναι τα μέσα των $ΑΒ$, $ΑΓ$, οπότε $ΔΕ // ΒΓ$, άρα το $ΔΕΓΒ$ είναι τραπέζιο.

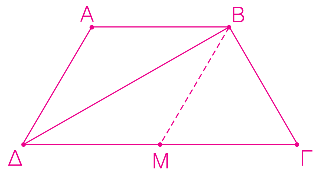
γ. Από το **β.** ερώτημα είναι $ΔΕ=\frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow x=\frac{30}{2} \Leftrightarrow x=15$.

272 Θέμα 1697

α. Επειδή $ΑΒ=ΑΔ$, είναι $Α\hat{Β}Δ=Α\hat{Δ}Β$. Αφού $ΑΒ // ΓΔ$, είναι $Α\hat{Β}Δ=Β\hat{Δ}Γ$, ως εντός εναλλάξ.

Άρα $Α\hat{Δ}Β=Β\hat{Δ}Γ$, οπότε η $ΔΒ$ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{Δ}$.

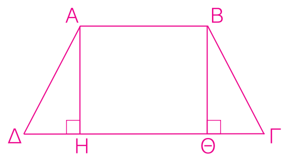
β. Επειδή $ΑΒ // = ΔΜ$, το $ΑΒΜΔ$ είναι παραλληλόγραμμο. Αφού επιπλέον είναι $ΑΒ=ΑΔ$, έχουμε ότι το $ΑΒΜΔ$ είναι ρόμβος.



Είναι:
- $ΒΜ // ΑΔ$, όποτε $Β\hat{Μ}Γ=\hat{Δ}=60^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη
- $ΒΜ=ΜΔ \Leftrightarrow ΒΜ=ΜΓ$

Οπότε το τρίγωνο $ΒΜΓ$ είναι ισοσκελές με μια γωνία 60° , άρα είναι ισόπλευρο.

273 Θέμα 1694



α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΗΑΔ$ και $ΘΒΓ$ έχουν:
- $ΑΔ=ΒΓ$
- $\hat{Δ}=\hat{Γ}$, ως γωνίες προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τραπεζίου

Οπότε είναι ίσα, άρα $ΔΗ=ΘΓ$.

β. Η διάμεσος του τραπεζίου $ΕΖ$ είναι:

$$ΕΖ=\frac{ΑΒ+ΓΔ}{2}=\frac{8+12}{2}=10$$

274 Θέμα 1629

α. Είναι:
- $\hat{Α}=\hat{Β}=135^\circ$
- $\hat{Β}+\hat{Γ}=180^\circ \Leftrightarrow 135^\circ+\hat{Γ}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{Γ}=45^\circ$
- $\hat{Δ}=\hat{Γ}=45^\circ$

β. Είναι $ΑΕ=ΒΖ$, ως αποστάσεις των παράλληλων $ΑΒ$ και $ΓΔ$.

Στα ορθογώνια τρίγωνα $ΕΑΔ$ και $ΖΒΓ$ είναι:
- $\hat{Δ}+Δ\hat{Α}Ε=90^\circ \Leftrightarrow 45^\circ+Δ\hat{Α}Ε=90^\circ \Leftrightarrow Δ\hat{Α}Ε=45^\circ$, άρα $\hat{Δ}=Δ\hat{Α}Ε$
- $\hat{Γ}+Γ\hat{Β}Ζ=90^\circ \Leftrightarrow 45^\circ+Γ\hat{Β}Ζ=90^\circ \Leftrightarrow Γ\hat{Β}Ζ=45^\circ$, άρα $\hat{Γ}=Γ\hat{Β}Ζ$

Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΕΑΔ$ και $ΖΒΓ$ είναι ισοσκελή, οπότε $ΔΕ=ΑΕ$ και $ΖΓ=ΒΖ$.

Άρα $ΑΕ=ΕΔ=ΒΖ=ΓΖ$.

275 Θέμα 1644

α. Είναι:
- $EB = AB - AE = 3 - 1 = 2$
- $K\Lambda = \dfrac{\Gamma\Delta + EB}{2} = \dfrac{4+2}{2} = 3$.

β. Είναι $K\Lambda // EB$, οπότε $K\Lambda // AB$ και $K\Lambda = AB = 3$, οπότε το $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.

276 Θέμα 1669

α. Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο έχουμε ότι $A\Delta = B\Gamma$, $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$.

Τα τρίγωνα $MK\Delta$ και $M\Lambda\Gamma$ έχουν:
- $M\Delta = M\Gamma$
- $\Delta K = \Gamma\Lambda$, ως μισά ίσων τμημάτων
- $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $KM = \Lambda M$.

β. Τα τρίγωνα $A\Delta M$ και $MB\Gamma$ έχουν:
- $M\Delta = M\Gamma$
- $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$
- $A\Delta = B\Gamma$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ) , οπότε $AM = BM$.

277 Θέμα 1634

α. Είναι:
- $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$
- $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 120^\circ$
- $\hat{A} = \hat{B} = 120^\circ$

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $AE\Delta$ και $BZ\Gamma$ έχουν:
- $A\Delta = B\Gamma$
- $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$

Οπότε είναι ίσα.

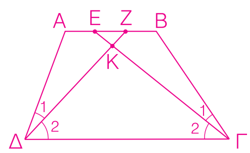
γ. Το $ABZE$ είναι ορθογώνιο, οπότε $EZ = AB = 6$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ZB\Gamma$ είναι $\Gamma\hat{B}Z = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Οπότε $Z\Gamma = \dfrac{B\Gamma}{2} = 2$.

Επειδή τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $BZ\Gamma$ είναι ίσα, έχουμε $\Delta E = Z\Gamma = 2$.
Οπότε $\Gamma\Delta = \Delta E + EZ + Z\Gamma = 2 + 6 + 2 = 10$.
Η περίμετρος του $AB\Gamma\Delta$ είναι $\Pi_{AB\Gamma\Delta} = AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A = 6 + 4 + 2 + 6 + 2 + 4 = 24$.

278 Θέμα 1579



α. Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο, έχουμε $A\Delta = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{B}$.

Τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και $B\Gamma E$ έχουν:
- $A\Delta = B\Gamma$
- $AZ = BE$
- $\hat{A} = \hat{B}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), επομένως $\Delta Z = \Gamma E$.

β. Επειδή τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και $B\Gamma E$ είναι ίσα, έχουμε $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_1$.

Στο ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$, οπότε $\hat{\Delta}_2 = \hat{\Gamma}_2$.
Άρα το τρίγωνο $K\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές , οπότε $K\Delta = K\Gamma$.
Επειδή $\Delta Z = \Gamma E$ και $K\Delta = K\Gamma$ είναι και $KZ = KE$.
Οπότε το τρίγωνο KZE είναι ισοσκελές.

279 Θέμα 1563

α. Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο έχουμε $A\Delta = B\Gamma$ και $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$.
Τα ορθογώνια τρίγωνα $EA\Delta$ και $ZB\Gamma$ έχουν:

- $A\Delta = B\Gamma$
- $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$

Οπότε είναι ίσα, άρα $\Delta E = \Gamma Z$.

β. Είναι $AE \perp \Gamma\Delta$ και $AB // \Gamma\Delta$, οπότε $AE \perp AB$, άρα $E\hat{A}B = 90^\circ$.

Στο τετράπλευρο $ABZE$ είναι $\hat{A} = \hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ$, οπότε είναι ορθογώνιο.

Άρα $AB = EZ$.

280 Θέμα 1666

α. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, τα Δ , Z είναι τα μέσα των BA , $B\Gamma$, οπότε $\Delta Z // = \dfrac{A\Gamma}{2} \Rightarrow \Delta Z // = AE$.

Επομένως το $AEZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή έχει $\hat{A} = 90^\circ$ είναι ορθογώνιο.
β. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, τα Δ , E είναι τα μέσα των AB , $A\Gamma$, οπότε $\Delta E // B\Gamma$.
Άρα το $E\Delta B\Gamma$ είναι τραπέζιο και επειδή $B\Delta = E\Gamma$, ως μισά ίσων τμημάτων, είναι ισοσκελές τραπέζιο.

281 Θέμα 1536

α. Για να είναι τραπέζιο το $B\Delta E\Gamma$, αρκεί $\Delta E // B\Gamma$.
Επειδή το Δ είναι μέσο της AB , θα είναι το E το μέσο του $A\Gamma$.

β. Για να είναι το $B\Delta E\Gamma$ ισοσκελές τραπέζιο, αρκεί $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, δηλαδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ισοσκελές.

282 Θέμα 1529

α. Επειδή η $E\Delta$ είναι η μεσοκάθετος του AB , έχουμε $AE = BE$.
β. Επειδή $ZE // B\Gamma$, το $B\Gamma EZ$ είναι τραπέζιο.

Αφού επιπλέον το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, έχουμε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, οπότε το $B\Gamma EZ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

283 Θέμα 1550

α. Είναι $MN = \dfrac{AB + \Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow x + 4 = \dfrac{(3x+2)+(x+2)}{2} \Leftrightarrow 2x + 8 = 4x + 4 \Leftrightarrow -2x = -4 \Leftrightarrow x = 2$.

β. Έχουμε $\hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ και επειδή $AB // \Gamma\Delta$ είναι $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} + 2\hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 3\hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 60^\circ$.

Οπότε $\hat{\Gamma} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$.

Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο έχουμε $\hat{A} = \hat{B} = 60^\circ$ και $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = 120^\circ$.

284 Θέμα 1562

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $EA\Delta$ και $ZB\Gamma$ έχουν: $A\Delta = B\Gamma$ και $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$. Οπότε είναι ίσα, άρα $\Delta E = \Gamma Z$.
β. Είναι $AE \perp \Gamma\Delta$ και $AB // \Gamma\Delta$, οπότε $AE \perp AB$, άρα $E\hat{A}B = 90^\circ$.

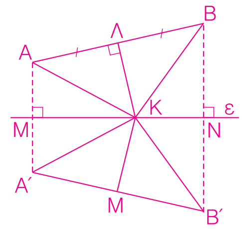
Στο τετράπλευρο $ABZE$ είναι $\hat{A} = \hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ$.
Οπότε είναι ορθογώνιο.

Θέμα 4

285 Θέμα 1735

α. Επειδή $AA' \perp \varepsilon$ και $BB' \perp \varepsilon$, είναι $AA' // BB'$.

β. Επειδή η $K\Lambda$ είναι η μεσοκάθετος του AB, έχουμε $KA = KB$. Αφού η ευθεία ε είναι η μεσοκάθετος των AA' και BB' έχουμε $KA = KA'$ και $KB = KB'$.
Οπότε $KA' = KB'$, άρα το K ανήκει στη μεσοκάθετο του $A'B'$.



γ. Για να είναι το τετράπλευρο $ABB'A'$ ορθογώνιο, πρέπει $\hat{A} = 90^\circ$.

Οπότε $AB \perp AA'$ και αφού $\varepsilon \perp AA'$, θα έχουμε $AB // \varepsilon$.

286 Θέμα 1577

Επειδή $AB // \Gamma\Delta$ είναι $A\hat{B}\Gamma = 180^\circ - \hat{\Gamma} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.

Οπότε $A\hat{B}\Delta = A\hat{B}\Gamma - \Delta\hat{B}\Gamma = 70^\circ - 30^\circ = 40^\circ$. Αφού $\Delta A = \Delta B$, το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{A} = A\hat{B}\Delta = 40^\circ$.

Στο τρίγωνο $AB\Delta$ είναι $A\hat{\Delta}B + \hat{A} + A\hat{B}\Delta = 180^\circ \Leftrightarrow A\hat{\Delta}B + 40^\circ + 40^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow A\hat{\Delta}B = 100^\circ$.

287 Θέμα 1650

α. Το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές με $B\Delta = B\Gamma$, άρα $B\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\Gamma}$.
Στο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ έχουμε $B\hat{\Delta}\Gamma + \hat{\Gamma} + \Delta\hat{B}\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} + 110^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} = 70^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 35^\circ$.

β. Είναι $B\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\Gamma} = 35^\circ$ οπότε $A\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{\Delta}B + B\hat{\Delta}\Gamma = 25^\circ + 35^\circ = 60^\circ$.
Οι γωνίες $\hat{A}$ και $A\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων AB , $\Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $A\Delta$ και είναι παραπληρωματικές, οπότε $\hat{A} + A\hat{\Delta}\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 120^\circ$

288 Θέμα 1635

α. Είναι:
- $\hat{B} = 180^\circ - \hat{\Gamma} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, αφού $AB // \Gamma\Delta$.
- $A\Delta \perp AB$ και $AB // \Gamma\Delta$, οπότε $A\Delta \perp \Gamma\Delta$, άρα $\hat{\Delta} = 90^\circ$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $EB\Gamma$ είναι $E\hat{B}\Gamma + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow E\hat{B}\Gamma + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow E\hat{B}\Gamma = 30^\circ$

Οπότε $E\Gamma = \dfrac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow 2E\Gamma = B\Gamma$.

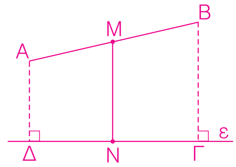
γ. Η MN είναι η διάμεσος του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$.

Οπότε $MN = \dfrac{AB + \Gamma\Delta}{2}$.

Είναι:
- $\Delta E = AB = 4$, αφού το $ABE\Delta$ είναι ορθογώνιο
- $E\Gamma = \dfrac{B\Gamma}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$
- $\Gamma\Delta = \Delta E + E\Gamma = 4 + 2 = 6$.

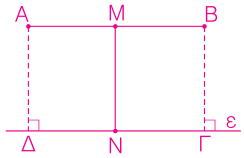
Οπότε $MN = \dfrac{4+6}{2} = 5$.

289 Θέμα 1715



α. i. 1. Αν $ΑΔ < ΒΓ$, τότε $ΑΔ \neq ΒΓ$ άρα το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ δεν είναι παραλληλόγραμμο οπότε έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες και είναι τραπέζιο.

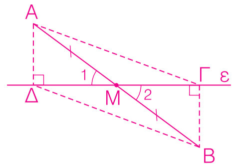
2. Αν $ΑΔ = ΒΓ$, τότε $ΑΔ // = ΒΓ$.



Οπότε το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή $\hat{Δ} = 90^\circ$ είναι ορθογώνιο.

ii. • Αν $ΑΔ < ΒΓ$, τότε το $ΜΝ$ είναι η διάμεσος του τραπεζίου $ΑΒΓΔ$, οπότε $ΜΝ = \dfrac{ΑΔ + ΒΓ}{2}$.

• Αν $ΑΔ = ΒΓ$, τότε $ΜΝ = ΑΔ = ΒΓ$.



β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΔΑΜ$ και $ΓΒΜ$ έχουν:
- $ΜΑ = ΜΒ$
- $\hat{Μ}_1 = \hat{Μ}_2$

Οπότε είναι ίσα, άρα $ΜΔ = ΜΓ$

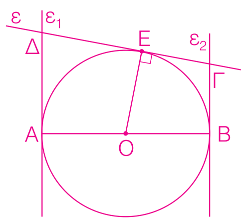
Επομένως το Μ είναι μέσο και του ΓΔ, οπότε τα $Μ$, $Ν$ ταυτίζονται.

Επειδή $ΜΑ = ΜΒ$ και $ΜΔ = ΜΓ$ το $ΑΓΒΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.

Επειδή $ΑΜ > ΜΔ$ και $ΜΒ > ΜΓ$ θα είναι $ΑΜ + ΜΒ > ΜΔ + ΜΓ \Leftrightarrow ΑΒ > ΓΔ$.

Άρα το $ΑΓΒΔ$ δεν έχει ίσες διαγώνιες οπότε δεν είναι ορθογώνιο.

290 Θέμα 1747



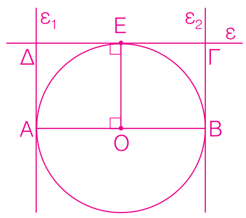
α i. Είναι $ε_1 \perp ΑΒ$ και $ε_2 \perp ΑΒ$, οπότε $ε_1 // ε_2$.

Επειδή το Ε δεν είναι μέσο του $\overset{\frown}{ΑΒ}$, έχουμε $Β\hat{Ο}Ε \neq 90^\circ$ και αφού $\hat{Ε} = 90^\circ$ προκύπτει $ΓΔ \nparallel ΑΒ$.

Οπότε το $ΑΒΓΔ$ είναι τραπέζιο.

ii. Είναι $ΔΕ = ΔΑ$ και $ΓΕ = ΓΒ$, ως εφαπτόμενα τμήματα.

Οπότε $ΓΔ = ΓΕ + ΔΕ = ΓΒ + ΔΑ = ΑΔ + ΒΓ$



β. Αν το Ε είναι το μέσο του $\overset{\frown}{ΑΒ}$, τότε $ΕΟ \perp ΑΒ$.

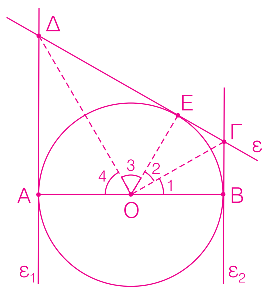
Επειδή $ΕΟ \perp ΓΔ$ έχουμε $ΕΟ // ΑΔ$ και $ΕΟ // ΒΓ$.

Το $ΟΒΓΕ$ είναι τετράγωνο αφού $\hat{Β} = \hat{Ο} = \hat{Ε} = 90^\circ$ και $ΟΒ = ΟΕ = R$

Το $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο, αφού $ΑΔ // = ΒΓ$ και $\hat{Α} = 90^\circ$

Άρα $Π_{ΑΔΓΒ} = 2(ΑΒ + ΑΔ) = 2(2R + R) = 6R$.

291 Θέμα 1758



α. Είναι $ΓΕ = ΓΒ$ και $ΔΕ = ΔΑ$, ως εφαπτόμενα τμήματα.

Οπότε $ΓΔ = ΓΕ + ΕΔ = ΓΒ + ΔΑ = ΑΔ + ΒΓ$.

β. Οι $ΟΓ$, $ΟΔ$ είναι διακεντρικές ευθείες, οπότε είναι οι διχοτόμοι των $Β\hat{Ο}Ε$, $Ε\hat{Ο}Α$.

Άρα $\hat{Ο}_1 = \hat{Ο}_2$ και $\hat{Ο}_3 = \hat{Ο}_4$

Είναι $\hat{Ο}_1 + \hat{Ο}_2 + \hat{Ο}_3 + \hat{Ο}_4 = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{Ο}_2 + 2\hat{Ο}_3 = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Ο}_2 + \hat{Ο}_3 = 90^\circ \Leftrightarrow Γ\hat{Ο}Δ = 90^\circ$.

Άρα $ΟΓ \perp ΟΔ$, οπότε το $\overset{\triangle}{ΓΟΔ}$ είναι ορθογώνιο.

γ. Οι $ΑΔ$, $ΒΓ$ είναι εφαπτόμενες του κύκλου, οπότε $ΑΔ \perp ΑΒ$ και $ΒΓ \perp ΑΒ$.

Άρα $ΑΔ // ΒΓ$.

• Αν το σημείο Ε δεν είναι μέσο του ημικυκλίου ΑΒ τότε οι ΓΔ και ΑΒ δεν είναι παράλληλες οπότε το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι τραπέζιο.

• Αν το Ε είναι μέσο του ημικυκλίου ΑΒ, τότε $Β\hat{Ο}Ε = 90^\circ$ (επίκεντρη γωνία που βαίνει σε τεταρτοκύκλιο) και $ΕΓ \perp ΟΕ$, άρα $ΕΓ // ΑΒ$. Οπότε το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο και αφού έχει μια ορθή γωνία, είναι ορθογώνιο.

292 Θέμα 1783

α. Είναι:
- $\Delta\hat{A}Z = Z\hat{A}B$, αφού AE διχοτόμος
- $AB // \Gamma\Delta$, άρα $Z\hat{A}B = A\hat{Z}\Delta$, ως εντός εναλλάξ.

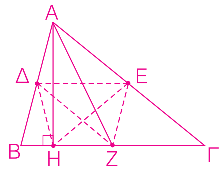
Οπότε $\Delta\hat{A}Z = \Delta\hat{Z}A$, επομένως το $\overset{\triangle}{\Delta AZ}$ είναι ισοσκελές.

β. Από το ισοσκελές τρίγωνο ΔAZ έχουμε $A\Delta = \Delta Z \Rightarrow AB + \Gamma\Delta = \Gamma\Delta + \Gamma Z \Rightarrow AB = \Gamma Z$.
Επειδή επιπλέον $AB // \Gamma Z$ το $ABZ\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.
Οπότε το E είναι το μέσο της διαγωνίου του $B\Gamma$.

γ. Το E είναι το μέσο και της διαγωνίου AZ , του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΔAZ , το ΔE είναι διάμεσος, οπότε η ΔE είναι διχοτόμος της $\hat{\Delta}$.

293 Θέμα 1885



α. • Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, τα Δ , E είναι τα μέσα των AB , $A\Gamma$, οπότε $\Delta E // B\Gamma$.
Άρα το ΔEZH είναι τραπέζιο.

- Στο ορθογώνιο τρίγωνο HAB $(\hat{H} = 90^o)$, η $H\Delta$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα,

οπότε $H\Delta = \frac{AB}{2}$ (1) .

- Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, τα E , Z είναι τα μέσα των $A\Gamma$, $B\Gamma$, οπότε $EZ = \frac{AB}{2}$ (2) .

Από τις (1) και (2) έχουμε $H\Delta = EZ$.
Άρα το τραπέζιο ΔEZH είναι ισοσκελές.

β. Τα τρίγωνα $H\Delta Z$ και HEZ έχουν:
- $EZ = H\Delta$
- HZ κοινή
- $\Delta\hat{H}Z = E\hat{Z}H$, ως γωνίες βάσης του ισοσκελούς τραπεζίου.

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ) , άρα $H\hat{\Delta}Z = H\hat{E}Z$.

γ. Είναι:
- $E\hat{\Delta}Z = \Delta\hat{Z}H$, ως εντός εναλλάξ
- $\Delta\hat{Z}H = E\hat{H}Z$, από την ισότητα των τριγώνων ΔHZ και EHZ.

Άρα $E\hat{\Delta}Z = E\hat{H}Z$

294 Θέμα 1815

α. Είναι:
- $A\hat{\Delta}M = M\hat{\Delta}\Gamma$ αφού ΔM διχοτόμος
- $A\hat{M}\Delta = M\hat{\Delta}\Gamma$, ως εντός εναλλάξ αφού $\Delta\Gamma // AB$.

Άρα $A\hat{\Delta}M = A\hat{M}\Delta$, οπότε το $\overset{\triangle}{A\Delta M}$ είναι ισοσκελές με $A\Delta = AM$.

β. Έχουμε $AB = A\Delta + B\Gamma \Rightarrow AM + MB = A\Delta + B\Gamma \Rightarrow A\Delta + MB = A\Delta + B\Gamma \Rightarrow MB = B\Gamma$.

Άρα το $\overset{\triangle}{MB\Gamma}$ είναι ισοσκελές.

γ. Επειδή:
- $\Delta\Gamma // AB$, είναι $\Delta\hat{\Gamma}M = \Gamma\hat{M}B$, ως εντός εναλλάξ
- το $\overset{\triangle}{MB\Gamma}$ είναι ισοσκελές, έχουμε $\Gamma\hat{M}B = M\hat{\Gamma}B$

Άρα $\Delta\hat{\Gamma}M = M\hat{\Gamma}B$, οπότε η ΓM είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ του τραπεζίου.

295 Θέμα 1860

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $E B\Gamma$ $(\hat{E}=90^\circ)$ είναι $E\hat{B}\Gamma+\hat{\Gamma}=90^\circ \Leftrightarrow E\hat{B}\Gamma+60^\circ=90^\circ \Leftrightarrow E\hat{B}\Gamma=30^\circ$,

Οπότε $E\Gamma=\dfrac{B\Gamma}{2}=\dfrac{2AB}{2}=AB$.

Επειδή $AB//=E\Gamma$, το $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Από το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma E$ έχουμε $AE=B\Gamma=2AB$. Είναι $ZE=\Gamma\Delta-E\Gamma-\Delta Z=$ $=4AB-AB-AB=2AB$. Άρα $AE=EZ$ και $A\hat{E}Z=\hat{\Gamma}=60^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη, αφού $AE//B\Gamma$.

Επομένως το $\overset{\Delta}{ZAE}$ είναι ισόπλευρο.

γ. Τα τρίγωνα ΔAZ και ΓAE έχουν:

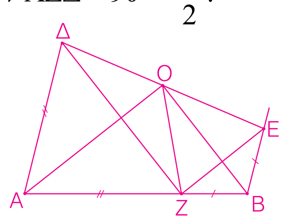
- $AZ=AE$, αφού το $\overset{\Delta}{ZAE}$ είναι ισόπλευρο
- $\Delta Z=E\Gamma$, αφού $\Delta Z=AB$ και $AB=E\Gamma$
- $A\hat{Z}\Delta=A\hat{E}\Gamma$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $A\hat{Z}E=60^\circ$ και $A\hat{E}Z=60^\circ$.

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

296 Θέμα 1784

α. Επειδή $AZ=A\Delta$, το $\overset{\Delta}{A\Delta Z}$ είναι ισοσκελές, οπότε $A\hat{Z}\Delta=A\hat{\Delta}Z$.

Στο $\overset{\Delta}{A\Delta Z}$ είναι $A\hat{\Delta}Z+A\hat{Z}\Delta+\Delta\hat{A}Z=180^\circ \Leftrightarrow 2A\hat{Z}\Delta+\varphi=180^\circ \Leftrightarrow 2A\hat{\Delta}Z=180^\circ-\varphi \Leftrightarrow A\hat{Z}\Delta=90^\circ-\dfrac{\varphi}{2}$.



β. Επειδή $A\Delta//BE$, έχουμε $Z\hat{B}E+\varphi=180^\circ \Leftrightarrow Z\hat{B}E=180^\circ-\varphi$.

Αφού το $\overset{\Delta}{BZE}$ είναι ισοσκελές, έχουμε $E\hat{Z}B=Z\hat{E}B$.

Στο $\overset{\Delta}{BZE}$ είναι $E\hat{Z}B+Z\hat{E}B+Z\hat{B}E=180^\circ \Leftrightarrow E\hat{Z}B+E\hat{Z}B+180^\circ-\varphi=180^\circ$

$$\Leftrightarrow 2E\hat{Z}B=\varphi \Leftrightarrow E\hat{Z}B=\frac{\varphi}{2}$$

γ. Είναι $\Delta\hat{Z}E=180^\circ-A\hat{Z}\Delta-E\hat{Z}B=180^\circ-\left(90^\circ-\dfrac{\varphi}{2}\right)-\dfrac{\varphi}{2}=180^\circ-90^\circ+\dfrac{\varphi}{2}-\dfrac{\varphi}{2}=90^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔZE η ZO είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $ZO=\dfrac{\Delta E}{2}=O\Delta=OE$.

Επειδή:

- $AZ=A\Delta$ και $OZ=O\Delta$, η AO είναι η μεσοκάθετος του ΔZ.
- $BZ=BE$ και $OZ=OE$, η BO είναι η μεσοκάθετος του ZE.

297 Θέμα 1711

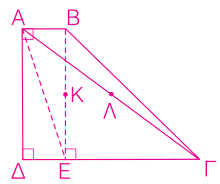
α. Είναι $E\Gamma=\dfrac{\Gamma\Delta}{2}=\dfrac{2AB}{2}=AB$ και $E\Gamma//AB$, οπότε το $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. • Στο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ η ZH είναι διάμεσος, οπότε $ZH//\Gamma\Delta//AB$.

- Στο $\overset{\Delta}{A\Delta E}$, το Z είναι το μέσο του $A\Delta$ και $Z\Theta//\Delta E$, οπότε το Θ μέσο του AE.
- Στο $\overset{\Delta}{BE\Gamma}$, το H είναι το μέσο του $B\Gamma$ και $HI//E\Gamma$, οπότε το I είναι το μέσο του BE.

γ. Είναι $ZH=\dfrac{\Gamma\Delta+AB}{2}=\dfrac{2AB+AB}{2}=\dfrac{3}{2}AB$.

298 Θέμα 1757



α. Στο τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι $\hat{A}=\hat{E}=\hat{\Delta}=90^o$, οπότε είναι ορθογώνιο.

β. Επειδή το ΑΒΕΔ είναι ορθογώνιο, έχουμε $\Delta E = AB$ και $BE = A\Delta$.

Είναι:

- $E\Gamma = \Delta\Gamma - \Delta E = 4AB - AB = 3AB$
- $BE = A\Delta = 3AB$

Άρα $E\Gamma = BE$, οπότε το $\overset{\Delta}{BE\Gamma}$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

γ. Στο τραπέζιο ΑΒΓΕ , τα Κ , Λ είναι τα μέσα των διαγωνίων του, οπότε

$$K\Lambda = \frac{E\Gamma - AB}{2} = \frac{3AB - AB}{2} = AB \text{ και } K\Lambda // AB .$$

Άρα το ΑΒΛΚ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε η ΑΓ διέρχεται από το μέσο του ΒΚ .

299 Θέμα 1767

α. Είναι $\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^o \Rightarrow 3\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=45^o$.

β. Το ΑΒΕΔ έχει $\hat{A}=\hat{\Delta}=\hat{E}=90^o$, οπότε είναι ορθογώνιο, άρα $\Delta E = AB$.

Έχουμε $\Delta\Gamma = 2AB \Leftrightarrow \Delta E + E\Gamma = 2AB \Leftrightarrow AB + E\Gamma = 2AB \Leftrightarrow E\Gamma = AB$.

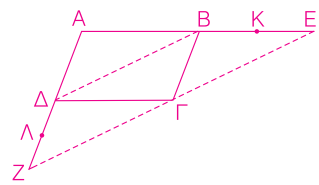
Επειδή επιπλέον $AB // E\Gamma$, το ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Επειδή $\hat{\Gamma}=45^o$, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ είναι $\hat{B}=90^o-\hat{\Gamma}=90^o-45^o=45^o$.

Οπότε το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές με $BE = E\Gamma$, άρα $BE = E\Delta$.

Επομένως το ορθογώνιο ΑΒΕΔ είναι τετράγωνο, άρα οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα, δηλαδή $AE \perp B\Delta$.

300 Θέμα 1842



α. i. Επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε:

- $AB //= \Gamma\Delta \Leftrightarrow BE //= \Gamma\Delta$
- $A\Delta //= B\Gamma \Leftrightarrow \Delta Z //= B\Gamma$

Άρα τα ΒΔΓΕ και ΒΔΖΓ είναι παραλληλόγραμμα.

ii. Από τα παραλλληλόγραμμα ΒΔΓΕ και ΒΔΖΓ , έχουμε $\Gamma Z // \Delta B$ και $\Gamma E // \Delta B$, άρα τα Ε , Γ , Ζ είναι συνευθειακά.

β. Στο τρίγωνο ΑΖΕ τα Δ, Β είναι μέσα των ΑΖ, ΑΕ , οπότε $\Delta B // ZE$.

Επειδή $\Delta B // ZE$, το τετράπλευρο ΔΒΕΖ είναι τραπέζιο.

Η ΚΛ είναι η διάμεσος του τραπεζίου ΔΒΕΖ , οπότε:

- $K\Lambda // \Delta B$
- $K\Lambda = \frac{\Delta B + ZE}{2} = \frac{\Delta B + Z\Gamma + \Gamma E}{2} = \frac{\Delta B + \Delta B + \Delta B}{2} = \frac{3}{2}\Delta B$.

301 Θέμα 1838

α. Οι Βx , Βy είναι οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{B}_{\varepsilon\xi}$, οπότε είναι $\Gamma\hat{B}\Delta = \Delta\hat{B}A$ και $A\hat{B}E = E\hat{B}Z$

Είναι $\Gamma\hat{B}\Delta + \Delta\hat{B}A + A\hat{B}E + E\hat{B}Z = 180^o \Leftrightarrow 2\Delta\hat{B}A + 2A\hat{B}E = 180^o \Leftrightarrow \Delta\hat{B}A + A\hat{B}E = 180^o \Leftrightarrow \Delta\hat{B}E = 90^o$.

Το τετράπλευρο ΑΔΒΕ έχει $\hat{B}=\hat{\Delta}=\hat{E}=90^o$, οπότε είναι ορθογώνιο.

β. Επειδή το ΑΔΒΕ είναι ορθογώνιο, έχουμε $AB = E\Delta \Leftrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{E\Delta}{2} \Leftrightarrow KB = K\Delta$.

Άρα το τρίγωνο ΚΒΔ είναι ισοσκελές, επομένως $K\hat{\Delta}B = K\hat{B}\Delta$.

Είναι $K\hat{B}\Delta = \Delta\hat{B}\Gamma$, οπότε $K\hat{\Delta}B = \Delta\hat{B}\Gamma$

Επομένως οι $ΕΔ$ και $ΒΓ$ που τέμνονται από τη $ΒΔ$ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες τους ίσες, άρα $ΕΔ // ΒΓ$.

Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ το $Κ$ είναι το μέσο της $ΑΒ$ και $ΚΜ // ΒΓ$, οπότε το $Μ$ είναι το μέσο της $ΑΓ$.

γ. Από το **β.** ερώτημα έχουμε $ΚΜ // ΒΓ$, οπότε το $ΚΜΓΒ$ είναι τραπέζιο και $ΚΜ = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{α}{2}$. Η διάμεσος του τραπεζίου $ΚΜΓΒ$ είναι ίση με

$$\frac{ΒΓ + ΚΜ}{2} = \frac{α + \frac{α}{2}}{2} = \frac{3α}{4} .$$

302 Θέμα 1852

α. Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$, τα $Δ$, $Ε$ είναι τα μέσα των $ΑΒ$, $ΑΓ$, οπότε:

- $ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{2ΚΛ}{2} = ΚΛ$
- $ΔΕ // ΒΓ$, οπότε $ΔΕ // ΚΛ$

Οπότε το $ΔΕΛΚ$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Στο τρίγωνο $ΑΒΜ$, τα $Δ$, $Κ$ είναι τα μέσα των $ΑΒ$, $ΒΜ$, οπότε $ΔΚ // ΑΜ$.

Άρα το $ΚΔΑΜ$ είναι τραπέζιο.

Για τη διάμεσο $δ$ του τραπεζίου $ΚΔΑΜ$, έχουμε $δ = \frac{ΑΜ + ΔΚ}{2}$.

- Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(\hat{Α} = 90^{o})$, η $ΑΜ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2}$.
- Στο τρίγωνο $ΑΒΜ$ τα $Δ$, $Κ$ είναι τα μέσα των $ΑΒ$, $ΒΜ$, οπότε $ΔΚ = \frac{ΑΜ}{2} = \frac{ΒΓ}{4}$.

Άρα $δ = \frac{\frac{ΒΓ}{2} + \frac{ΒΓ}{4}}{2} = \frac{\frac{3ΒΓ}{4}}{2} = \frac{3}{8}ΒΓ$.

303 Θέμα 1821

α. Το $Λ$ είναι μέσο του $ΓΔ$, οπότε $ΓΔ = 2ΓΛ \Leftrightarrow 2ΑΒ = 2ΓΛ \Leftrightarrow ΑΒ = ΓΛ$.

Επομένως $ΑΒ //= ΓΛ$, άρα το $ΑΒΓΛ$ είναι παραλληλόγραμμο. Οπότε $ΑΛ // ΒΓ$.

Τα τετράπλευρα $ΑΒΚΖ$, $ΖΚΓΛ$ είναι παραλληλόγραμμα γιατί έχουν τις απέναντι πλευρές παράλληλες.

Οπότε $ΒΚ = ΑΖ$ και $ΚΓ = ΖΛ$.

Αφού $ΒΚ = ΚΓ$ έχουμε $ΑΖ = ΖΛ$.

Άρα το $Ζ$ θα είναι το μέσο του $ΑΛ$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΔΑΛ$ $(\hat{Δ} = 90^{o})$, η $ΔΖ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε

$$ΔΖ = \frac{ΑΛ}{2} \Leftrightarrow ΔΖ = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow ΒΓ = 2ΔΖ .$$

γ. Το $ΖΚΓΛ$ είναι παραλληλόγραμμο και $ΚΓ = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{2ΑΒ}{2} = ΑΒ = ΖΚ$, άρα είναι ρόμβος.

δ. Στο τρίγωνο $ΑΚΛ$, η $ΚΖ$ είναι διάμεσος και $ΚΖ = ΛΖ = \frac{ΑΛ}{2}$.

Οπότε το τρίγωνο $ΑΚΛ$ είναι ορθογώνιο με $Α\hat{Κ}Λ = 90^{o}$.

304 Θέμα 1834

α. Τα τρίγωνα $ΑΔΓ$ και $ΒΔΓ$ έχουν:
- $ΑΔ = ΒΓ$
- $ΑΓ = ΒΔ$
- $ΓΔ$ κοινή

Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ), επομένως $Α\hat{Γ}Δ = Β\hat{Δ}Γ$.
Οπότε το τρίγωνο $ΔΟΓ$ είναι ισοσκελές με $ΟΓ = ΟΔ$.
Επειδή $ΒΔ = ΑΓ$ και $ΟΓ = ΟΔ$ έχουμε $ΟΑ = ΟΒ$, δηλαδή το τρίγωνο $ΟΑΒ$ είναι ισοσκελές.

β. Στο τρίγωνο $ΑΒΟ$, είναι $ΟΑ = ΟΒ$ οπότε $Γ\hat{Α}Β = Α\hat{Β}Δ$.
Επειδή τα τρίγωνα $ΑΓΔ$ και $ΒΓΔ$ είναι ίσα, έχουμε $Δ\hat{Α}Γ = Δ\hat{Β}Γ$.

Άρα $Δ\hat{Α}Β = Δ\hat{Α}Γ + Γ\hat{Α}Β = Δ\hat{Β}Γ + Α\hat{Β}Δ = Α\hat{Β}Γ$

γ. Τα τρίγωνα $ΑΓΔ$ και $ΒΓΔ$ είναι ίσα, οπότε $Α\hat{Δ}Γ = Β\hat{Γ}Δ$
Στο τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ έχουμε:
$Δ\hat{Α}Β + Α\hat{Β}Γ + Α\hat{Δ}Γ + Β\hat{Γ}Δ = 360^o \Leftrightarrow 2Δ\hat{Α}Β + 2Α\hat{Δ}Γ = 360^o \Leftrightarrow Δ\hat{Α}Β + Α\hat{Δ}Γ = 180^o$
Οι γωνίες $Δ\hat{Α}Β$ και $Α\hat{Δ}Γ$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των $ΑΒ$, $ΓΔ$ που τέμνονται από την $ΑΔ$ και είναι παραπληρωματικές, οπότε $ΑΒ // ΓΔ$.
Άρα το $ΑΒΓΔ$ είναι τραπέζιο και επειδή $ΑΔ = ΒΓ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

305 Θέμα 1778

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΟΕΒ$ έχουμε $Ο\hat{Β}Ε = 90^o - Β\hat{Ο}Ε$

Είναι $Α\hat{Ο}Δ + 90^o + Β\hat{Ο}Ε = 180^o \Leftrightarrow Α\hat{Ο}Δ = 90^o - Β\hat{Ο}Ε \Leftrightarrow Α\hat{Ο}Δ = Β\hat{Ο}Ε$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΟΑΔ$ και $ΟΒΕ$ έχουν:
- $ΟΑ = ΟΒ$
- $Α\hat{Ο}Δ = Ο\hat{Β}Ε$

Άρα είναι ίσα.

β. Επειδή τα τρίγωνα $ΟΑΔ$ και $ΟΒΕ$ είναι ίσα, έχουμε $ΑΔ = ΟΕ$ και $ΟΔ = ΒΕ$.
Είναι $ΑΔ + ΒΕ = ΟΕ + ΟΔ = ΔΕ$.

γ. Είναι $ΑΔ \perp ΔΕ$ και $ΒΕ \perp ΔΕ$, οπότε $ΑΔ // ΒΕ$, άρα το $ΑΔΕΒ$ είναι τραπέζιο.
Η $ΜΝ$ είναι διάμεσος του τραπεζίου, οπότε $ΜΝ = \dfrac{ΑΔ + ΒΕ}{2} \overset{β.}{=} \dfrac{ΔΕ}{2}$.

δ. Είναι $ΜΝ // ΑΔ$ και $ΑΔ \perp ΔΕ$, οπότε $ΜΝ \perp ΔΕ$. Στο $\overset{\Delta}{ΔΜΕ}$ η $ΜΝ$ είναι διάμεσος και ύψος, οπότε το $\overset{\Delta}{ΔΜΕ}$ είναι ισοσκελές. Επειδή στο $\overset{\Delta}{ΔΜΕ}$ η διάμεσος $ΜΝ$ είναι ίση με $\dfrac{ΔΕ}{2}$, το τρίγωνο είναι ορθογώνιο. Άρα το $\overset{\Delta}{ΔΜΕ}$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

306 Θέμα 1861

α. Τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελή και τα $ΑΕ$, $ΒΖ$ είναι ύψη τους, οπότε είναι και διάμεσοί τους. Άρα τα $Ζ$, $Ε$ είναι τα μέσα των $ΑΓ$, $ΒΔ$ αντίστοιχα.

β. Επειδή το $ΑΒΓΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο, έχουμε $ΑΓ = ΒΔ$, οπότε και $ΕΒ = ΖΑ$.
Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΕΑΒ$ και $ΖΑΒ$ έχουν:
- $ΕΒ = ΖΑ$
- $ΑΒ$ κοινή

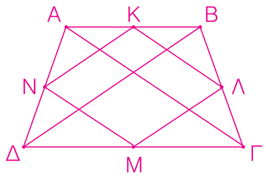
Άρα είναι ίσα, οπότε $ΑΕ = ΒΖ$.

γ. Στο τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ τα $Ε$, $Ζ$ είναι τα μέσα των διαγωνίων του, οπότε $ΕΖ // ΑΒ$.
Άρα το $ΑΕΖΒ$ είναι τραπέζιο και επειδή $ΑΕ = ΒΖ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

δ. Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Delta$, οπότε $A\hat{\Delta}B = A\hat{B}\Delta$. Επειδή $AB // \Gamma\Delta$ έχουμε $A\hat{B}\Delta = B\hat{\Delta}\Gamma$, ως εντός εναλλάξ.

Άρα $A\hat{\Delta}B = B\hat{\Delta}\Gamma$, οπότε η $B\Delta$ είναι η διχοτόμος της $\hat{\Delta}$.

307 Θέμα 1797



α. Επειδή τα K, Λ, M, N είναι τα μέσα των πλευρών του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$, το $K\Lambda MN$ είναι παραλληλόγραμμο.

Αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο, έχουμε $A\Gamma = B\Delta$.

Στο $\overset{\Delta}{AB\Delta}$, τα K, N είναι τα μέσα των AB, $A\Delta$, οπότε $KN = \dfrac{B\Delta}{2}$.

Στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$, τα K, Λ είναι τα μέσα των AB, $B\Gamma$, οπότε $K\Lambda = \dfrac{A\Gamma}{2}$. Άρα $K\Lambda = KN$, οπότε το $K\Lambda MN$ είναι ρόμβος.

β. Επειδή το $K\Lambda MN$ είναι ρόμβος, έχουμε $KN = K\Lambda$ και από το **α.** ερώτημα $A\Gamma = B\Delta$.

Οπότε για να σχηματίζεται ρόμβος, αρκεί το $AB\Gamma\Delta$ να έχει ίσες διαγωνίους.

Άρα δεν είναι υποχρεωτικό το $AB\Gamma\Delta$ να είναι ισοσκελές τραπέζιο.

308 Θέμα 1854

α. Είναι $MN = MA + AN = \dfrac{A\Delta}{2} + \dfrac{A\Delta}{2} = A\Delta = B\Gamma$.

Επειδή $MN // = B\Gamma$, το $MNB\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Τα K, Λ είναι τα μέσα των παράλληλων τμημάτων $M\Gamma$, NB, οπότε $MK // = N\Lambda$, άρα το $MN\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.

Επομένως $K\Lambda // = MN$, άρα $K\Lambda // = A\Delta$.

Οπότε το $A\Delta K\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Επειδή $AM // K\Lambda$, το $AMK\Lambda$ είναι τραπέζιο.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABN $(\hat{A} = 90^{o})$ η $A\Lambda$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $A\Lambda = \dfrac{BN}{2} = \dfrac{M\Gamma}{2} = MK$.

Επομένως το $AMK\Lambda$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

309 Θέμα 1830

α. Στο τρίγωνο AKE, το KH είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β. Στο τρίγωνο $AE\Gamma$, τα H, K είναι τα μέσα των AE, $A\Gamma$, οπότε $HK // E\Gamma$.

Επειδή $HK \perp AE$, είναι $E\Gamma \perp AE$.

Άρα το τρίγωνο $AE\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

γ. Επειδή $\Delta B \perp AE$ και $\Gamma E \perp AE$, έχουμε $\Delta B // \Gamma E$, οπότε το $\Delta B\Gamma E$ είναι τραπέζιο.

Η ΔB είναι η μεσοκάθετος του AE, οπότε $\Delta E = \Delta A$.

Είναι $\Delta A = \Gamma B$, αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα $\Delta E = B\Gamma$.

Οπότε το $\Delta B\Gamma E$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

310 Θέμα 1789

α. Στο τρίγωνο $ΓΔΒ$, τα $Κ$, $Μ$ είναι τα μέσα των $ΓΔ$, $ΒΓ$, οπότε $ΚΜ // = \frac{ΒΔ}{2} \Leftrightarrow ΚΜ // = ΔΝ$.

Άρα το $ΚΜΝΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Επειδή $ΚΜ // ΑΒ$, το $ΑΚΜΝ$ είναι τραπέζιο. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΔΓ$ $(\hat{Α} = 90^\circ)$ η $ΑΚ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $ΑΚ = \frac{ΓΔ}{2}$.

Επειδή το $ΚΜΝΔ$ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε $ΜΝ = ΚΔ = \frac{ΓΔ}{2}$.

Άρα $ΑΚ = ΜΝ$, οπότε το $ΑΚΜΝ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ. Η διάμεσος του τραπεζίου $ΑΚΜΝ$ είναι $δ = \frac{ΚΜ + ΑΝ}{2} = \frac{ΔΝ + ΑΝ}{2} = \frac{ΝΒ + ΑΝ}{2} = \frac{ΑΒ}{2}$.

311 Θέμα 1841

α. Στο τρίγωνο $ΑΔΖ$, το $ΔΕ$ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β. Στο τρίγωνο $ΑΖΓ$, τα $Ε$, $Ο$ είναι τα μέσα των $ΑΖ$, $ΑΓ$, οπότε $ΟΕ // ΖΓ$ και $ΟΕ = \frac{ΖΓ}{2} \Leftrightarrow ΖΓ = 2ΟΕ$.

γ. Είναι $ΟΕ // ΖΓ$, άρα $ΒΔ // ΖΓ$, οπότε το $ΒΔΓΖ$ είναι τραπέζιο.
Η $ΔΒ$ είναι η μεσοκάθετος του $ΑΖ$, οπότε $ΒΑ = ΒΖ$
Είναι $ΑΒ = ΓΔ$, αφού το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα $ΒΖ = ΔΓ$.
Οπότε το $ΒΔΓΖ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

312 Θέμα 1790

α. Στο τρίγωνο $ΑΒΖ$, το $ΑΕ$ είναι ύψος και διάμεσος.
Άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $ΑΖ = ΑΒ$.
Αφού το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο, είναι $ΑΒ = ΔΓ$, οπότε $ΑΖ = ΔΓ$.
Επειδή $ΖΓ // ΑΔ$ και $ΑΖ = ΔΓ$ το $ΑΖΓΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β. Είναι:
- $\hat{Δ} = \hat{Β} = 70^\circ$, ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου
- $Ζ\hat{Α}Δ = \hat{Δ} = 70^\circ$
- $\hat{Γ} = 180^\circ - \hat{Β} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$
- $Α\hat{Ζ}Γ = \hat{Γ} = 110^\circ$

Άρα οι γωνίες του τραπεζίου $ΑΖΓΔ$ είναι $\hat{Δ} = Ζ\hat{Α}Δ = 70^\circ$ και $\hat{Γ} = Α\hat{Ζ}Γ = 110^\circ$.

γ. Στο ισοσκελές τραπέζιο $ΑΔΓΖ$ είναι $ΑΓ = ΔΖ$.

Στο τρίγωνο $ΒΖΔ$ τα $Μ$, $Ε$ τα μέσα των $ΒΔ$, $ΒΖ$, οπότε $ΕΜ = \frac{ΔΖ}{2}$. Άρα $ΕΜ = \frac{ΑΓ}{2}$.

313 Θέμα 1791

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(\hat{Α} = 90^\circ)$ η $ΑΜ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2} = ΜΒ$.

Άρα το $\overset{\triangle}{ΜΑΒ}$ είναι ισοσκελές και επειδή $\hat{Β} = 90^\circ - \hat{Γ} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ είναι ισόπλευρο.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΕΜΓ$ $(\hat{Ε} = 90^\circ)$ και $ΔΜΑ$ $(\hat{Δ} = 90^\circ)$, έχουν:
- $ΜΑ = ΜΓ$
- $Α\hat{Μ}Δ = Γ\hat{Μ}Ε$

Άρα είναι ίσα, οπότε $ΜΕ = ΜΔ$.

Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΜΑΒ, το ύψος ΑΔ είναι και διάμεσος, οπότε $ΜΔ = \frac{ΜΒ}{2} = \frac{\frac{ΒΓ}{2}}{2} = \frac{ΒΓ}{4}$.

γ. Στο $\overset{\Delta}{ΜΔΕ}$ έχουμε $ΜΔ = ΜΕ$, άρα $Μ\hat{Ε}Δ = Μ\hat{Δ}Ε$.
Η γωνία $Α\widehat{Μ}Β$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΜΔΕ οπότε
$Α\widehat{Μ}Β = Μ\hat{Ε}Δ + Μ\hat{Δ}Ε \Leftrightarrow 60^o = 2Μ\hat{Δ}Ε \Leftrightarrow Μ\hat{Δ}Ε = 30^o$.

Επειδή $\hat{Γ} = Γ\hat{Δ}Ε \ (=30^o)$ και είναι εντός εναλλάξ, έχουμε $ΔΕ // ΑΓ$, άρα το ΑΔΕΓ είναι τραπέζιο.

Αφού $Γ\hat{Ε}Δ = 90^o + 30^o = 120^o = Ε\hat{Δ}Α$ το ΑΔΕΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

314 Θέμα 1829

α. Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΔ το ΒΗ είναι διάμεσος οπότε είναι ύψος και διχοτόμος.
Άρα $ΒΗ \perp ΑΔ$ και $Η\hat{Β}Δ = Η\hat{Β}Α = \frac{60^o}{2} = 30^o$.

Είναι $Η\hat{Β}Ε = 180^o - Η\hat{Β}Α - Ε\hat{Β}Γ = 180^o - 30^o - 60^o = 90^o$.
Οπότε $ΒΗ \perp ΔΗ$ και $ΒΗ \perp ΕΒ$, άρα $ΕΒ // ΔΗ$.

Έχουμε $ΕΒ = ΒΓ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΑΔ}{2} = ΗΔ$.

Επειδή $ΕΒ // = ΔΗ$ το ΒΗΔΕ είναι παραλληλόγραμμο και αφού επιπλέον είναι $\hat{Η} = 90^o$, είναι ορθογώνιο.

β. Είναι $Α\hat{Δ}Ζ = 90^o$, αφού το ΒΗΔΕ είναι ορθογώνιο.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΖ το Η είναι το μέσο της ΑΔ και $ΗΒ // ΔΖ$, οπότε το Β είναι το μέσο της ΑΖ .
Επομένως $ΑΒ = ΒΖ \Rightarrow ΑΒ = ΒΓ + ΓΖ \Rightarrow 2ΒΓ = ΒΓ + ΓΖ \Rightarrow ΒΓ = ΓΖ$.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΖ $(\hat{Ε} = 90^o)$ η ΕΓ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε
$ΕΓ = \frac{ΒΖ}{2} \Leftrightarrow ΕΓ = ΓΖ$.
Άρα το τρίγωνο ΓΖΕ είναι ισοσκελές.

γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΖ το Β είναι το μέσο του ΑΖ και $ΒΕ // ΑΔ$, οπότε το Ε είναι το μέσο της ΑΖ. Στο $\overset{\Delta}{ΑΔΖ}$ τα Η, Ε είναι τα μέσα των ΑΔ, ΔΖ , οπότε $ΗΕ // ΑΖ$.
Άρα το ΗΕΓΑ είναι τραπέζιο και επειδή $\hat{Α} = Ε\hat{Γ}Β = 60^o$, είναι ισοσκελές τραπέζιο.

315 Θέμα 1853

α. Επειδή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο, έχουμε $\hat{Α} = \hat{Β}$ και $\hat{Γ} = \hat{Δ}$.
Είναι $ΑΒ // ΓΔ$, οπότε
$\hat{Β} + \hat{Γ} = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{Γ} + \hat{Γ} = 180^o \Leftrightarrow \hat{Γ} = 60^o$.
Άρα $\hat{Β} = 2\hat{Γ} = 120^o$, $\hat{Α} = \hat{Β} = 120^o$ και $\hat{Δ} = \hat{Γ} = 60^o$.

β. i. Στο τρίγωνο ΒΚΓ είναι $Κ\hat{Β}Γ = \frac{\hat{Β}}{2} = \frac{120^o}{2} = 60^o$, $\hat{Γ} = 60^o$ και $Β\hat{Κ}Γ = 180^o - 60^o - 60^o = 60^o$.
Άρα είναι ισόπλευρο , οπότε $ΚΒ = ΒΓ = ΚΓ$.
Έχουμε $ΒΓ = \frac{ΓΔ}{2} \Leftrightarrow 2ΒΓ = ΔΓ \Leftrightarrow 2ΚΓ = ΔΚ + ΚΓ \Leftrightarrow ΚΓ = ΔΚ \Leftrightarrow ΒΚ = ΔΚ$.
Επειδή $ΑΒ = ΒΚ = ΚΔ = ΑΔ$ το ΑΒΚΔ είναι ρόμβος.

ii. Επειδή το τρίγωνο ΒΚΓ είναι ισόπλευρο και το ΚΜ είναι ύψος, θα είναι και διάμεσος, οπότε το Μ είναι το μέσο του ΒΓ .

316 Θέμα 1867

α. Επειδή το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο, έχουμε $ΑΔ = ΒΓ$.

- Στο τρίγωνο $ΔΒΓ$ τα $Μ$, $Ε$ είναι τα μέσα των $ΔΓ$, $ΔΒ$, οπότε $ΜΕ = \frac{ΒΓ}{2}$.
- Στο τρίγωνο $ΓΔΑ$, τα $Μ$, $Ζ$ είναι τα μέσα των $ΓΔ$, $ΓΑ$ οπότε $ΜΖ = \frac{ΑΔ}{2}$

Άρα $ΜΕ = ΜΖ$.

β. Στο τρίγωνο $ΓΔΑ$, τα $Μ$, $Ζ$ είναι τα μέσα των $ΓΔ$, $ΓΑ$, οπότε $ΜΖ // ΑΔ$ και επειδή $ΑΔ \perp ΑΓ$ είναι και $ΜΖ \perp ΑΓ$.

γ. Τα τρίγωνα $ΜΔΕ$ και $ΜΖΓ$ έχουν:
- $ΜΔ = ΜΓ$
- $ΜΕ = ΜΖ$
- $ΔΕ = ΖΓ$ ως μισά ίσων τμημάτων

Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ).

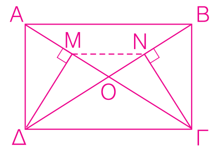
δ. Επειδή τα τρίγωνα $ΜΔΕ$ και $ΜΓΖ$ είναι ίσα έχουμε $Ε\hat{Δ}Μ = Μ\hat{Γ}Ζ$.

Άρα το τρίγωνο $ΟΔΓ$ είναι ισοσκελές με $ΟΔ = ΟΓ$.

Οπότε $ΟΕ = ΟΔ - ΔΕ = ΟΓ - ΓΖ = ΟΖ$.

Επειδή $ΟΕ = ΟΖ$ και $ΜΕ = ΜΖ$, η $ΟΜ$ είναι η μεσοκάθετος του $ΕΖ$.

317 Θέμα 1893



α. i. Επειδή το $Ο$ είναι το κέντρο του ορθογωνίου, έχουμε $ΟΑ = ΟΔ$.

Αφού επιπλέον $Α\hat{Ο}Δ = 60^\circ$, το τρίγωνο $ΑΟΔ$ είναι ισόπλευρο.
Επειδή το $ΔΜ$ είναι ύψος του ισόπλευρου τριγώνου $ΟΑΔ$, θα είναι και διάμεσος.
Άρα το $Μ$ είναι το μέσο του $ΟΑ$.

ii. Είναι $ΑΜ = \frac{1}{2}ΟΑ = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}ΑΓ = \frac{1}{4}ΑΓ$.

β. Στο τρίγωνο $ΟΓΒ$ είναι $ΟΒ = ΟΓ$ και $Β\hat{Ο}Γ = 60^\circ$, οπότε είναι ισόπλευρο.

Επειδή το $ΓΝ$ είναι ύψος του, θα είναι και διάμεσος, οπότε το $Ν$ είναι το μέσο του $ΟΒ$.

Στο τρίγωνο $ΟΑΒ$, τα $Μ$, $Ν$ είναι τα μέσα των $ΟΑ$, $ΟΒ$, οπότε $ΜΝ // ΑΒ$.

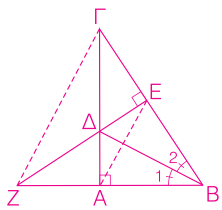
Επειδή $ΑΒ // ΓΔ$ έχουμε $ΜΝ // ΓΔ$, άρα το τετράπλευρο $ΜΝΓΔ$ είναι τραπέζιο.

Είναι:
- $ΟΜ = \frac{ΟΑ}{2} = \frac{ΟΒ}{2} = ΟΝ$
- $ΟΓ = ΟΔ$

Οπότε $ΟΜ + ΟΓ = ΟΝ + ΟΔ \Leftrightarrow ΜΓ = ΝΔ$.

Άρα το $ΜΝΓΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

318 Θέμα 1722



α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΕΒΔ$ έχουν:
- $ΒΔ$ κοινή
- $\hat{Β}_1 = \hat{Β}_2$

Άρα είναι ίσα, οπότε $ΒΑ = ΒΕ$.
Επομένως το τρίγωνο $ΑΒΕ$ είναι ισοσκελές.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΒΕΖ$ έχουν:
- $ΑΒ = ΒΕ$
- $\hat{Β}$ κοινή

Άρα είναι ίσα.

γ. Επειδή τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $EB\Delta$ είναι ίσα, έχουμε $\Delta A = \Delta E$ και $BA = BE$.
Οπότε η $B\Delta$ είναι η μεσοκάθετος του AE .

Επειδή τα $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ και $\overset{\Delta}{BEZ}$ είναι ίσα, έχουμε $B\Gamma = BZ$ και $A\Gamma = ZE$.

Οπότε $\Delta\Gamma = A\Gamma - A\Delta = ZE - \Delta E = \Delta Z$.

Αφού $B\Gamma = BZ$ και $\Delta\Gamma = \Delta Z$, η $B\Delta$ είναι η μεσοκάθετος του $Z\Gamma$.

δ. Επειδή $AE \perp B\Delta$ και $\Gamma Z \perp B\Delta$ είναι $AE \parallel \Gamma Z$.

Επομένως το $AE\Gamma Z$ είναι τραπέζιο. Αφού επιπλέον $A\Gamma = ZE$, το $AE\Gamma Z$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

319 Θέμα 1845

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ είναι $B\widehat{A}\Delta + \widehat{B} = 90^o \Leftrightarrow B\widehat{A}\Delta + 60^o = 90^o \Leftrightarrow B\widehat{A}\Delta = 30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο AEH είναι $E\widehat{H}A + E\widehat{A}H = 90^o \Leftrightarrow E\widehat{H}A + 30^o = 90^o \Leftrightarrow E\widehat{H}A = 60^o$.

Άρα $E\widehat{H}Z = \dfrac{E\widehat{H}A}{2} = \dfrac{60^o}{2} = 30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ZHE $(\hat{E} = 90^o)$, έχουμε $E\hat{H}Z = 30^o$, άρα $EZ = \dfrac{ZH}{2} \Leftrightarrow ZH = 2EZ$.

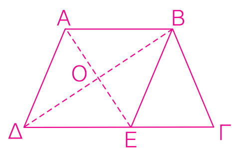
β. Είναι $E\hat{H}\Theta = A\widehat{H}\Theta - E\widehat{H}A = 90^o - 60^o = 30^o$, άρα $E\widehat{H}\Theta = E\widehat{H}Z$.
Οπότε στο τρίγωνο ΘZH το HE είναι ύψος και διχοτόμος.

Άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές και αφού επιπλέον είναι $Z\hat{H}\Theta = 60^o$, είναι ισόπλευρο.

γ. Επειδή $\Theta H \perp A\Delta$ και $B\Gamma \perp A\Delta$, έχουμε $\Theta H \parallel BK$, οπότε το ΘHKB είναι τραπέζιο.
Είναι $\widehat{K} = \Theta\widehat{H}Z = 60^o$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

Αφού το ΘHKB είναι τραπέζιο και ισχύει $\hat{B} = \hat{K} = 60^o$, το ΘHKB είναι ισοσκελές τραπέζιο.

320 Θέμα 1755



α. Επειδή $AB = A\Delta$, είναι $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Delta}B$.

Αφού $AB \parallel \Gamma\Delta$, έχουμε $A\hat{B}\Delta = B\hat{\Delta}\Gamma$, ως εντός εναλλάξ.

Άρα $A\hat{\Delta}B = B\hat{\Delta}\Gamma$, επομένως η ΔB είναι η διχοτόμος της $\hat{\Delta}$.
β. Από το B φέρουμε παράλληλη στην $A\Delta$ που τέμνει την $\Gamma\Delta$ στο E.
Το τετράπλευρο $ABE\Delta$ έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες $(AB = A\Delta)$, οπότε είναι ρόμβος.
γ. Επειδή το $ABE\Delta$ είναι ρόμβος, οι διαγώνιοί του AE και $B\Delta$ διχοτομούν τις γωνίες του και τέμνονται κάθετα.
Είναι:

- $B\hat{O}E = 90^o$
- $A\widehat{B}\Gamma = B\widehat{A}\Delta = 120^o$
- $A\widehat{B}\Gamma + \widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 120^o + \widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 60^o$
- $O\hat{B}\Gamma = A\hat{B}\Gamma - A\hat{B}O = 120^o - 30^o = 90^o$
- $O\hat{E}\Gamma = 360^o - (B\hat{O}E + \hat{\Gamma} + O\hat{B}\Gamma) = 360^o - (90^o + 60^o + 90^o) = 360^o - 240^o = 120^o$

321 Θέμα 1863

α. Στο τρίγωνο $AB\Delta$, η $A\Gamma$ είναι διάμεσος και $A\Gamma = B\Gamma = \dfrac{B\Delta}{2}$, οπότε $B\hat{A}\Delta = 90^o$.

Είναι $\hat{B} = 60^o$, οπότε $\hat{\Delta} = 90^o - \hat{B} = 90^o - 60^o = 30^o$.

β. i. Στο τρίγωνο $ΑΒΔ$, τα $Κ$, $Λ$ είναι τα μέσα των $ΑΒ$, $ΑΔ$, οπότε

- $ΚΛ // ΒΔ$, άρα το $ΚΛΓΜ$ είναι τραπέζιο
- $ΚΛ = \dfrac{ΒΔ}{2} = \dfrac{2ΒΓ}{2} = ΒΓ = 2ΜΓ$.

Στα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΒΔ$ τα $Κ$, $Μ$ και $Γ$, $Λ$ είναι τα μέσα των πλευρών τους, οπότε $ΚΜ = \dfrac{ΑΓ}{2}$ και $ΓΛ = \dfrac{ΑΒ}{2}$.

Αφού $ΑΒ = ΑΓ$ έχουμε $ΚΜ = ΓΛ$.
Άρα το τραπέζιο $ΚΛΓΜ$ είναι ισοσκελές.

ii. Είναι:
- $Α\widehat{Κ}Λ = \widehat{Β} = 60^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη
- $Λ\widehat{Κ}Μ = Κ\widehat{Μ}Β$, ως εντός εναλλάξ
- $Κ\widehat{Μ}Β = Α\widehat{Γ}Β = 60^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη

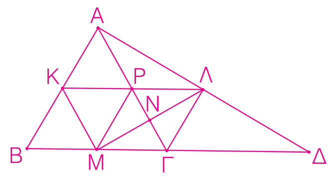
Οπότε $Λ\widehat{Κ}Μ = 60^\circ = Α\widehat{Κ}Λ$.

Τα τρίγωνα $ΚΛΜ$ και $ΑΚΛ$ έχουν:
- $ΚΛ$ κοινή
- $ΑΚ = ΚΜ$, αφού $ΑΚ = \dfrac{ΑΒ}{2} = \dfrac{ΑΓ}{2} = ΚΜ$
- $Λ\widehat{Κ}Μ = Α\widehat{Κ}Λ$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $Κ\widehat{Μ}Λ = \widehat{Α} = 90^\circ$.

Επομένως το τρίγωνο $ΚΛΜ$ είναι ορθογώνιο.

2^{ος} τρόπος

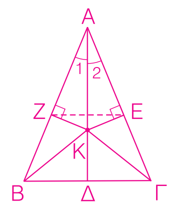


Έστω $Ρ$ το σημείο τομής των $ΚΛ$, $ΑΓ$.
Αφού το $Λ$ είναι το μέσο του $ΑΔ$ και $ΡΛ // ΓΔ$, το $Ρ$ είναι το μέσο του $ΑΓ$.

Είναι $ΡΜ = \dfrac{ΑΒ}{2} = ΑΚ = \dfrac{ΚΛ}{2}$.

Επειδή επιπλέον η $ΡΜ$ είναι διάμεσος στο τρίγωνο $ΚΜΛ$ έχουμε $Κ\hat{Μ}Λ = 90^\circ$, άρα το τρίγωνο $ΚΜΛ$ είναι ορθογώνιο.

322 Θέμα 1884



α. Στο ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ η διάμεσος $ΑΔ$ είναι ύψος και διχοτόμος.
Επειδή το $Κ$ ανήκει στη μεσοκάθετο $ΑΔ$ του $ΒΓ$ έχουμε $ΚΒ = ΚΓ$.
Οπότε το τρίγωνο $ΚΒΓ$ είναι ισοσκελές.
Επειδή Το $Κ$ ανήκει στην $ΑΔ$ διχοτόμο της γωνίας $\widehat{Α}$ έχουμε $ΚΖ = ΚΕ$, οπότε το τρίγωνο $ΖΚΕ$ είναι ισοσκελές.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΖΑΚ$ και $ΕΑΚ$ έχουν:
- $ΑΚ$ κοινή
- $\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2$

Άρα είναι ίσα, οπότε $ΑΖ = ΑΕ$.
Επομένως το τρίγωνο $ΑΖΕ$ είναι ισοσκελές, με $Α\hat{Ζ}Ε = Α\hat{Ε}Ζ$

Είναι $Α\hat{Ζ}Ε + Α\hat{Ε}Ζ + \widehat{Α} = 180^\circ \Leftrightarrow 2Α\hat{Ζ}Ε = 180^\circ - \widehat{Α} \Leftrightarrow Α\hat{Ζ}Ε = 90^\circ - \dfrac{\hat{Α}}{2}$.

Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές, με $\widehat{Β} = \widehat{Γ}$ και έχουμε

$$\widehat{Α} + \widehat{Β} + \widehat{Γ} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{Β} = 180^\circ - Α \Leftrightarrow \hat{Β} = 90^\circ - \dfrac{\hat{Α}}{2}.$$

Άρα $\hat{B} = A\hat{Z}E$, οι οποίες είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη, οπότε $ZE // B\Gamma$.

Επομένως το $ZE\Gamma B$ είναι τραπέζιο και επειδή $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ. Η απάντηση είναι ελλιπής διότι ο μαθητής έλαβε υπόψη του γωνίες που δεν είναι προσκείμενες σε κάθε πλευρά. Έπρεπε να αναφέρει ότι αφού τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, θα έχουν και τις τρίτες τους γωνίες ίσες, δηλαδή $A\widehat{K}B = A\widehat{K}\Gamma$.

Οπότε τα τρίγωνα είναι ίσα με το κριτήριο ΓΠΓ.

323 Θέμα 1718

α. i. Είναι $AA' \perp \varepsilon$ και $\Gamma\Gamma' \perp \varepsilon$, οπότε $AA' // \Gamma'\Gamma$. Άρα το $AA'\Gamma'\Gamma$ είναι τραπέζιο.

Είναι $AA' // OO' // \Gamma\Gamma'$ και $OA = O\Gamma$, οπότε $O'A' = O'\Gamma'$.

Άρα η OO' είναι διάμεσος του τραπεζίου $AA'\Gamma'\Gamma$.

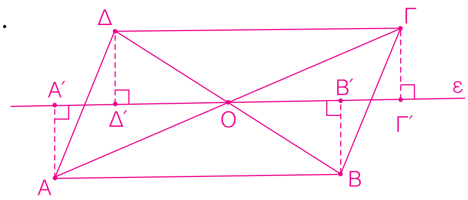
Οπότε $OO' = \dfrac{AA' + \Gamma\Gamma'}{2} = \dfrac{3+5}{2} = 4$.

ii. Είναι $BB' \perp \varepsilon$ και $\Delta\Delta' \perp \varepsilon$, οπότε $BB' \perp \Delta\Delta'$.

Άρα το $BB'\Delta'\Delta$ είναι τραπέζιο.

Βρίσκουμε ότι η OO' είναι διάμεσος και του τραπεζίου $BB'\Delta'\Delta$.

Οπότε $OO' = \dfrac{BB' + \Delta\Delta'}{2} \Leftrightarrow 4 = \dfrac{2 + \Delta\Delta'}{2} \Leftrightarrow \Delta\Delta' = 6$.

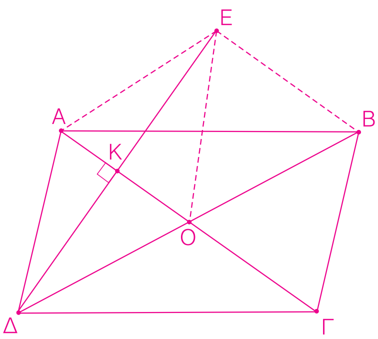


β. Η ευθεία ε είναι παράλληλη στις ΑΒ, ΓΔ και διέρχεται από το κέντρο Ο.

Επομένως η ευθεία ε είναι μεσοπαράλληλος των AB και $\Gamma\Delta$.

Τα σημεία A , B , Γ και Δ των AB , $\Gamma\Delta$ ισαπέχουν από τη μεσοπαράλληλό τους, οπότε $AA' = BB' = \Gamma\Gamma' = \Delta\Delta'$.

324 Θέμα 1770



α. Η $A\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του ΔE , οπότε $OE = O\Delta \Leftrightarrow OE = \dfrac{B\Delta}{2}$.

β. Στο $\overset{\triangle}{\Delta BE}$ η EO είναι διάμεσος και ίση με $\dfrac{B\Delta}{2}$, οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\Delta\hat{E}B = 90^\circ$.

γ. Είναι $BE \perp \Delta E$ και $A\Gamma \perp \Delta E$, οπότε $BE // A\Gamma$. Επειδή η $A\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του ΔE , έχουμε $AE = A\Delta \Leftrightarrow AE = B\Gamma$.

Οπότε το $AEB\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

325 Θέμα 1736

α. Επειδή $AB // \Gamma\Delta$ είναι $A\hat{B}E = \hat{\Gamma} = 30^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο EAB είναι $\hat{B} = 30^\circ$, οπότε $AE = \dfrac{AB}{2} \Rightarrow AB = 2AE$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, οπότε $E\Delta = \dfrac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow \Gamma\Delta = 2E\Delta$.

Τα K , Λ είναι μέσα των διαγώνιων του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$, οπότε

$$K\Lambda = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2} \Leftrightarrow K\Lambda = \frac{2E\Delta - 2AE}{2} \Leftrightarrow K\Lambda = \frac{2(E\Delta - AE)}{2} \Leftrightarrow K\Lambda = E\Delta - AE \Leftrightarrow K\Lambda = A\Delta .$$

γ. Είναι $K\Lambda // AB$, οπότε για να είναι το $AB\Lambda K$ παραλληλόγραμμο αρκεί $K\Lambda = AB$.

Είναι $K\Lambda = A\Delta$, οπότε αρκεί $A\Delta = AB$, δηλαδή το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές.

326 Θέμα 1876

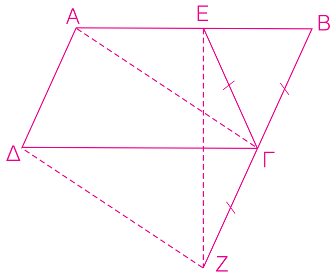
α. Επειδή τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΒΑΔ$, είναι ίσα, θα έχουν τις γωνίες της κορυφής ίσες, οπότε έχουμε $\hat{Α} = \hat{Β}$.
Άρα το τρίγωνο $ΕΑΒ$ είναι ισοσκελές με $ΕΑ = ΕΒ$.
Επειδή $ΑΓ = ΒΔ$, έχουμε $ΕΔ = ΕΓ$, ως διαφορές ίσων τμημάτων.

β. Τα τρίγωνα $ΕΓΔ$ και $ΕΑΒ$ είναι ορθογώνια και ισοσκελή, οπότε:
- $Ε\hat{Δ}Γ = Ε\hat{Γ}Δ = 45^\circ$
- $Ε\hat{Α}Β = Ε\hat{Β}Α = 45^\circ$

Επομένως $Ε\hat{Δ}Γ = Δ\hat{Β}Α$, οι οποίες είναι εντός εναλλάξ, άρα $ΔΓ // ΑΒ$.

γ. • Στα ορθογώνια τρίγωνα $ΕΑΔ$ και $ΕΒΓ$ οι $ΕΚ$, $ΕΛ$ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, επομένως $ΕΚ = \dfrac{ΑΔ}{2}$ και $ΕΛ = \dfrac{ΒΓ}{2}$.
Οπότε $ΕΚ = ΕΛ$, άρα το τρίγωνο $ΕΚΛ$ είναι ισοσκελές.
- Είναι $ΔΓ // ΑΒ$ οπότε το $ΔΓΒΑ$ είναι τραπέζιο και επειδή η $ΚΛ$ είναι διάμεσος, έχουμε $ΚΛ // ΑΒ$.

327 Θέμα 1856



α. Στο τρίγωνο $ΕΒΖ$ η $ΕΓ$ είναι διάμεσος και $ΕΓ = ΓΒ = \dfrac{ΒΖ}{2}$, οπότε

$Β\hat{Ε}Ζ = 90^\circ$.

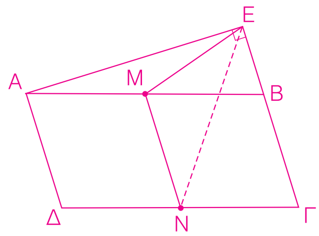
β. Επειδή $ΑΕ // ΓΔ$, το $ΑΕΓΔ$ είναι τραπέζιο.
Έχουμε $ΓΕ = ΓΒ$ και $ΓΒ = ΑΔ$, οπότε $ΓΕ = ΑΔ$, άρα το $ΑΕΓΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ. Είναι $ΒΓ // = ΑΔ$, οπότε $ΓΖ // = ΑΔ$, άρα το $ΑΓΖΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.

328 Θέμα 1786

α. Είναι $ΜΒ // ΓΝ$ και $ΜΒ = ΓΝ$, ως μισά ίσων τμημάτων.

Επειδή $ΜΒ // = ΓΝ$, το $ΜΒΓΝ$ είναι παραλληλόγραμμο.



Είναι $ΜΒ = \dfrac{ΑΒ}{2} = \dfrac{2ΒΓ}{2} = ΒΓ$. Άρα το $ΜΒΓΝ$ είναι ρόμβος.

β. Επειδή το $ΜΒΓΝ$ είναι ρόμβος έχουμε $ΜΝ // ΒΓ$, οπότε το $ΜΕΓΝ$ είναι τραπέζιο. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΕΑΒ$, το $ΕΜ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $ΕΜ = \dfrac{ΑΒ}{2} = ΜΒ = ΝΓ$.

Οπότε το $ΜΕΓΝ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ. Επειδή $ΜΕ = ΜΝ$ έχουμε $Μ\hat{Ε}Ν = Μ\hat{Ν}Ε$. Αφού $ΜΝ // ΕΓ$, έχουμε $Μ\hat{Ν}Ε = Ν\hat{Ε}Γ$, ως εντός εναλλάξ.
Άρα $Μ\hat{Ε}Ν = Ν\hat{Ε}Γ$, οπότε η $ΕΝ$ είναι διχοτόμος της $Μ\hat{Ε}Γ$.

329 Θέμα 1732

α. • Επειδή η $ΒΓ$ είναι μεσοκάθετος του $ΑΔ$ έχουμε $ΑΒ = ΒΔ$.
- Αφού $ΜΒ = ΜΓ$ και $ΜΑ = ΜΕ$ το $ΑΒΕΓ$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $ΓΕ = ΑΒ$.

Άρα $ΑΒ = ΒΔ = ΓΕ$.

β. Είναι $Α\hat{Β}Γ = Β\hat{Γ}Ε$, ως εντός εναλλάξ. Το τρίγωνο $ΑΒΔ$ είναι ισοσκελές, άρα το ύψος $ΒΗ$ είναι και διχοτόμος, οπότε $Α\hat{Β}Γ = Δ\hat{Β}Γ$.

Επομένως $Γ\hat{Β}Δ = Β\hat{Γ}Ε$.

γ. Στο τρίγωνο $ΑΔΕ$ τα $Η$ και $Μ$ είναι μέσα των πλευρών του, οπότε $ΗΜ // ΔΕ$.
Επομένως $ΒΓ // ΔΕ$, άρα το $ΒΓΕΔ$ είναι τραπέζιο. Αφού επιπλέον έχουμε $Γ\hat{Β}Δ = Β\hat{Γ}Ε$ το $ΒΓΕΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

25. Εγγεγραμμένη γωνία

Θέμα 2

330 Θέμα 1581

α. Η επίκεντρη γωνία x και η εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{A}$ βαίνουν στο ίδιο τόξο, οπότε $x = 2\hat{A} = 2\cdot 44^\circ = 88^\circ$.

β. Επειδή $B\hat{O}\Delta = 88^\circ$, είναι $\overset{\frown}{B\Gamma\Delta} = 88^\circ$, άρα $\overset{\frown}{BA\Delta} = 360^\circ - 88^\circ = 272^\circ$. Οπότε $y = \dfrac{272^\circ}{2} = 136^\circ$.

331 Θέμα 1663

Επειδή $B\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$, είναι $\overset{\frown}{B\Delta} = \overset{\frown}{\Delta\Gamma}$, οπότε $B\Delta = \Gamma\Delta$.

Είναι $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}\Delta = 90^\circ$, διότι είναι εγγεγραμμένες και βαίνουν σε ημικύκλια.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta\Gamma$ έχουν:
- $B\Delta = \Delta\Gamma$
- $A\Delta$ κοινή

Άρα είναι ίσα.

332 Θέμα 1580

α. Η εγγεγραμμένη γωνία $B\hat{\Gamma}\Delta$ και η επίκεντρη $B\hat{O}\Delta$ βαίνουν στο ίδιο τόξο, οπότε

$B\hat{\Gamma}\Delta = \dfrac{B\hat{O}\Delta}{2} = \dfrac{120^\circ}{2} = 60^\circ$.

β. Στο τρίγωνο $BM\Gamma$ η $B\hat{\Gamma}\Delta$ είναι εξωτερική, οπότε $B\hat{\Gamma}\Delta = \Gamma\hat{B}M + \omega \Leftrightarrow 60^\circ = 15^\circ + \omega \Leftrightarrow \omega = 45^\circ$.

333 Θέμα 1673

α. Επειδή $OA = KA = OK = \rho$, το τρίγωνο OAK είναι ισόπλευρο.

β. Είναι:
- $B\hat{A}K = 90^\circ$, ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο.
- $\hat{K} = 60^\circ$, αφού το τρίγωνο OAK είναι ισόπλευρο
- $B\hat{A}K + \hat{K} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 60^\circ + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 30^\circ$

334 Θέμα 1696

α. Είναι $BA = K\Gamma = KA = KB = \rho$, άρα το τρίγωνο BKA είναι ισόπλευρο.

β. Είναι:
- $B\hat{K}A = 60^\circ$, αφού το $\overset{\triangle}{BKA}$ είναι ισόπλευρο
- $B\hat{\Delta}A = \dfrac{B\hat{K}A}{2} = 30^\circ$

γ. Είναι:
- $B\hat{A}\Gamma = 90^\circ$, ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο
- $A\hat{B}\Gamma = 60^\circ$, αφού το $\overset{\triangle}{BKA}$ είναι ισόπλευρο
- $B\hat{\Gamma}A = B\hat{\Delta}A = 30^\circ$.

335 Θέμα 1561

α. Είναι:
- $B\hat{A}\Gamma = \dfrac{\overset{\frown}{B\Delta\Gamma}}{2} = \dfrac{160^\circ}{2} = 80^\circ$
- $\hat{\Gamma} = \hat{\varphi} = 30^\circ$, ως γωνία χορδής και εφαπτομένης
- $\hat{B} = 180^\circ - B\hat{A}\Gamma - \hat{\Gamma} = 180^\circ - 80^\circ - 30^\circ = 70^\circ$.

β. Είναι $\hat{B} = 70^\circ$, οπότε $\dfrac{\overset{\frown}{AE\Gamma}}{2} = 70^\circ \Leftrightarrow \overset{\frown}{AE\Gamma} = 140^\circ$.

336 Θέμα 1665

α. Η εφαπτόμενη $ΒΓ$ είναι κάθετη στην ακτίνα $ΟΒ$ στο σημείο επαφής, άρα $Γ\hat{Β}Ο = 90^ο$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΒΓΟ$ $(\hat{Β} = 90^ο)$, έχουμε $\hat{Γ} = 30^ο$, οπότε $ΟΒ = \dfrac{ΟΓ}{2} \Rightarrow ΟΑ = \dfrac{ΟΓ}{2} \Rightarrow ΟΓ = 2ΟΑ$.

β. Είναι $Β\hat{Δ}Α = 90^ο$, ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΒΓΟ$ είναι $Β\hat{Ο}Γ + \hat{Γ} = 90^ο \Leftrightarrow Β\hat{Ο}Γ + 30^ο = 90^ο \Leftrightarrow Β\hat{Ο}Γ = 60^ο$.

Είναι $ΟΒ = ΟΔ$ και $Β\hat{Ο}Δ = 60^ο$, οπότε το τρίγωνο $ΟΒΔ$ είναι ισόπλευρο, άρα $ΒΔ = ΟΒ$.

Έχουμε $\hat{Α} = \dfrac{Β\hat{Ο}Δ}{2} = 30^ο$, ως εγγεγραμμένη γωνία και επίκεντρη που βαίνουν στο ίδιο τόξο.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΒΓΟ$ και $ΒΔΑ$ έχουν:
- $ΟΒ = ΒΔ$
- $\hat{Γ} = \hat{Α}$

Άρα είναι ίσα, οπότε $ΒΓ = ΑΔ$.

337 Θέμα 1626

α. Είναι:
- $ΟΓ \perp ΓΔ$, άρα $Ο\hat{Γ}Δ = 90^ο$
- $Γ\hat{Ο}Δ = 2\hat{Α} = 60^ο$, ως εγγεγραμμένη γωνία και επίκεντρη που βαίνουν στο ίδιο τόξο
- $Ο\hat{Γ}Δ + Γ\hat{Ο}Δ + \hat{Δ} = 180^ο \Leftrightarrow 90^ο + 60^ο + \hat{Δ} = 180^ο \Leftrightarrow \hat{Δ} = 30^ο$

β. Επειδή $\hat{Α} = \hat{Δ}$ είναι $ΓΑ = ΓΔ$.

Είναι $Β\hat{Γ}Δ = \hat{Α} = 30^ο$, ως γωνία χορδής και εφαπτομένης

Οπότε $Β\hat{Γ}Δ = \hat{Δ} = 30^ο$, άρα το τρίγωνο $ΒΓΔ$ είναι ισοσκελές.

338 Θέμα 1672

α. Είναι:
- $Β\hat{Α}Γ = 90^ο$, ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο
- $\hat{Β} = Γ\hat{Α}x = 45^ο$, ως γωνία χορδής και εφαπτομένης
- $\hat{Γ} = 180^ο - \hat{Β} - Β\hat{Α}Γ = 180^ο - 45^ο - 90^ο = 45^ο$

β. Έχουμε $ΒΓ // ΔΕ$, οπότε το $ΒΓΕΔ$ είναι τραπέζιο. Επειδή επιπλέον είναι $\hat{Β} = \hat{Γ}$ $(= 45^ο)$, το $ΒΓΕΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

339 Θέμα 1530

α. Η $x\hat{Α}Δ$ σχηματίζεται από τη χορδή $ΑΔ$ και την εφαπτομένη Ax , οπότε $x\hat{Α}Δ = Α\hat{Β}Δ = 40^ο$.

Είναι:
- $Δ\hat{Α}Γ = Γ\hat{Α}Χ - Χ\hat{Α}Δ = 85^ο - 40^ο = 45^ο$
- $\hat{Β}_1 = Δ\hat{Α}Γ = 45^ο$, ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο

β. Είναι $Α\hat{Β}Γ = 40^ο + 45^ο = 85^ο$

Στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ έχουμε

$\hat{φ} + Α\hat{Β}Γ = 180^ο \Leftrightarrow φ = 180^ο - Α\hat{Β}Γ \Leftrightarrow φ = 180^ο - 85^ο \Leftrightarrow φ = 95^ο$.

340 Θέμα 1703

α. Είναι $\overset{\frown}{B\Delta}+\overset{\frown}{\Delta\Gamma}=180^\circ \Leftrightarrow 2x+x=180^\circ \Leftrightarrow 3x=180^\circ \Leftrightarrow x=60^\circ$.

β. Επειδή $\overset{\frown}{B\Delta}=2\cdot 60^\circ=120^\circ$, έχουμε $B\hat{O}\Delta=120^\circ$.

γ. Είναι $B\hat{A}\Delta=\dfrac{B\hat{O}\Delta}{2}=\dfrac{120^\circ}{2}=60^\circ$.

341 Θέμα 1695

α. Είναι: • $x=A\hat{B}\Gamma=30^\circ$, ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma}$.

• $y=2x=2\cdot 30^\circ=60^\circ$, αφού η y είναι επίκεντρη και η x εγγεγραμμένη που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma}$.

• $\omega=A\hat{B}\Gamma=30^\circ$, αφού η ω σχηματίζεται από τη χορδή $A\Gamma$ και την εφαπτομένη ε στο Γ που στο αντίστοιχο τόξο βαίνει η εγγεγραμμένη $A\hat{B}\Gamma$.

β. Επειδή $OA=O\Gamma=\rho$ και $A\hat{O}\Gamma=60^\circ$, το $\overset{\Delta}{OA\Gamma}$ είναι ισόπλευρο.

342 Θέμα 1769

α. Οι $\Delta\hat{A}\Gamma$, $\Delta\hat{B}\Gamma$ είναι ίσες ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{\Delta\Gamma}$.

β. Είναι $A\hat{\Delta}B=A\hat{\Gamma}B=90^\circ$, ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ημικύκλιο.

Τα $A\Delta EZ$ και $EZB\Gamma$ είναι εγγράψιμα διότι:
- $\hat{\Delta}+\hat{Z}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$
- $\hat{\Gamma}+\hat{Z}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$

γ. Είναι:
- $\Delta\hat{Z}E=\Delta\hat{A}E$, αφού το $A\Delta EZ$ είναι εγγράψιμο
- $E\hat{Z}\Gamma=E\hat{B}\Gamma$, αφού το $EZB\Gamma$ είναι εγγράψιμο
- $\Delta\hat{A}E=E\hat{B}\Gamma$, από το **α.** ερώτημα

Άρα $\Delta\hat{Z}E=E\hat{Z}\Gamma$, οπότε η EZ είναι η διχοτόμος της $\Delta\hat{Z}\Gamma$.

343 Θέμα 1712

α. i. Το Γ είναι μέσο του $\overset{\frown}{AB}$, άρα $\overset{\frown}{A\Gamma}=\overset{\frown}{\Gamma B}$, οπότε $A\Gamma=B\Gamma$. Αφού το $A\Gamma B\Delta$ είναι εγγεγραμμένο, έχουμε $\Gamma\hat{A}\Delta=\Gamma\hat{B}E$.

Τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $BE\Gamma$ έχουν:
- $A\Gamma=\Gamma B$
- $A\Delta=BE$
- $\Gamma\hat{A}\Delta=\Gamma\hat{B}E$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

ii. Είναι $\Delta\hat{\Gamma}E=\Delta\hat{\Gamma}B+B\hat{\Gamma}E\overset{\alpha.i.}{=}\Delta\hat{\Gamma}B+A\hat{\Gamma}\Delta=A\hat{\Gamma}B=90^\circ$, αφού η $A\hat{\Gamma}B$ είναι εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο. Οπότε $\Gamma\Delta\perp\Gamma E$.

β. Αν $\Gamma\Delta$ διάμετρος, τότε $O\Gamma\perp\Gamma E$, οπότε η ΓE είναι εφαπτομένη του κύκλου.

Θέμα 4

344 Θέμα 1739

α. Είναι:
- $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A\Gamma} = 120^o$
- $\overset{\frown}{B\Gamma} = 360^o - 120^o - 120^o = 120^o$

Οπότε $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{B\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma A}$, άρα $AB = B\Gamma = \Gamma A$

Επομένως το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

β. Είναι $\overset{\frown}{A\Delta} = \overset{\frown}{AE} = \dfrac{120^o}{2} = 60^o$, οπότε $A\Delta = AE$.

Είναι $\Delta\hat{A}B = \dfrac{\overset{\frown}{B\Delta}}{2} = 30^o$ και $A\hat{\Delta}E = \dfrac{\overset{\frown}{AE}}{2} = 30^o$.

Όμοια $E\hat{A}H = A\hat{E}H = 30^o$, οπότε $A\hat{Z}\Delta = A\hat{H}E = 180^o - 2\cdot 30^o = 180^o - 60^o = 120^o$.

Τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και AHE έχουν:
- $A\Delta = AE$
- $\Delta\hat{A}Z = H\hat{A}E$
- $A\hat{\Delta}Z = A\hat{E}H$

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ).

γ. Στο τρίγωνο AZH , είναι:
- $\hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{B\Gamma}}{2} = \dfrac{120^o}{2} = 60^o$
- $\hat{Z} = 180^o - A\hat{Z}\Delta = 180^o - 120^o = 60^o$
- $\hat{H} = 180^o - A\hat{H}E = 180^o - 120^o = 60^o$
- $\hat{A} = \hat{Z} = \hat{H} = 60^o$

Οπότε είναι ισόπλευρο, άρα $AZ = ZH = AH$.

Αφού $\Delta Z = AZ$, $HE = AH$ έχουμε $\Delta Z = ZH = HE$.

Οπότε η ΔE τριχοτομείται από τις AB και $A\Gamma$.

345 Θέμα 1720

α. Είναι:
- $ZB = Z\Gamma$, οπότε το τρίγωνο $ZB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- $Z\hat{B}\Gamma = B\hat{A}\Gamma = 60^o$ ως γωνία χορδής και εφαπτομένης.

Επομένως το τρίγωνο $ZB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

β. Είναι $AB = A\Gamma = B\Gamma$ και $ZB = Z\Gamma = B\Gamma$. Οπότε $AB = A\Gamma = ZB = Z\Gamma$, άρα το $A\Gamma ZB$ είναι ρόμβος.

γ. Επειδή το $A\Gamma ZB$ είναι ρόμβος, έχουμε $B\Gamma \perp AZ$ και αφού έχουμε $\Theta H \perp AZ$, είναι $B\Gamma // \Theta H$.

Άρα το $B\Gamma H\Theta$ είναι τραπέζιο.

Είναι $\hat{\Theta} = \hat{B} = 60^o$ και $\hat{H} = \hat{\Gamma} = 60^o$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

Οπότε $\hat{\Theta} = \hat{H}$, άρα το $B\Gamma H\Theta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

346 Θέμα 1717

α. Επειδή η γωνία $A\hat{B}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο (K, ρ) και βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

Άρα $A\hat{B}\Gamma = 90^o$.

β. Η γωνία $A\hat{B}\Delta$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο (Λ, R) και βαίνει σε ημικύκλιο, οπότε $A\hat{B}\Delta = 90^o$.

Είναι $\Gamma\hat{B}\Delta = A\hat{B}\Gamma + A\hat{B}\Delta = 90^o + 90^o = 180^o$. Άρα τα Γ , B , Δ είναι συνευθειακά.

γ. Τα K , Λ είναι τα μέσα των πλευρών $A\Gamma$, $A\Delta$ στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ οπότε $K\Lambda // \Gamma\Delta$.

Άρα το $K\Lambda\Delta\Gamma$ είναι τραπέζιο.

347 Θέμα 1848

α. Έχουμε $A\Delta = B\Gamma$, οπότε $\overset{\frown}{A\Delta} = \overset{\frown}{B\Gamma}$. Άρα $A\hat{\Gamma}\Delta = \Gamma\hat{A}B$ οι οποίες είναι εντός εναλλάξ, οπότε $AB \,//\, \Delta\Gamma$.

β. Επειδή $\overset{\frown}{A\Delta\Gamma} = \overset{\frown}{AB\Gamma}$ και $\overset{\frown}{A\Delta} = \overset{\frown}{B\Gamma}$, έχουμε $\overset{\frown}{\Delta\Gamma} = \overset{\frown}{AB}$, οπότε $A\Delta \,//\, B\Gamma$.

Είναι $AB \,//\, \Delta\Gamma$ και $A\Delta \,//\, B\Gamma$, οπότε το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

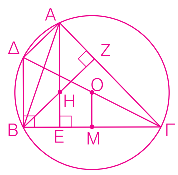
Επειδή $\hat{B} = 90^\circ$, ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, έχουμε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.

γ. Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο, έχουμε $\Delta\hat{A}B = 90^\circ$, οπότε $\overset{\frown}{\Delta\Gamma B} = 180^\circ$.
Άρα η $B\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου.

δ. Επειδή τα K, Λ είναι τα μέσα των χορδών $\Gamma\Delta$, ΓB, έχουμε ότι $OK \perp \Gamma\Delta$ και $O\Lambda \perp B\Gamma$.

Το $O\Lambda\Gamma K$ έχει τρεις ορθές γωνίες $\hat{K} = \hat{\Lambda} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$, οπότε είναι ορθογώνιο.

348 Θέμα 1897



α. Επειδή η γωνία $\Delta\hat{B}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη και $\Delta\hat{B}\Gamma = 90^\circ$, η $\Delta\Gamma$ είναι διάμετρος.

Οπότε και $\Delta\hat{A}\Gamma = 90^\circ$, άρα $\Delta A \perp A\Gamma$.

β. Είναι:
- $AH \perp B\Gamma$ και $\Delta B \perp B\Gamma$, άρα $AH \,//\, \Delta B$
- $BH \perp A\Gamma$ και $A\Delta \perp A\Gamma$, άρα $BH \,//\, A\Delta$

Οπότε το $A\Delta BH$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Στο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ τα O, M είναι τα μέσα των $\Gamma\Delta$ και $B\Gamma$, οπότε $OM = \dfrac{B\Delta}{2} = \dfrac{AH}{2}$, αφού το $A\Delta BH$ είναι παραλληλόγραμμο.

349 Θέμα 1772

α. Είναι $OE \perp ZH$, αφού η ακτίνα είναι κάθετη στην εφαπτομένη στο σημείο επαφής.
Επειδή το E είναι το μέσο του $\overset{\frown}{B\Gamma}$, έχουμε $\overset{\frown}{EB} = \overset{\frown}{E\Gamma}$, οπότε $EB = E\Gamma$.
Αφού επιπλέον $OB = O\Gamma = \rho$, το OE είναι μεσοκάθετος του $B\Gamma$.

Άρα $OE \perp B\Gamma$, επομένως $B\Gamma \,//\, ZH$.

β. Είναι $\overset{\frown}{EB} = \overset{\frown}{E\Gamma}$, άρα $B\hat{O}E = \Gamma\hat{O}E$.
Στο τρίγωνο OZH, το OE είναι ύψος και διχοτόμος.
Οπότε το τρίγωνο OZH είναι ισοσκελές με κορυφή το O, άρα $OZ = OH$.

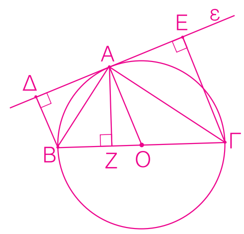
γ. i. Είναι:
- $B\hat{E}Z = B\hat{\Gamma}E$, ως γωνία χορδής και εφαπτομένης
- $B\hat{\Gamma}E = \dfrac{B\hat{O}E}{2}$, ως εγγεγραμμένη γωνία και επίκεντρη που βαίνουν στο ίδιο τόξο

Οπότε $B\hat{E}Z = \dfrac{B\hat{O}E}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{Z\hat{O}H}{2} = \dfrac{Z\hat{O}H}{4}$.

ii. Το τρίγωνο OEZ είναι ορθογώνιο $(\hat{E} = 90^\circ)$ με $OE = OB = \dfrac{OZ}{2}$.

Άρα $\hat{Z} = 30^\circ$, οπότε $\hat{H} = \hat{Z} = 30^\circ$ και $\hat{O} = 180^\circ - \hat{Z} - \hat{H} = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$.

350 Θέμα 1809



α. Είναι:
- $B\hat{A}\Gamma = 90^o$, ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο
- $\Delta\hat{A}B = A\hat{\Gamma}B$ και $E\hat{A}\Gamma = A\hat{B}\Gamma$, ως γωνίες χορδής και εφαπτομένης

Οπότε:
- $\Delta\hat{B}A = 90^o - \Delta\hat{A}B = 90^o - A\hat{\Gamma}B = A\hat{B}\Gamma$.
- $E\hat{\Gamma}A = 90^o - E\hat{A}\Gamma = 90^o - A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}B$

Επομένως η BA είναι η διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{B}\Gamma$, και η ΓA είναι η διχοτόμος της γωνίας $E\hat{\Gamma}B$.

β. Η BA είναι η διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{B}\Gamma$, οπότε $A\Delta = AZ$.
Η ΓA είναι η διχοτόμος της γωνίας $E\hat{\Gamma}B$, οπότε $AZ = AE$.
Άρα $A\Delta = AE = AZ$.

γ. Επειδή $B\Delta \perp \varepsilon$ και $\Gamma E \perp \varepsilon$, έχουμε $B\Delta // \Gamma E$, οπότε το $B\Delta E\Gamma$ είναι τραπέζιο.

Επειδή το O είναι το μέσο του $B\Gamma$ και $OA \perp \varepsilon$, έχουμε $OA // B\Delta$.
Επομένως η OA είναι η διάμεσος του τραπεζίου.

Άρα $OA = \dfrac{B\Delta + \Gamma E}{2} \Rightarrow B\Delta + \Gamma E = 2OA \Rightarrow \Rightarrow B\Delta + \Gamma E = 2OB \Rightarrow B\Delta + \Gamma E = B\Gamma$.

351 Θέμα 1883

α. Είναι $\Gamma\hat{\Delta}A = 90^o$, ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι $\Delta\hat{A}\Gamma = 90^o - \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \Delta\hat{A}\Gamma = \hat{B}$, αφού $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^o$ στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\overset{\Delta}{B}\Gamma$.

Οπότε $\Gamma\hat{A}\Delta = \hat{B}$.

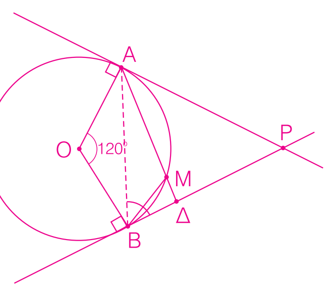
β. Είναι:
- $\hat{B} = 90^o - \hat{\Gamma}$
- $M\hat{\Delta}B = 180^o - 90^o - O\hat{\Delta}\Gamma = 90^o - \hat{\Gamma}$, αφού το τρίγωνο $O\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές

Άρα $\hat{B} = M\hat{\Delta}B$, οπότε το τρίγωνο ΔMB είναι ισοσκελές.

γ. Είναι:
- $MA = M\Delta$, ως εφαπτόμενα τμήματα
- $MB = M\Delta$, αφού το τρίγωνο ΔMB είναι ισοσκελές

Οπότε $MA = MB$, άρα το M είναι το μέσο του AB .

352 Θέμα 1768



α. Στο τετράπλευρο $PAOB$ είναι $\hat{A} = \hat{B} = 90^o$. Οπότε
$\hat{P} = 360^o - 90^o - 90^o - 120^o = 60^o$. Επιπλέον $PA = PB$ ως εφαπτόμενα τμήματα.
Άρα, το τρίγωνο PAB είναι ισόπλευρο.

β. Είναι $A\hat{O}B = 120^o$ ή $\overset{\frown}{AMB} = 120^o$.
Άρα το μη κυρτογώνιο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ είναι ίσο με 240^o .
Η γωνία $A\hat{M}B$ είναι εγγεγραμμένη στο μη κυρτογώνιο τόξο $\overset{\frown}{AB}$.

Τότε $A\hat{M}B = \dfrac{240^o}{2} = 120^o$.

Στο τρίγωνο MAB έχουμε $M\hat{A}B + M\hat{B}A + A\hat{M}B = 180^o \Leftrightarrow M\hat{A}B + M\hat{B}A + 120^o = 180^o \Leftrightarrow M\hat{A}B + M\hat{B}A = 60^o$.

γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta B$ είναι $\hat{B} = 60^o$ οπότε $M\hat{A}B = 30^o$.
Από το ερώτημα **β.** προκύπτει ότι $M\hat{B}A = 30^o$. Άρα $MA = MB$.

Επομένως $AM \perp BP$ στην περίπτωση που το M είναι μέσο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$.

26. Εγγεγραμένα και Εγγράψιμα τετράπλευρα

Θέμα 4

353 Θέμα 1807

α. Στα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ $(\hat{A}=90^o)$, $\Delta B\Gamma$ $(\hat{\Delta}=90^o)$ οι AM, ΔM είναι διάμεσοι, οπότε $AM=\dfrac{B\Gamma}{2}$ και $\Delta M=\dfrac{B\Gamma}{2}$.

Άρα $AM=M\Delta$.

β. Στο ισοσκελές τρίγωνο $MA\Delta$, η MN είναι διάμεσος, άρα είναι και ύψος, οπότε $MN\perp A\Delta$.

γ. Το $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο, αφού $B\hat{A}\Gamma=B\hat{\Delta}\Gamma=90^o$, οπότε η $B\Gamma$ φαίνεται από τις κορυφές A και Δ, υπό ίσες γωνίες. Άρα $\Gamma\hat{B}\Delta=\Gamma\hat{A}\Delta$.

354 Θέμα 1886

α. Στα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ $(\hat{A}=90^o)$ και $\Delta B\Gamma$ $(\hat{\Delta}=90^o)$ οι AM, ΔM είναι διάμεσοι, οπότε $AM=\dfrac{B\Gamma}{2}$ και $\Delta M=\dfrac{B\Gamma}{2}$. Άρα $AM=M\Delta$, οπότε το τρίγωνο $AM\Delta$ είναι ισοσκελές.

β. Επειδή $\hat{A}+\hat{\Delta}=90^o+90^o=180^o$, το τετράπλευρο $A\Gamma\Delta B$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο με κέντρο M. Οπότε $A\hat{M}\Delta=2A\hat{\Gamma}\Delta$, αφού η $A\hat{M}\Delta$ είναι επίκεντρη και η $A\hat{\Gamma}\Delta$ εγγεγραμμένη που βαίνει στο ίδιο τόξο με την $A\hat{M}\Delta$.

γ. Επειδή το τετράπλευρο $A\Gamma\Delta B$ είναι εγγράψιμο η πλευρά του $\Gamma\Delta$ φαίνεται από τις κορυφές A και B υπό ίσες γωνίες.

Άρα $\Gamma\hat{B}\Delta=\Gamma\hat{A}\Delta$.

355 Θέμα 1847

α. Είναι $OB\perp AB$ και $O\Gamma\perp A\Gamma$.

Επειδή $A\hat{B}O+A\hat{\Gamma}O=90^o+90^o=180^o$, το $ABO\Gamma$ είναι εγγράψιμο. Η διακεντρική ευθεία AO είναι η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$, οπότε $B\hat{A}O=\dfrac{B\hat{A}\Gamma}{2}=\dfrac{60^o}{2}=30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABO είναι $B\hat{A}O=30^o$, άρα $OB=\dfrac{OA}{2}\Rightarrow OA=2OB$.

β. Η ZE είναι εφαπτομένη του κύκλου στο Δ, άρα $ZE\perp O\Delta$.

Στο τρίγωνο AEZ η $A\Delta$ είναι διχοτόμος και ύψος.

Οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και επειδή $\hat{A}=60^o$ είναι ισόπλευρο.

γ. Είναι $ZB=Z\Delta$, ως εφαπτόμενα τμήματα.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AZ\Delta$ είναι $Z\hat{A}\Delta=30^o$, οπότε $Z\Delta=\dfrac{AZ}{2}\Rightarrow ZB=\dfrac{AZ}{2}\Rightarrow 2ZB=AZ$.

δ. Η διακεντρική ευθεία AO είναι κάθετη στη χορδή $B\Gamma$, άρα $A\Delta\perp B\Gamma$.

Είναι $A\Delta\perp ZE$ και $A\Delta\perp B\Gamma$, οπότε $ZE\,//\,B\Gamma$.

Άρα το $EZB\Gamma$ είναι τραπέζιο.

Είναι:
- $E\Gamma=E\Delta$, ως εφαπτόμενα τμήματα
- $E\Delta=\Delta Z$, αφού το ύψος $A\Delta$ στο ισοσκελές τρίγωνο AEZ είναι και διάμεσος.
- $\Delta Z=ZB$, ως εφαπτόμενα τμήματα

Άρα $ZB=E\Gamma$, οπότε το $EZB\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

356 Θέμα 1892

α. Είναι $ΑΔ \perp ΒΓ$ και $ΟΜ \perp ΒΓ$, οπότε $ΑΔ // ΟΜ$.

Άρα $Δ\hat{Α}Μ = Α\hat{Μ}Ο$, ως εντός εναλλάξ.

Επειδή $ΟΑ = ΟΜ$, είναι $Α\hat{Μ}Ο = Μ\hat{Α}Ο$.

Οπότε $Δ\hat{Α}Μ = Μ\hat{Α}Ο$, άρα η $ΑΜ$ είναι η διχοτόμος της $Δ\hat{Α}Ο$.

β. Επειδή το $Μ$ είναι το μέσο του $\overset{\frown}{ΒΓ}$ έχουμε $Β\hat{Α}Μ = Μ\hat{Α}Γ$. Από το **α.** ερώτημα είναι $Δ\hat{Α}Μ = Μ\hat{Α}Ο$, οπότε $Β\hat{Α}Μ - Δ\hat{Α}Μ = Μ\hat{Α}Γ - Μ\hat{Α}Ο \Rightarrow Δ\hat{Α}Β = Ο\hat{Α}Γ$.

γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΔΑΓ$ είναι $Δ\hat{Α}Γ = 90^o - \hat{Γ}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΔΑΒ$ είναι $Δ\hat{Α}Β = 90^o - \hat{Β}$.

Είναι $Δ\hat{Α}Ο = Δ\hat{Α}Γ - Ο\hat{Α}Γ = 90^o - \hat{Γ} - Δ\hat{Α}Β = 90^o - \hat{Γ} - (90^o - \hat{Β}) = \hat{Β} - \hat{Γ}$.

357 Θέμα 1864

α. Είναι:
- $\hat{Α} = \hat{Γ} = 90^o$, ως εγγεγραμμένες που βαίνουν σε ημικύκλιο.
- $\hat{Β} + \hat{Δ} = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{Δ} + \hat{Δ} = 180^o \Leftrightarrow 3\hat{Δ} = 180^o \Leftrightarrow \hat{Δ} = 60^o$, οπότε $\hat{Β} = 2 \cdot 60^o = 120^o$.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΔΑΒ$ $(\hat{Α} = 90^o)$ και $ΔΓΒ$ $(\hat{Γ} = 90^o)$ έχουν:
- $ΑΒ = ΒΓ$
- $ΒΔ$ κοινή

Άρα είναι ίσα.

γ. Επειδή $ΑΒ = ΒΓ$, έχουμε $\overset{\frown}{ΑΒ} = \overset{\frown}{ΒΓ}$, οπότε $Α\hat{Δ}Β = Γ\hat{Δ}Β$.

Επομένως η $ΔΒ$ είναι η διχοτόμος της $\hat{Δ}$, άρα $Α\hat{Δ}Β = 30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΔ$ $(\hat{Α} = 90^o)$ είναι $Α\hat{Δ}Β = 30^o$, οπότε $ΑΒ = \frac{ΒΔ}{2} = ρ$.

Άρα $ΟΑ = ΑΒ = ΒΓ = ΟΓ$, οπότε το $ΑΒΓΟ$ είναι ρόμβος.

δ. Στο τετράπλευρο $ΑΒΟΕ$ είναι $\hat{Α} + \hat{Ο} = 90^o + 90^o = 180^o$, οπότε το $ΑΒΟΕ$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

358 Θέμα 1896

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(\hat{Α} = 90^o)$ η $ΑΜ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2} = ΜΒ$.

Επομένως $Μ\hat{Α}Β = Μ\hat{Β}Α = 30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΕΑΒ$ $(\hat{Ε} = 90^o)$, είναι $Ε\hat{Α}Β = 30^o$, οπότε $ΒΕ = \frac{ΑΒ}{2}$ (1).

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΗΒΑ$ $(\hat{Η} = 90^o)$, είναι $\hat{Β} = 30^o$, οπότε $ΑΗ = \frac{ΑΒ}{2}$ (2).

Από $(1), (2)$ έχουμε $ΑΗ = ΒΕ$.

γ. Στο τετράπλευρο $ΑΗΕΒ$ είναι $Β\hat{Ε}Α = 90^o = Β\hat{Η}Α$, οπότε είναι εγγράψιμο.

δ. Είναι:
- $Η\hat{Ε}Α = Η\hat{Β}Α$, αφού $ΑΗΕΒ$ εγγράψιμο
- $Η\hat{Β}Α = Ε\hat{Α}Β$, αφού $ΜΑ = ΜΒ$.

Οπότε $Η\hat{Ε}Α = Ε\hat{Α}Β$, οι οποίες είναι εντός εναλλάξ, άρα $ΕΗ // ΑΒ$.

359 Θέμα 1799

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΒΕΓ$ $(\hat{Ε}=90^o)$, η $ΕΔ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα.

Οπότε $ΕΔ=\frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow ΒΓ=2ΕΔ$.

β. Είναι $ΕΔ=\frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow ΕΔ=ΔΒ$.

Το τρίγωνο $ΕΔΒ$ είναι ισοσκελές με $Β\hat{Ε}Δ=Ε\hat{Β}Δ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΕΒΓ$, έχουμε $Ε\hat{Β}Γ+\hat{Γ}=90^o \Leftrightarrow Ε\hat{Β}Δ+\hat{Γ}=90^o \Leftrightarrow Β\hat{Ε}Δ=90^o-\hat{Γ}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΔΓ$, έχουμε $Δ\hat{Α}Γ+\hat{Γ}=90^o \Leftrightarrow \frac{\hat{Α}}{2}+\hat{Γ}=90^o \Leftrightarrow \frac{\hat{Α}}{2}=90^o-\hat{Γ}$.

Άρα $Β\hat{Ε}Δ=\frac{\hat{Α}}{2}$.

γ. Το τετράπλευρο $ΑΕΔΒ$ είναι εγγράψιμο, αφού $Α\hat{Ε}Β=90^o=Α\hat{Δ}Β$.

δ. Επειδή το τετράπλευρο $ΑΕΔΒ$ είναι εγγράψιμο, έχουμε $Α\hat{Β}Ε=Α\hat{Δ}Ε$.

360 Θέμα 1774

α. Έχουμε $Δ\hat{Α}Β=Ε\hat{Β}Γ=60^o$, οι οποίες είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη, άρα $ΑΔ // ΒΕ$.
Οπότε το $ΑΔΕΒ$ είναι τραπέζιο.

β. Είναι $Δ\hat{Β}Μ=180^o-60^o-60^o=60^o$.

Τα τρίγωνα $ΔΜΒ$ και $ΔΕΒ$ έχουν:
- $ΜΒ=ΒΕ$
- $ΔΒ$ κοινή
- $Δ\hat{Β}Μ=Δ\hat{Β}Ε$ $(=60^o)$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

γ. Το $ΔΜ$ είναι διάμεσος στο ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΔ$, οπότε είναι και ύψος του, άρα $Δ\hat{Μ}Β=90^o$.

Επειδή $\overset{\Delta}{ΔΜΒ}=\overset{\Delta}{ΔΕΒ}$, είναι ίσα έχουμε $Δ\hat{Μ}Β=Δ\hat{Ε}Β=90^o$.

Είναι $Δ\hat{Μ}Β+Δ\hat{Ε}Β=90^o+90^o=180^o$, οπότε το τετράπλευρο $ΔΜΒΕ$ είναι εγγράψιμο.

361 Θέμα 1776

α. Τα τρίγωνα $ΑΕΓ$ και $ΑΒΔ$ έχουν:
- $ΑΕ=ΑΒ$
- $ΑΓ=ΑΔ$
- $Ε\hat{Α}Γ=Δ\hat{Α}Β$ $(=60^o+Β\hat{Α}Γ)$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $Α\hat{Γ}Ε=Α\hat{Δ}Β$ και $Α\hat{Ε}Γ=Α\hat{Β}Δ$.

β. Επειδή:
- $Α\hat{Γ}Ε=Α\hat{Δ}Β$, το τετράπλευρο $ΑΖΓΔ$ είναι εγγράψιμο.
- $Α\hat{Ε}Γ=Α\hat{Β}Δ$, το $ΑΖΒΕ$ είναι εγγράψιμο

γ. Είναι $Β\hat{Ζ}Γ=Ε\hat{Ζ}Δ=Ε\hat{Ζ}Α+Α\hat{Ζ}Δ=Ε\hat{Β}Α+Α\hat{Γ}Δ=60^o+60^o=120^o$.

362 Θέμα 1779

α. i. Τα τρίγωνα $ΒΕΓ$ και $ΑΔΓ$ έχουν:
- $ΒΓ = ΑΓ$
- $ΓΕ = ΑΔ$
- $\hat{Γ} = \hat{Α}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $Β\hat{Ε}Γ = Γ\hat{Δ}Α$.

ii. Επειδή τα τρίγωνα $ΒΕΓ$ και $ΑΔΓ$ είναι ίσα έχουμε $Ε\hat{Β}Γ = Ο\hat{Γ}Ε$.

Στο τρίγωνο $ΟΓΕ$ η $Β\hat{Ο}Γ$ είναι εξωτερική, οπότε

$Β\hat{Ο}Γ = Ο\hat{Γ}Ε + Ο\hat{Ε}Γ \overset{i.}{=} Ε\hat{Β}Γ + Ο\hat{Ε}Γ = 180^{o} - Β\hat{Γ}Ε = 180^{o} - 60^{o} = 120^{o}$.

β. Είναι:
- $Δ\hat{Ο}Ε = ΒΟΓ = 120^{o}$
- $\hat{Α} + Δ\hat{Ο}Ε = 60^{o} + 120^{o} = 180^{o}$

Άρα το τετράπλευρο $ΑΕΟΔ$ είναι εγγράψιμο.

363 Θέμα 1753

α. Είναι $ΟΑ \perp ΑΜ$ και $ΟΒ \perp ΒΜ$.

Οπότε $\hat{Α} + \hat{Β} = 90^{o} + 90^{o} = 180^{o}$. Άρα το τετράπλευρο $ΑΜΒΟ$ είναι εγγράψιμο.

β. Αφού $\hat{Α} = 90^{o}$, η $ΟΜ$ είναι διάμετρος του περιγραμμένου κύκλου του τετράπλευρου $ΑΜΒΟ$.

Οπότε το κέντρο $Λ$ του περιγγεγραμμένου κύκλου του τετράπλευρου $ΑΜΒΟ$ είναι το μέσο του $ΜΟ$.

γ. Στο τρίγωνο $ΟΜΓ$ τα σημεία $Β$, $Λ$ είναι μέσα των $ΟΓ$, $ΟΜ$, οπότε $ΒΛ // ΜΓ$.